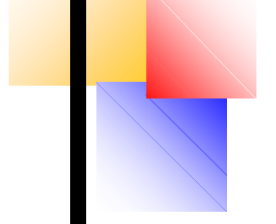


سلاسل المنجد - دروس و تمارين



السلسلة 3-06-1

التطورات المهمة

عرض نظري و تمارين

يمكن تحميل نسخة من هذا الملف من الموقع :

www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل - تمارين - فيديوهات)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في الموقع الإلكتروني

لكي يصلك جديد الموقع تابع صفحة الفايسبوك التالية :

الأستاذ فرقاني فارس أستاذ العلوم الفيزيائية Fergani Fares

الأستاذ فرقاني فارس

ثانوية مولود قاسم نابت بلقاسم - الخروب - قسنطينة

fares_fergani@yahoo.fr

الإصدار : مارس/2021

فارس



تطلو جملة مهتزة

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

السلسلة 3 – 06 – 01

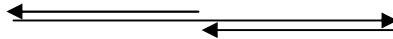
عرض نظري و تمارين

I – الاهتزازات الحرة لجملة ميكانيكية

1- مفاهيم أساسية عن الحركة الاهتزازية

• الجملة الميكانيكية المهتزة :

- الجملة الميكانيكية المهتزة هي كل جملة تقوم بحركة ذهابا و إيابا على جانبي وضع توازنها .
- مثال : حركة نابض على جانبي وضع توازنه ، حركة أرجوحة على جانبي وضع توازنها .
- تكون الاهتزازات حرة إذا كانت لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي .
- نقول عن الجملة أنها قامت باهتزازة ، عندما تمر مرتين متتاليتين من نفس الموضع في نفس الاتجاه .



• سعة اهتزاز الجملة الميكانيكية المهتزة :

- سعة الاهتزاز هي القيمة الأعظمية لمقدار الإزاحة عن وضع توازن الجملة المهتزة .
- إذا حافظت الجملة المهتزة على قيمة سعتها بمرور الزمن ، نقول عن حركة الجملة المهتزة أنها غير متخامدة ، و أثناء ذلك تكون طاقتها محفوظة ، أي لا وجود ضياع في الطاقة أثناء الحركة المهتزة .
- إذا كانت سعة الحركة المهتزة متناقصة ، نقول عن هذه الحركة المهتزة أنها متخامدة ، و أثناء ذلك تكون طاقتها غير محفوظة ، أي يوجد ضياع في الطاقة أثناء الحركة المهتزة .
- لمنع التخماد أي لجعل سعة الاهتزاز ثابتة ، نقوم بما يسمى تغذية الحركة الاهتزازية ، و أثناء ذلك نقوم بتعويض الطاقة الضائعة باستمرار ، يتحقق ذلك بتجهيز يتناسب مع الجملة المهتزة ، مثل ساعة الحائط أو الأرجوحة عندما ندفعها في كل مرة .

• دور الجملة الميكانيكية المهتزة :

- الدور الذي يرمز له بـ T و وحدته الثانية هو الزمن اللازم لإنجاز اهتزازة واحدة ، في حالة الإهتزازات الحرة غير المتخامدة يقال عن الدور أنه ذاتي يرمز له بـ T_0 و يعبر عنه بالعلاقة :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

حيث : ω_0 يدعى النبض الذاتي للحركة الاهتزازية ، وحدته rad/s .

• التواتر الذاتي f_0 لحركة جملة ميكانيكية مهتزة :

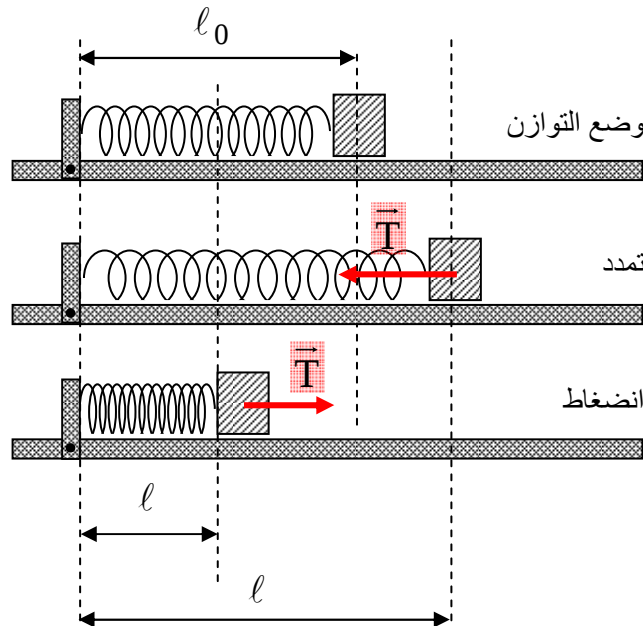
- التواتر الذاتي f_0 لجملة ميكانيكية مهتزة ، هو عدد الاهتزازات المنجزة من طرف هذه الجملة في الثانية الواحدة ، يرمز له بـ f_0 و وحدته الهرتز Hz و يعبر عنه بالعلاقة :

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

2- الإهتزازات الحرة في النواس المرن

• تعريف النواس المرن :

- يتكون النواس المرن من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k متصل من إحدى نهايته بحاجز و النهاية الثانية مرتبطة بجسم صلب (S) كتلة m .
- الشكل التالي يمثل خصائص شدة قوة التوتر $\vec{T}$ المؤثرة على الجسم (S) في الحالتين : النابض متمد و النابض منضغط .



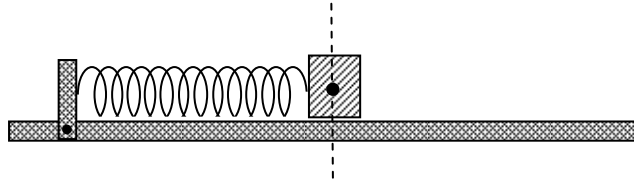
- شدة القوة المرورية (توتر النابض) تتعلق باستطالة النابض المساوية للفرق بين طوله الطبيعي ℓ_0 و طوله ℓ عندما يكون ممتد أو منضغط وفق العلاقة :

$$T = k.\Delta\ell = k(\ell - \ell_0)$$

حيث k هو ثابت مرونة النابض و هو ثابت خاص بالنابض .

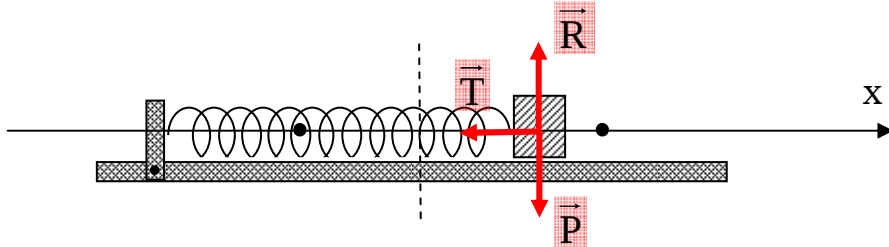
• دراسة حركة نواس مرن أفقي - حالة اهتزازات حرة غير متخامدة :

لدراسة حركة نواس مرن أفقي دون تخامد ، نستعمل نواس مرن يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k و جسم صلب (S) كتلته m ، يتحرك على طاولة هوائية (دون احتكاك) .



نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بسحبه أفقيا بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حر دون سرعة ابتدائية ، نلاحظ أن الجسم (S) يقوم بحركة مهتزة على جانبي وضع توازنه ، و السبب في ذلك يعود إلى القوة $\vec{T}$ التي يطبقها النابض على الجسم (S) ، تحاول هذه القوة في كل لحظة إعادة الجسم إلى وضع توازنه ، فهي قوة أرجاع .

■ المعادلة التفاضلية $x(t)$:



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$-T = ma \rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

بقسمة الطرفين على m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ ، تقبل حل جيبى من الشكل :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- x : مطال الحركة في اللحظة t (الفاصلة) .
- X_0 : المطال الأعظمي أو سعة الحركة و يكون مساوي لنصف طول القطعة المستقيمة التي يتحرك حولها الجسم المهتز .
- ω_0 : نبض الحركة المهتزة .
- φ : الصفحة الابتدائية و تتعلق قيمتها بالشروط الابتدائية .
- نقول عن حركة الجسم (S) أنها حركة اهتزازية جيبية غير متخادمة ، و أي حركة اهتزازية لها نفس شكل المعادلة هي حركة اهتزازية جيبية غير متخادمة .

دور الحركة :

بمطابقة المعادلة التفاضلية المتحصل عليها و المعادلة التفاضلية العامة $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ يكون :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

و حيث أن : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ يكون : $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$ و منه :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

• المعادلة الزمنية $x(t)$ و مخطط الحركة الموافق :

- المعادلة الزمنية للحركة هي من الشكل : $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = + X_0$$

بالتعويض في المعادلة الزمنية :

$$+X_0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos \varphi = +1 \rightarrow \varphi = 0$$

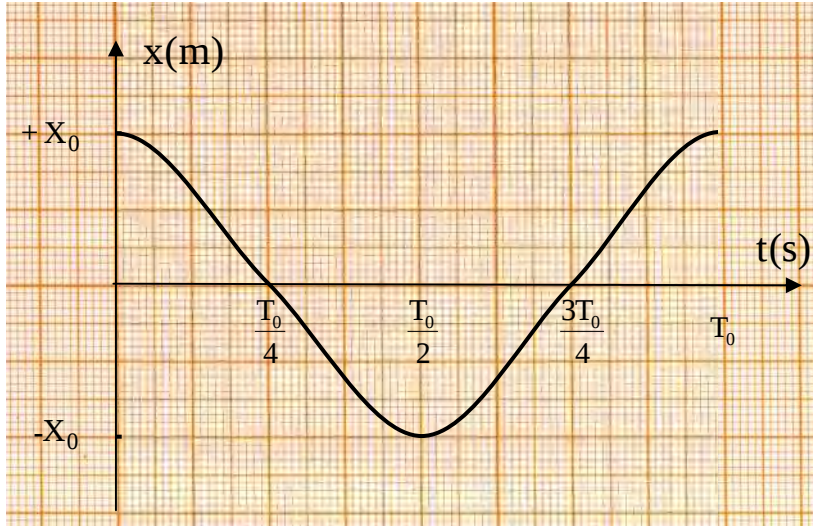
ومنه المعادلة الزمنية تصبح :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t)$$

لرسم المنحنى البياني $x(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم المطال x خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

$t (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x = X_0 \cos(\omega_0 t)$	$+X_0$	0	$-X_0$	0	$+X_0$

و منه يكون المنحنى $x(t)$ كما يلي :



• معادلة السرعة $v(t)$ ومخطط السرعة الموافق :
لدينا :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

مما سبق : $x = X_0 \cos(\omega t)$ و منه يكون :

$$v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$$

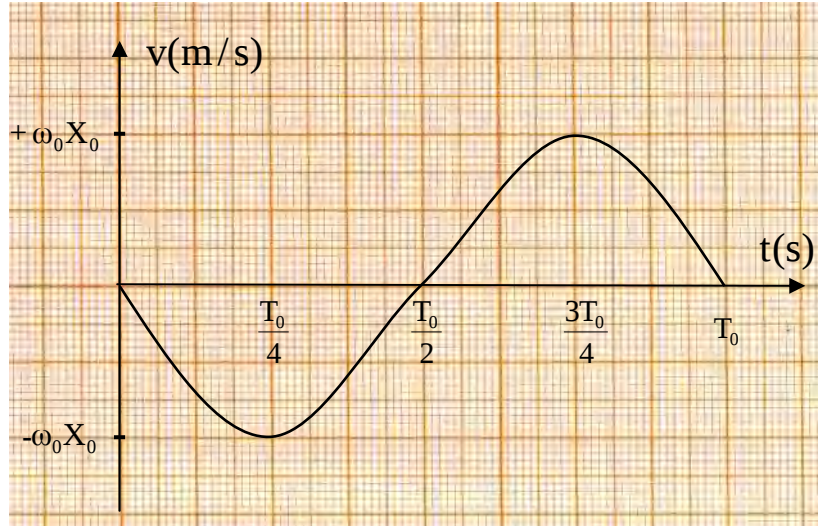
$$v = -v_0 \sin(\omega_0 t)$$

حيث : $v_0 = \omega_0 X_0$ هي السرعة الأعظمية .

بيانيا :

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على معادلة السرعة $v(t)$ السابقة قيم السرعة v خلال اللحظات :كما مبين في الجدول التالي : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$

$t (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$	0	$-\omega_0 X_0$	0	$+\omega_0 X_0$	0

و منه يكون المنحنى $v(t)$ كما يلي :• معادلة التسارع $a(t)$ و مخطط التسارع الموافق :

لدينا :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

مما سبق : $v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$ و منه يكون :

$$a = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$a = -a_0 \cos(\omega_0 t)$$

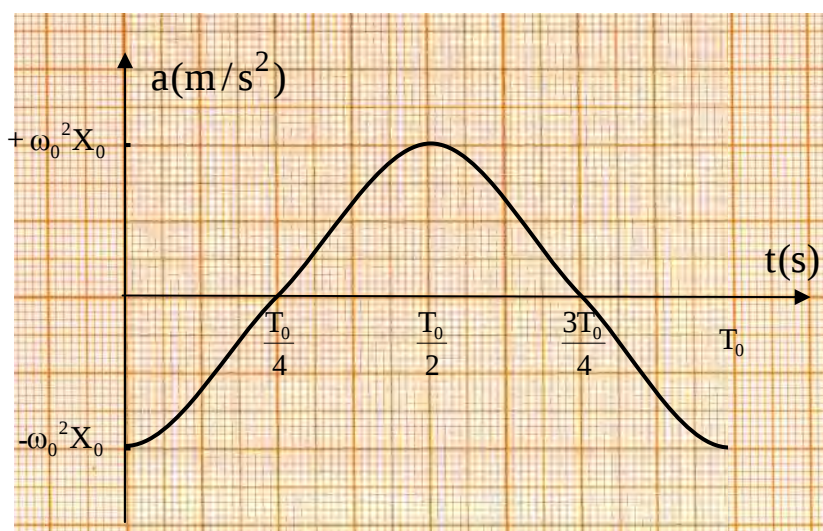
حيث : $a_0 = \omega_0^2 X_0$ هو التسارع الأعظمي .

بيانيا :

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم التسارع a خلال اللحظات : $t = 0$ ،
 $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

$t (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$a = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t)$	$-\omega_0^2 X_0$	0	$+\omega_0^2 X_0$	0	$-\omega_0^2 X_0$

و منه يكون المنحنى $a(t)$ كما يلي :



• معادلة التسارع $a(x)$ و مخطط التسارع الموافق :
 مما سبق لدينا :

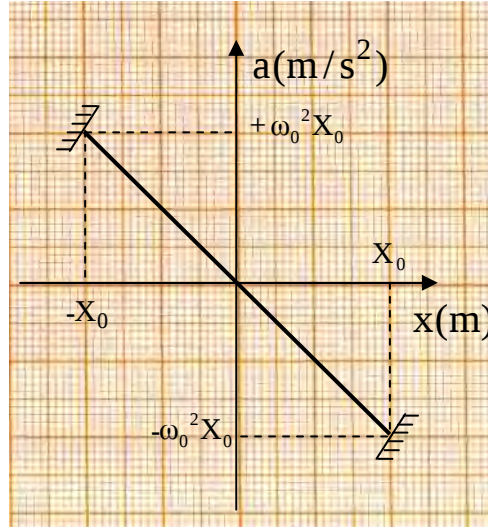
$$a = -\omega_0^2 X_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_x$$

و حيث أن : $x = X_0 \cos(\omega_0 t)$ يمكن كتابة :

$$a = -\omega_0^2 x$$

من هذه المعادلة يتضح ، أن التسارع a يتناسب طرديا مع المطال x ، هذا لا يحدث إلا في الحركة الإهتزازية الجيبية غير المتخامدة .

بيانيا :



• طاقة الجملة (جسم + نابض) :

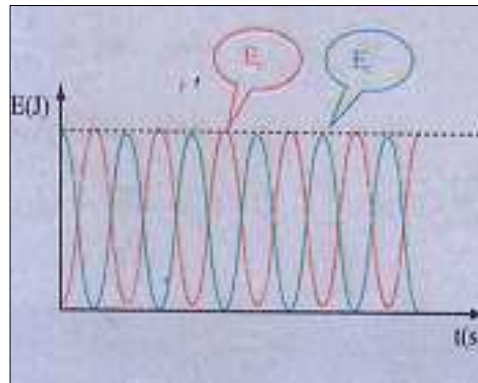
- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عبارتها :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

و نتيجة تشوه النابض ، الجملة (جسم نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة مرونية E_{Pe} عبارتها :

$$E_C = \frac{1}{2} k x^2$$

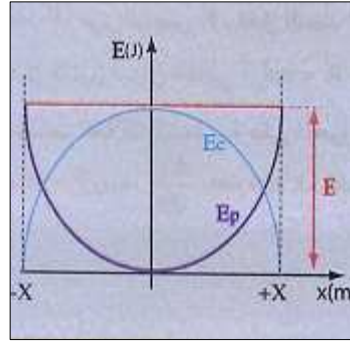
- يمثل الشكل التالي كيف تطور الطاقة الحركية في الحركة الاهتزازية غير المتخامدة (حركة اهتزازية جيبية) .



- تمتلك الجملة (جسم + نابض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية و الكامنة المرونية ، و نكتب :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

- الشكل التالي يمثل تطور الطاقتين الحركية و الكامنة المرونية أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- إذا كانت حركة الجملة غير متخامدة ، نتيجة تغذيتها أو عدم وجود سبب لتناقص الطاقة ، تكون طاقة الجملة ثابتة أثناء الحركة الاهتزازية ، و حيث أن هذه الطاقة التي اكتسبتها عند اللحظة $t = 0$ كانت نتيجة الإستطالة الأعظمية X_0 ، أين تكون الطاقة الكامنة أعظمية و الطاقة الحركية معدومة يمكن كتابة :

$$E = E_{Pe0} = \frac{1}{2} k X_0^2$$

- عند مرور الجسم بوضع التوازن يكون النابض في وضع الراحة ، تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم+نابض) عندئذ معدومة ، كما تكون السرعة أعظمية و عليه فالطاقة الحركية عندئذ أعظمية أيضا ، نكتب إذن :

$$E = E_{C0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

• إثبات أن طاقة الجملة (جسم + أرض) ثابتة عندما تهتز دون تخامد:

كما ذكرنا سابقا طاقة الجملة مساوية لمجموع طاقتها الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} أي :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

وجدنا سابقا :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ومنه :

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2$$

و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi))}_1$$

لدينا : $\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi) = 1$ و منه يصبح لدينا :

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_{C0}$$

إن طاقة الجملة (جسم + أرض) أثناء حركة مهتزة غير متخادمة ثابتة و مساوية للطاقة الحركية الأعظمية .

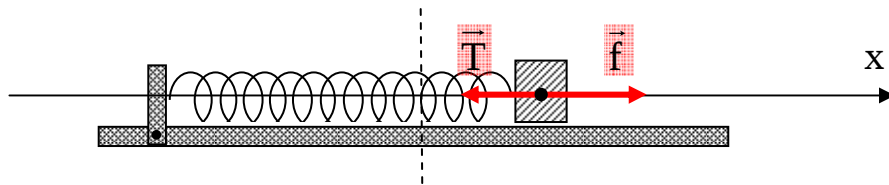
- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ، أن طاقة الجملة (جسم + أرض) أثناء حركة مهتزة غير متخادمة ثابتة و مساوية للطاقة الكامنة الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

$$E = \frac{1}{2} k X_0^2 = E_{Pe0}$$

• دراسة حركة نواس مرن أفقي - حالة اهتزازات حرة متخادمة :

- لدراسة حركة نواس مرن أفقي في حالة ، نستعمل نواس مرن يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k و جسم صلب (S) كتلته m ، يتحرك على طاولة في وجود قوة احتكاك ثابتة $\vec{f}$.
- نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بسحبه أفقيا بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حر دون سرعة ابتدائية .

■ المعادلة التفاضلية $x(t)$:



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$-T + f = ma \rightarrow -kx + f = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + f = 0$$

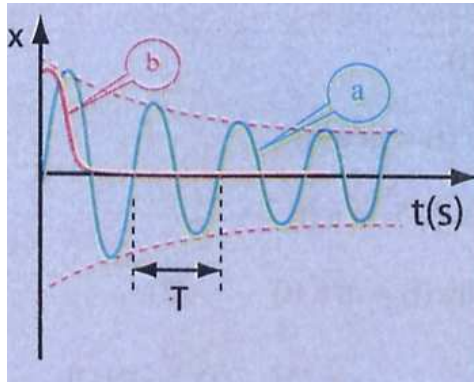
بقسمة الطرفين على m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{f}{m} = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، حلها خارج البرنامج .

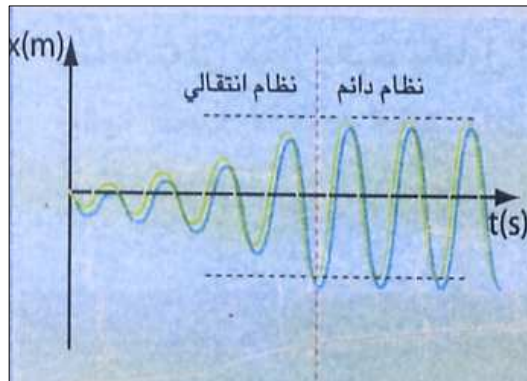
■ تأثير الاحتكاكات في سعة الاهتزاز:

- يزداد تخامد الاهتزازات كلما تزايدت فعالية الاحتكاكات .
- إذا كانت الاحتكاكات ضعيفة فإن تناقص سعة الاهتزازات تكون تدريجية خلال الزمن حتى تنعدم ، و يكون التخامد شبه دوري و قيمة شبه دوره هو T (المنحنى a) .
- إذا كانت الاحتكاكات فعالة جدا ، الجملة لا تهتز و نقول عن النظام إنه لا دوري حرج (المنحنى b) .



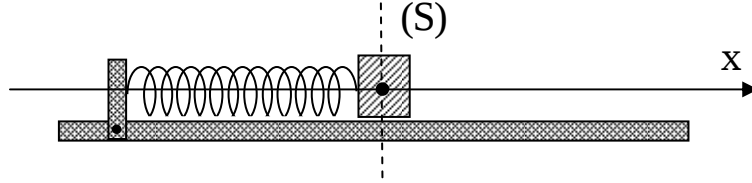
• تغذية الاهتزازات الميكانيكية :

- لا تخلو حركة أي مهتز ميكانيكي حقيقي من تخامد يؤدي إلى تناقص في سعة الاهتزازات ، و للحفاظ على سعة ثابتة للاهتزازات يجب أن نعوض باستمرار الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاك ، يتم ذلك بواسطة أجهزة خاصة ، مثل إضافة ثقل موازن لساعة الحائط ، أو نابض حلزوني كما في ساعات اليد الكلاسيكية .
- إن تغذية الاهتزازات الميكانيكية تتم بتطبيق قوة على الجسم المهتز (S) لا تؤثر على سعة الاهتزازات و إنما تعوض بشكل مستمر كل الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاكات ، بحيث تصبح سعة الاهتزاز ثابتة ، ففي النواس المرن الأفقي تصبح المعادلة التفاضلية من الشكل التالي :



التمرين (1) : (التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)

لدينا نابض مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرونته $k = 10 \text{ N/m}$ ، يثبت أحد طرفيه إلى نقطة في جدار شاقولي ، و بطرفه الآخر يثبت جسم صلب (S) كتلته 1 kg يستطيع أن يتحرك دون احتكاك على مستوي أفقي مزود بمحور xx' مبدأه (O) ينطبق على وضع توازن (S). نزيح الجسم (S) أفقيا بمقدار 2 cm ثم نتركه لحاله عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية.



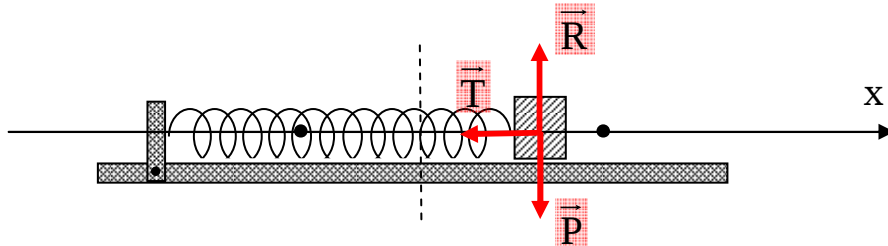
- 1- مثل القوى المؤثرة على الجسم (S) عند اللحظة $t = 0$.
- 2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة المطال $x(t)$ ، استنتج طبيعة حركة الجسم (S) مبينا عبارة دورها الذاتي T_0 ، بين بالتحليل البعدي أن الدور يقدر بالثانية .
- 3- بين أن قيمة الدور الذاتي للحركة الاهتزازية هي $T_0 = 2\text{s}$ ، ثم أحسب قيمة النبض الذاتي ω_0 للحركة ، و تواترها الذاتي f_0 .
- 4- أثبت أن حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- 5- أكتب المعادلات الزمنية للحركة $x(t)$ ، $v(t)$ ، $a(t)$ ثم أرسم بشكل كيفي المنحنى $x(t)$.
- 6- أحسب سرعة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن .
- 7- أحسب قيمة توتر النابض عند اللحظة $t = 0$.
- 8- بين أن طاقة الجملة (جسم + نابض) محفوظة و احسب قيمتها .
- 9- في الحقيقة الاحتكاكات غير مهمة ، حيث الجسم (S) يخضع أثناء حركته لقوة احتكاك فتصبح المعادلة التفاضلية للحركة من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0$$

ناقش حسب قيم قوة الاحتكاك النظام الذي تكون عليه حركة (S) ، ثم مثل عندئذ تغيرات المطال x بدلالة الزمن الموافق لكل حالة .
نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- تمثيل القوى المؤثرة :



2- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور OX :

$$-T = ma \rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبى من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

- عبارة الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

لدينا $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ و منه :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

• إثبات أن الدور يقدر بالثانية بالتحليل البعدي :
مما سبق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{k}$$

بالتحليل البعدي يكون :

$$[T_0]^2 = \frac{[m]}{[k]}$$

$$\bullet P = mg \rightarrow [F] = [m][g] \rightarrow [m] = \frac{[F]}{[g]}$$

$$\bullet t = kx \rightarrow [F] = [k][X] \rightarrow [k] = \frac{[F]}{[X]}$$

يصبح لدينا :

$$[T_0]^2 = \frac{\frac{[F]}{[g]}}{\frac{[F]}{[X]}} \rightarrow [T_0]^2 = \frac{[F][X]}{[g][F]} \rightarrow [T_0]^2 = \frac{[X]}{[g]}$$

$$[T_0]^2 = \frac{m}{\frac{m}{s^2}} = m \frac{s^2}{m} \rightarrow [T_0]^2 = s^2 \rightarrow [T_0] = s$$

إذن دور الحركة الاهتزازية يقدر بالثانية .

3- قيمة f_0 ، ω_0 ، T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 2 \text{ s}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

4- أثبات أن حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$:
- وجدنا سابقا المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

لدينا :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

و حيث أن : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ يصبح :

$$-\frac{k}{m} X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

إذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

5- المعادلات الزمنية :

• المعادلة $x(t)$:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = X_0$$

بالتعويض :

$$X_0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos \varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t)$$

• المعادلتين $v(t)$ ، $a(t)$:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t)) \rightarrow v = -2\pi \cdot 10^{-2} \sin(\pi t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-2\pi \cdot 10^{-2} \sin(\pi t)) \rightarrow a = -2\pi^2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t)$$

- مخطط الحركة :

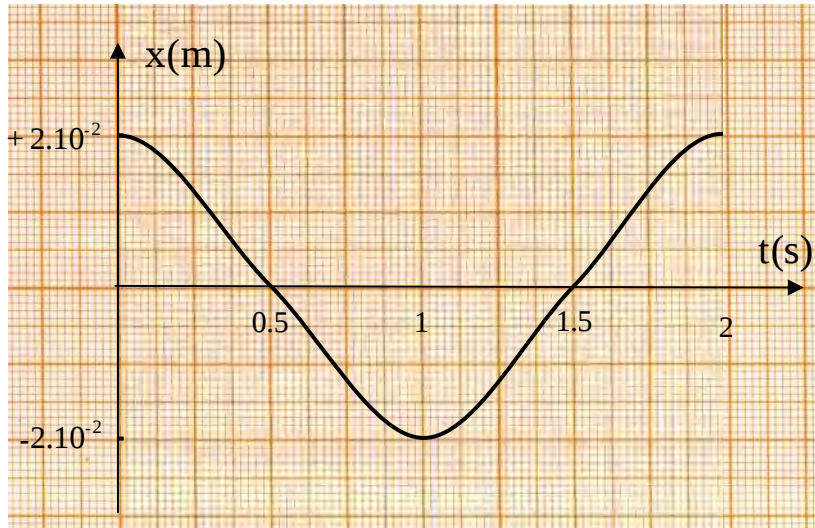
لرسم المنحنى البياني $x(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم المطال x خلال اللحظات : $t = 0$ ،

$$t = \frac{T}{4} = 0.5s \quad , \quad t = \frac{T}{2} = 1s \quad , \quad t = \frac{3T}{4} = 1.5s \quad , \quad t = T = 2s$$

كما مبين في الجدول التالي :

t (s)	0	0.5	1	1.5	2
$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t)$	$+ 2 \cdot 10^{-2}$	0	$- 2 \cdot 10^{-2}$	0	$+ 2 \cdot 10^{-2}$

و منه يكون المنحنى $x(t)$ كما يلي :



6- سرعة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن :
عند المرور بوضع التوازن تكون سرعة مركز عطالة (S) أعظمية :

$$v = v_0 = \omega_0 X_0$$

$$v = \pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 6.28 \cdot 10^{-2} \text{ ms}$$

7- توتر النابض عند اللحظة $t = 0$:
في هذه اللحظة يكون (S) في المطال الأعظمي و عليه :

$$T = k X_0$$

$$T = 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0.2 \text{ N}$$

8- اثبات أن طاقة الجملة (جسم (S) + نابض) محفوظة :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k x^2$$

وجدنا سابقا :

$$\begin{aligned} \bullet x &= X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \bullet v &= -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

ومنه :

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m \omega_0^2$$

و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))}_1$$

لدينا : $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ و منه يصبح لدينا :

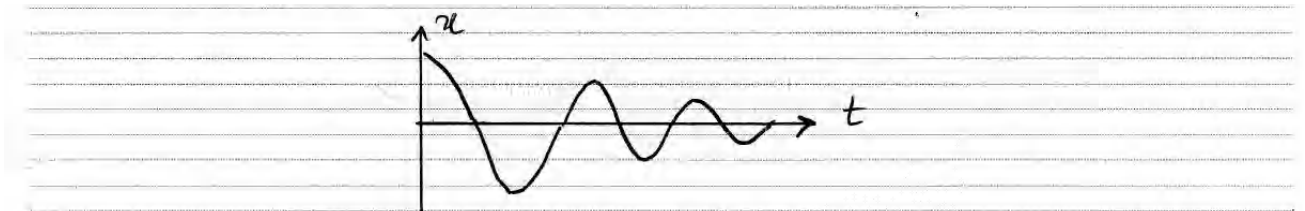
$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_{C0}$$

- قيمة طاقة الجملة :

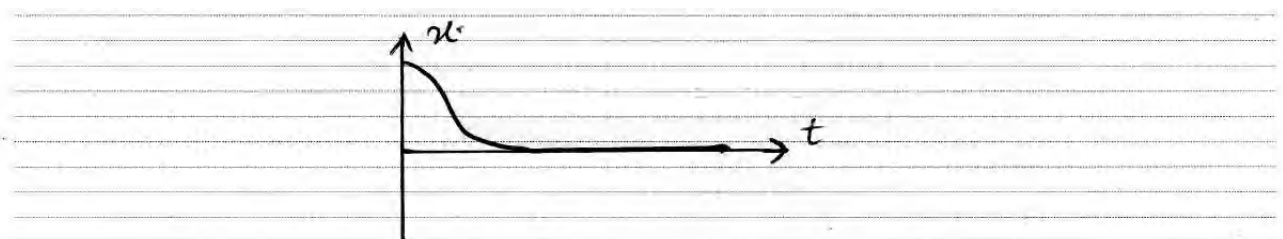
$$\begin{aligned} \bullet E &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 (\pi)^2 (2 \cdot 10^{-2})^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J} \\ \bullet E &= \frac{1}{2} k X_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 (2 \cdot 10^{-2})^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

9- مناقشة طبيعة النظام :

- في حالة احتكاكات ضعيفة يكون النظام دوري غير متخامد .

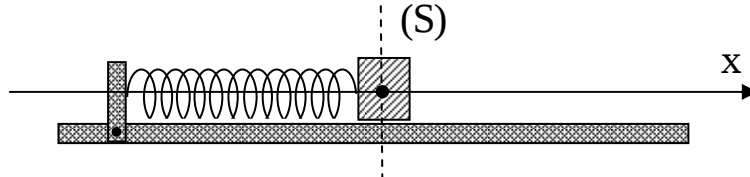


- في حالة احتكاكات معتبرة يكون النظام لا دوري حرج .



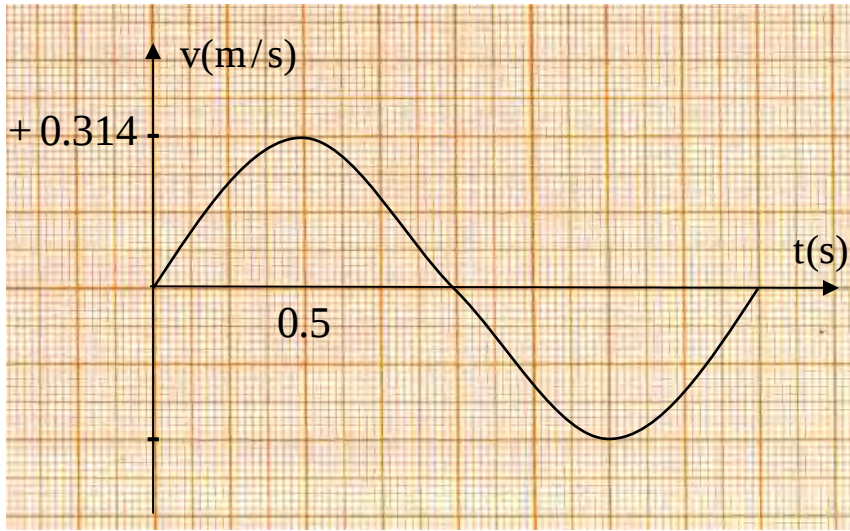
التمرين (2) : (التمرين : 002 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يتألف نواس مرن أفقي من نابض ثابت مرونته k حلقاته غير متلاصقة مهمل الكتلة و جسم صلب (S) كتلته $m = 2\text{kg}$.



نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ، نلاحظ أن الجسم يأخذ حركة اهتزازية حول موضع توازنه دون تخادم .

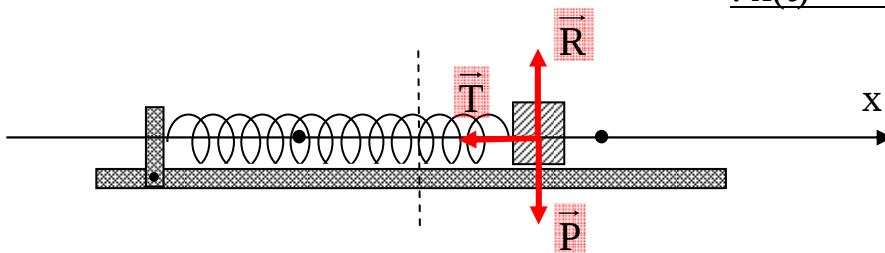
- 1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم S) ، اكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$ ثم استنتج طبيعة حركة الجسم (S) .
- 2- البيان التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن .



- اعتمادا على البيان حدد :
- سعة الحركة X_0 :
- دور الحركة الذاتي T_0 و نبضها الذاتي ω_0 .
- المطال الأعظمي X_0 للحركة الاهتزازية .
- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.
- احسب الطاقة الحركية للجسم (S) عند المرور بوضع التوازن .
- استنتج قيمة الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$.
- أوجد بطريقتين مختلفتين ثابت مرونة النابض k . نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$:



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور OX :

$$-T = ma \rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

2- دور الحركة الذاتي T_0 و نبضها الذاتي ω_0 :

من البيان :

$$T_0 = 4 \cdot 0.5 \rightarrow T_0 = 2 \text{ s}$$

- النبض الذاتي ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} \rightarrow \omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

■ المطال الأعظمي X_0 للحركة الاهتزازية :

من البيان $v_0 = 0.314 \text{ s}$ و لدينا :

$$v_0 = \omega_0 X_0 \rightarrow X_0 = \frac{v_0}{\omega_0} \rightarrow X_0 = \frac{0.314}{\pi} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

3- المعادلة الزمنية للحركة :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

اعتمادا على ما سبق نكتب :

$$x = 0.1 \cos(\pi t + \varphi)$$

اعتمادا على البيان :

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow v = 0 \\ t > 0 \rightarrow v > 0 \quad (t < \frac{T_0}{4}) \end{cases}$$

هذا يتحقق عندما يكون $x = -X_0$ أي :

$$t = 0 \rightarrow x = -X_0$$

بالتعويض في المعادلة الزمنية :

$$-X_0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = -1 \rightarrow \varphi = \pi$$

و منه المعادلة الزمنية $x(t)$ للحركة يكون كما يلي :

$$x = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$$

■ الطاقة الحركية للجسم (S) عند المرور بوضع التوازن :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

عند المرور بوضع التوازن تكون الطاقة الحركية أعظمية كون أن الطاقة الكامنة المرونية معدومة نتيجة وجود النابض في حالة راحة أي :

$$E_{(C)} = E_{(C)0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2X_0^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot (0.1)^2 = 0.1 \text{ J}$$

■ الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}m x^2$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون المطال أعظمي ($x = X_0$) و بالتالي تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض) أعظمية كون أن الطاقة الحركية معدومة نتيجة السرعة المعدومة و عليه :

$$E_{pe} = E_{pe0}$$

- حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة و بالتالي تكون طاقة الجسم (جسم + نابض) محفوظة ، بمعنى أن طاقة الجملة (جسم + نابض) عند اللحظة $t = 0$ أين $E_C = 0$ مساوية لطاقة نفس الجملة عند مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن أين $E_{pe} = 0$ ، نستنتج من ذلك أن الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$ تكون مساوية للطاقة الحركية عند المرور بوضع التوازن ، لذا يكون :

$$E_{pe} = E_{pe0} = E_{C0} = 0.1 \text{ J}$$

■ ثابت مرونة النابض k :
الطريقة الأولى :

$$E_{pe0} = \frac{1}{2}kX_0^2 \rightarrow k = \frac{2E_{pe0}}{X_0^2} \rightarrow k = \frac{2 \cdot 0.1}{(0.1)^2} = 20 \text{ N/m}$$

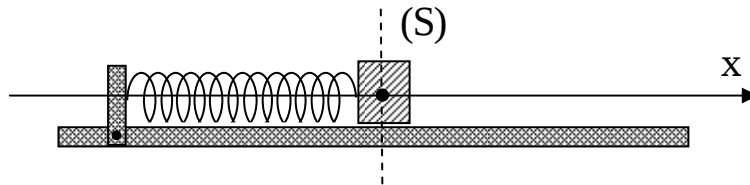
الطريقة الثانية :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2$$

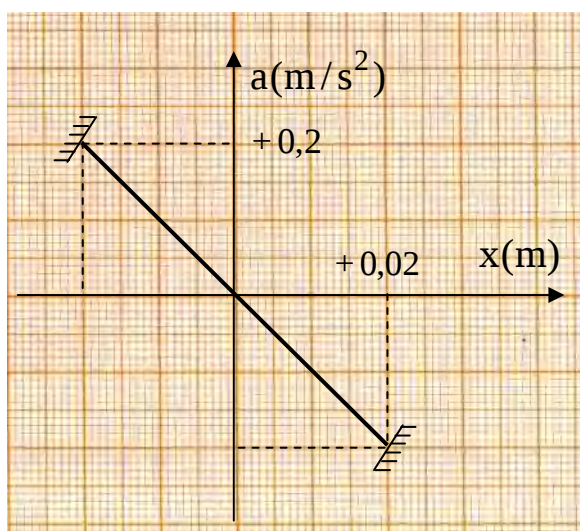
$$k = 2(\pi)^2 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ N/m}$$

التمرين (3) : (التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نواس مرّن أفقي ، يتكون من نابض مرّن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ، ثابت مرونته k ، متصل من إحدى طرفيه بجسم صلب (S) كتلته m ، نزيح الجسم (S) أفقياً بمقدار X_0 ثم نتركه حراً لحاله دون سرعة ابتدائية ، نعتبر مبدأ المطال عندما يكون الجسم (S) عند وضع التوازن .



- المخطط البياني التالي يمثل تطور تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة مطال الحركة x .
- اعتماد على البيان :



- 1- استنتج طبيعة الحركة .
- 2- أوجد العبارة النظرية التي تعبر عن التسارع $a(t)$ بدلالة المطال $x(t)$.
- 3- أحسب :
أ- النبض الذاتي للحركة ω_0 ، الدور الذاتي T_0 ، التواتر الذاتي f_0 .
ب- سعة الحركة بطريقتين مختلفتين .
- 4- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ باعتبار مبدأ الأزمنة عند مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن في الاتجاه السالب .
يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

- 1- استنتج طبيعة الحركة :
المنحنى $a(t)$ عبارة عن مستقيم ميله سالب يمر من المبدأ معادلته من الشكل $a = \alpha x$ ، هذا يعني أن تسارع مركز عطالة (S) يتناسب طرديا مع المطال و يعاكسه في الإشارة . نستنتج أن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخادمة .
- 2- العبارة النظرية التي تعبر عن التسارع $a(t)$ بدلالة المطال $x(t)$:
بما أن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخادمة تكون المعادلة الزمنية للحركة من الشكل :

$$\begin{aligned} x &= X_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ v &= \frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a &= \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

و حيث أن : $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ يصبح :

$$a = -\omega_0^2 x$$

أ- النبض الذاتي للحركة ω_0 :
- بيانها :

$$a = \alpha x \quad \dots\dots\dots (1)$$

حيث α هو ميل المستقيم .
- نظريا و مما سبق :

$$a = -\omega_0^2 x \quad \dots\dots\dots (2)$$

بالمطابقة :

$$-\omega_0^2 = \alpha \rightarrow \omega_0 = \sqrt{-\alpha}$$

من البيان :

$$\alpha = -\frac{0.2}{0.02} = -10 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{-(-10)} = \sqrt{\pi^2} = \pi \text{ rad/s}$$

- الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

ب- سعة الحركة :

الطريقة الأولى :

 X_0 هو أعظم قيمة للمطال ومن البيان يكون :

$$X_0 = 0.02 \text{ m}$$

الطريقة الثانية :

من البيان :

$$a_0 = 0.2 \text{ m/s}^2$$

و لدينا :

$$a_{0x} = \omega_0^2 X_0 \rightarrow X_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2} \rightarrow X_0 = \frac{0.2}{\pi^2} = \frac{0.2}{10} = 0.02 \text{ m}$$

3- المعادلة الزمنية للحركة :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\bullet X_0 = 0.02 \text{ m}$$

$$\bullet \omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

$$\bullet t = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (وضع التوازن) , } v > 0$$

بالتعويض في المعادلة $x(t)$:

$$0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} , \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا :

$$v = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin \varphi$$

$$\bullet \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 < 0 \text{ (مقبول)}$$

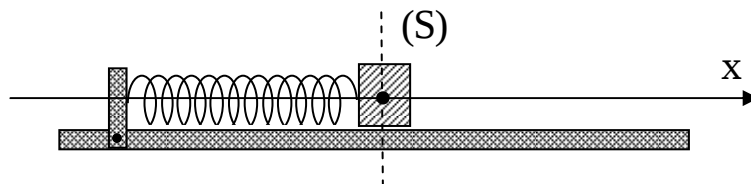
$$\bullet \varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0(-1) = v_0 > 0 \text{ (مرفوض)}$$

إذن المعادلة الزمنية $x(t)$ تكون كما يلي :

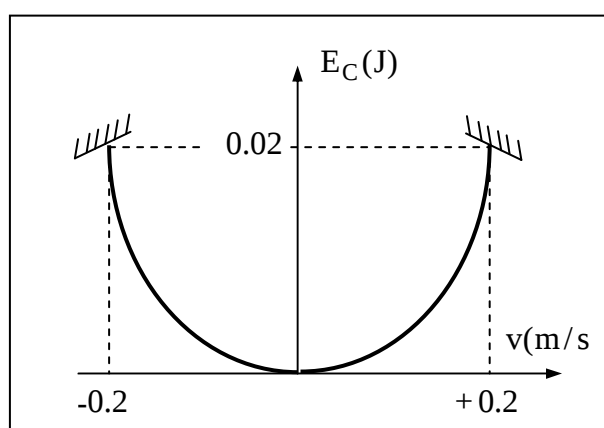
$$x = 0.02 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

التمرين (4) : (التمرين : 004 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- نابض مرن كتلته مهملة و حلقاته غير متلاصقة ، ثابت مرونته K ، نثبت إحدى نهايتيه بنقطة (o) ، و يثبت بنهايته الأخرى جسم صلب (S) كتلته m ، يمكنه الإنزلاق أفقيا دون احتكاك (الشكل) ، نعتبر مبدأ الفواصل عند وضع التوازن .



- حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامة ، قسنا زمن 15 اهتزازة فوجدنا $\Delta t = 9.42 \text{ s}$. يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الحركية للجسم (S) بدلالة سرعة مركز عطالة الجسم (S) .



- 1- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + نابض) أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$.
- 2- عرف الدور الذاتي للحركة ثم أحسب قيمته T_0 و كذا النبض الذاتي للحركة ω_0 .
- 3- استنتج من هذا البيان :
أ- سرعة مركز عطالة الجسم (ص) عند المرور بوضع التوازن .
ب- سعة الحركة X_0 .
ج- كتلة الجسم (S) .
د- ثابت مرونة النابض K .
- 4- أرسم على نفس البيان السابق المنحنيين $E(v)$ ، $E_{pe}(v)$ ، حيث E_{pe} الطاقة الكامنة المرونية و E طاقة الجملة الكلية $(E = E_C + E_{pe})$.

الأجوبة :

- 1- المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$:
الجملة المدروسة : (جسم (S) + نابض) .
مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة بين الموضع M_0 و موضع كفي M يكون عنده المطال $x(t)$.

$$E_0 + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E(t)$$

$$E_{C0} + E_{pe0} = E_{C(t)} + E_{pe(t)}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_{(t)}^2 + \frac{1}{2}kx_{(t)}^2$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$0 = \frac{1}{2} m \left(2 \frac{dv(t)}{dt} \cdot v(t) + \frac{1}{2} k \left(2 \frac{dx(t)}{dt} \cdot x(t) \right) \right) \rightarrow m \frac{dv(t)}{dt} \cdot v(t) + k \frac{dx(t)}{dt} \cdot x(t) = 0$$

و حيث أن : $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$ ، $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ يصبح :

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot v(t) + k \cdot v(t) \cdot x(t) = 0 \rightarrow v(t) \left(m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) \right) = 0$$

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = 0 \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

2- تعريف الدور الذاتي للحركة الاهتزازية الجيبية غير المتخامدة :

هو الزمن اللازم لانجاز اهتزازة واحد .

قيمه :

حسب التعريف و باستعمال القاعدة الثلاثية نجد :

$$\begin{cases} 15 \text{ اهتزازة} \rightarrow 9.42 \text{ s} \\ 1 \text{ اهتزازة} \rightarrow T_0 \text{ s} \end{cases}$$

و منه :

$$T_0 = \frac{9.42 \cdot 1}{15} = 0.628 \text{ s}$$

- النبض الذاتي للحركة ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{0.628} = 10 \text{ rad/s}$$

3- أ- سرعة مركز عطالة الجسم (ص) عند المرور بوضع التوازن :

عند المرور بوضع التوازن تكون السرعة أعظمية و عليه يكون من البيان :

$$v = v_0 = 0.2 \text{ m/s}$$

ب- سعة الحركة X_0 :

$$v_0 = \omega_0 X_0 \rightarrow X_0 = \frac{v_0}{\omega_0} \rightarrow X_0 = \frac{0.2}{10} = 0.02 \text{ m}$$

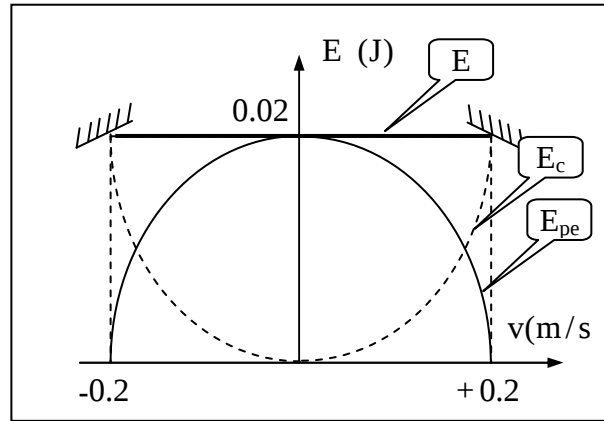
ج- كتلة الجسم (S) :

من البيان : $E_{C0} = 0.02 \text{ J}$ ، $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$ و لدينا :

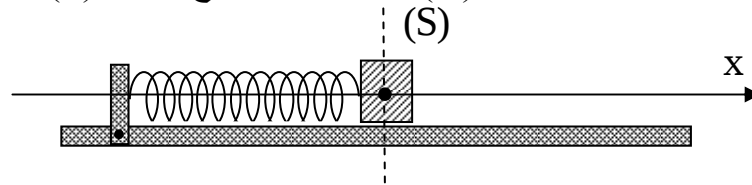
$$E_{C0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow m = \frac{2E_{C0}}{v_0^2} \rightarrow m = \frac{2 \cdot 0.02}{(0.2)^2} = 1 \text{ kg}$$

د- ثابت مرونة النابض K :

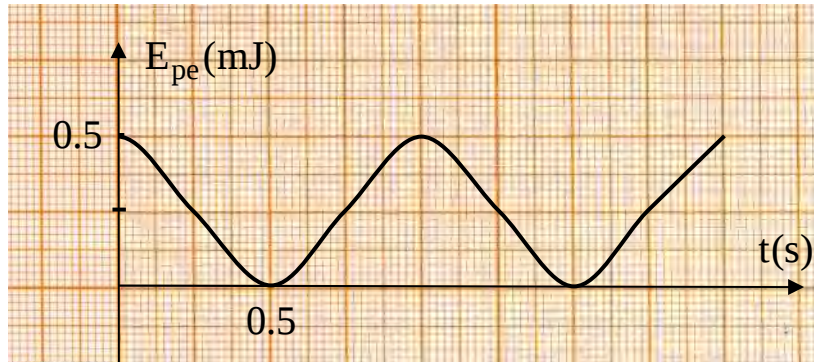
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m \rightarrow k = (10)^2 \cdot 1 = 100 \text{ N/m}$$

4- المنحنيين $E(v)$ ، $E_{pe}(v)$:**التمرين (5) :** (التمرين : 005 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يتألف نواس مرن أفقي من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و جسم صلب (S) كتلته $m = 1 \text{ kg}$ ، نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حرا لحاله دون سرعة ابتدائية ، فيتحرك دون احتكاك على مستوي أفقي مزود بمحور xx' مبدأه (O) ينطبق على وضع توازن (S) .



يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الكامنة المرونية للجسم (S + نابض) بدلالة الزمن .



- 1- اعتمادا على هذا البيان أحسب : الدور الذاتي للحركة T_0 ، النبض الذاتي للحركة ω_0 ، ثابت مرونة النابض K ، سعة الحركة X_0 .
- 2- أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ المميزة للحركة .
- 3- أرسم على نفس البيان السابق المنحنيين $E_c(t)$ ، $E(t)$ ، حيث E_c الطاقة الحركية و E طاقة الجسم الكلية $(E = E_c + E_{pe})$.
نعتبر : $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :**1- الدور الذاتي T_0 للحركة :**

تتغير قيمة الطاقة الكامنة من قيمة أعظمية (عند المطال الأعظمي) إلى قيمة معدومة (عند وضع التوازن) خلال ربع دور $\frac{T_0}{4}$ و عليه يكون من البيان :

$$\frac{T_0}{4} = 0.5 \text{ s} \rightarrow T_0 = 2 \text{ s}$$

- النبض الذاتي ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

- ثابت مرونة النابض k :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m \rightarrow k = \pi^2 \cdot 1 = 10 \text{ N/m}$$

- سعة الحركة X_0 :

من البيان $E_{pe0} = 0.5 \text{ mJ}$ و لدينا :

$$E_{pe0} = \frac{1}{2} k X_0^2 \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{2E_{pe0}}{k}} \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{10}} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

2- المعادلة الزمنية $x(t)$:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

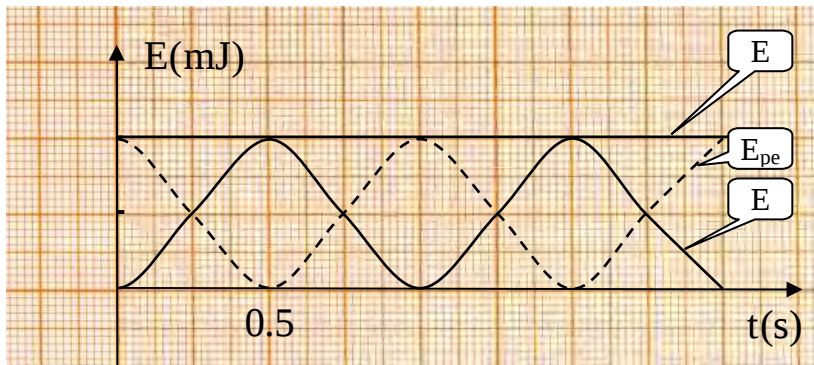
$$\bullet X_0 = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\bullet \omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

$$\bullet t = 0 \rightarrow x = X_0 \rightarrow \varphi = 0$$

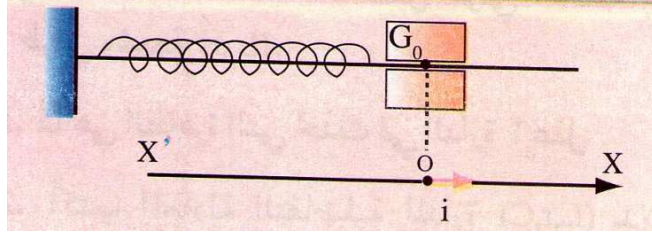
$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t)$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

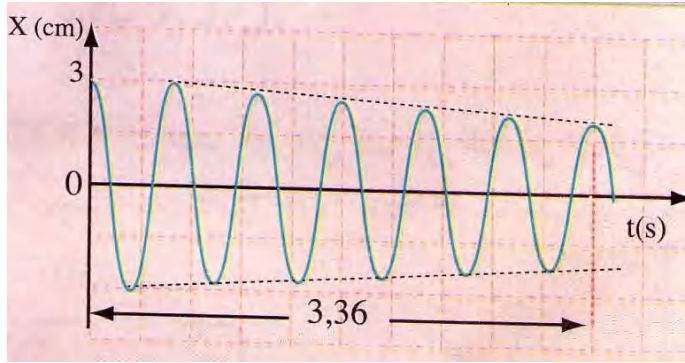
3- المنحنيين $E(v)$ ، $E_c(v)$:

التمرين (6) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نواس مرّن أفقي يتكون من جسم صلب (S) كتلته $m = 100 \text{ g}$ و نابض مرّن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرونته $k = 13 \text{ N/kg}$ ، الجسم (S) بإمكانه الحركة على ساق أفقية كما مبين في الشكل التالي :



عند اللحظة $t = 0$ يكون الجسم (S) متوازنا و يكون مركز عطالته G منطبق على مبدأ الفواصل O ، عند اللحظة t يمر مركز العطالة G من نقطة مطالها x بسرعة v .
بواسطة تجهيز مناسب تمكنا من متابعة تغيرات المطال x بدلالة الزمن t فتحصلنا على البيان التالي :



- 1- ما هو نمط الاهتزازات ؟
- 2- أحسب قيمة شبه الدور T للإهتزازات ؟
- 3- أكتب عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) بدلالة m ، k ، x ، v .
- 4- حدد من البيان قيم المطال x عند اللحظات : $t_0 = 0$ ، $t_1 = T$ ، $t_2 = 5T$ ثم أحسب طاقة الجملة في هذه اللحظات مع الشرح .
- 5- قارن بين القيم المتحصل عليها ، ما هو سبب التغير في طاقة الجملة ؟

الأجوبة :

- 1- نمط الاهتزازات حرة متخامدة .
- 2- قيمة شبه الدور T :
من البيان :

$$6 T = 3.36 \text{ s} \rightarrow T = \frac{3.36}{6} = 0.56 \text{ s}$$

- 3- عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) بدلالة m ، k ، x ، v :

تمتلك الجملة (جسم + نابض) في لحظة t من اهتزازاتها طاقة حركية $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة مرونية

$E_{Pe} = \frac{1}{2}k.x^2$ ، فإذا اعتبرنا وضع الجملة في حالة التوازن مرجعا لحساب الطاقة الكامنة المرونية ، أين يصبح

المطال x مساوي لاستطالة النابض ، تكون عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) كما يلي :

$$E = E_C + E_{Pe} \rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

4- قيمة المطال و الطاقة عند اللحظات $t = 0$ ، $t = T$ ، $t = 5T$:
من البيان :

$$\bullet t = 0 \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$\bullet t = T \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$\bullet t = 5T \rightarrow x = 2.25 \text{ cm}$$

- في اللحظات $t = 0$ ، T ، $5T$ يكون المطال أعظمي و عليه في هذه اللحظات تكون الطاقة الكامنة المرونية أعظمية في حين تكون الطاقة الحركية معدومة ، و منه تصبح عبارة طاقة الجملة في اللحظات المذكورة كما يلي :

$$\bullet t = 0 \rightarrow x = 3 \text{ cm} \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 5.85 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\bullet t = T \rightarrow x = 3 \text{ cm} \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 5.85 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\bullet t = 5T \rightarrow x = 2.25 \text{ cm} \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (2.25 \cdot 10^{-2})^2 = 3.29 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

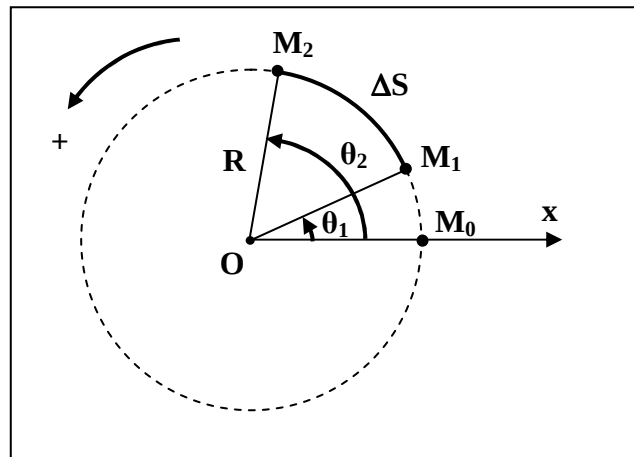
5- المقارنة بين الطاقات :

نلاحظ أن طاقة الجملة تتناقص بمرور الزمن ، السبب في ذلك يعود إلى الاحتكاك الموجود بين الجسم الصلب (S) و الساق .

3- الإهتزازات الحرة في النواس الثقلي

• الفاصلة المنحنية و السرعة (تذكير) :

- نعتبر جسم نقطي (أبعاده مهملة) ينتقل على مسار دائري نصف قطره R و مركزه O مارًا بالمواضع M_1 ، M_2 ، عند اللحظات t_1 ، t_2 ، (الشكل)



- الفاصلة المنحنية التي نرمز لها بـ s و تقدر بالمتر (m) هي المسافة المنحنية (على المحيط) بين الموضع M_i و موضع M_0 نعتبره مبدأ للفواصل المنحنية .

- الفاصلة الزاوية التي نرمز لها بـ θ و تقدر بالراديان (rad) هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر (OM_i) المار من الموضع M_i مع نصف القطر (OM_0) المار من O و الذي يعتبر مبدأ للفواصل الزاوية .

- يعبر عن الفاصلة الزاوية θ بدلالة الفاصلة المنحنية s بالعلاقة :

$$\theta = \frac{s}{R} \leftrightarrow s = R \theta$$

• السرعة الخطية والزاوية :

- السرعة اللحظية v لمتحرك (S) عند لحظة v و وحدتها المتر/الثانية (m/s) هي مشتقة الفاضلة الخطية s أي :

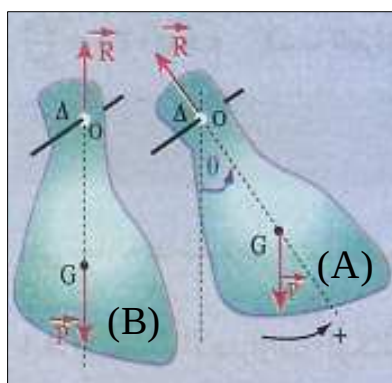
$$v = \frac{ds}{dt}$$

و حيث أن : $s = R \cdot \theta$ فإنه يمكن كتابة عبارة السرعة اللحظية كما يلي :

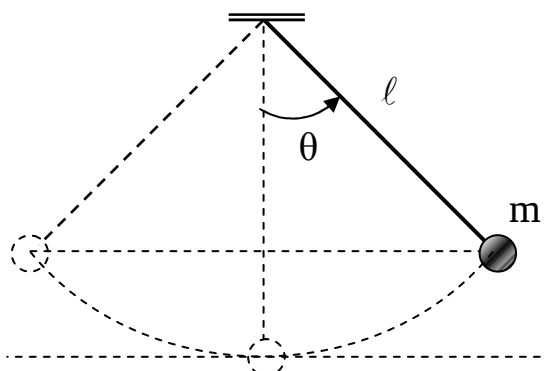
$$v = R \frac{d\theta}{dt}$$

• تعريف النواس الثقالي :

- النواس الثقالي هو كل جسم بإمكانه الاهتزاز حول محور أفقي (Δ) ثابت و لا يمر من مركز عطالته (الشكل-A) .
- يكون النواس الثقالي في حالة توازن مستقر عندما يقع G مركز عطالة الجسم تحت و على شاقول النقطة O (نقطة تعليق النواس) (الشكل-B) .



- ينجز النواس الثقالي اهتزازة واحدة عندما يمر مركز عطالته من نقطة ما من مساره مرورين متعاقبين بنفس الاتجاه بالنسبة لوضع التوازن .
- كحالة خاصة من النواس الثقالي ، نذكر النواس البسيط التي يتألف من خيط طويل غير قابل للامتطاط و مهمل الكتلة ، معلق بنهايته الحرة بجسم صلب نقطي (أبعاده مهملة بالنسبة لطول الخيط) .



• دراسة حركة نواس بسيط - حالة اهتزازات حرة غير متخامدة (خاص بالشعب الرياضية) :

• طاقة الجملة (جسم + أرض) :

- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + أرض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عبارتها :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

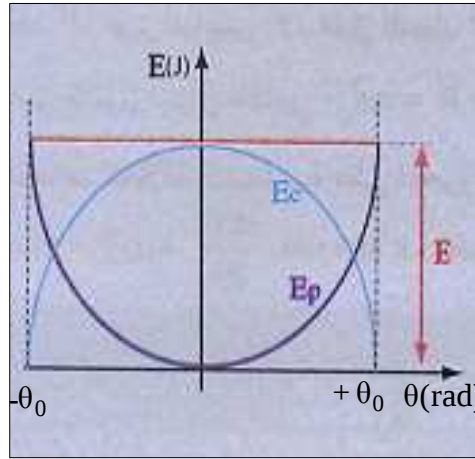
و نتيجة وجود الجسم (S) على ارتفاع h من سطح الأرض ، الجملة (جسم + أرض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة ثقالية E_{Pe} عبارتها :

$$E_C = mgz$$

حيث z هو ارتفاع الجسم (S) بالنسبة للمستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .
- تمتلك الجملة (جسم + أرض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية و الكامنة المرونية ، و نكتب :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

- الشكل التالي يمثل تطور الطاقتين الحركية و الكامنة الثقالية أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



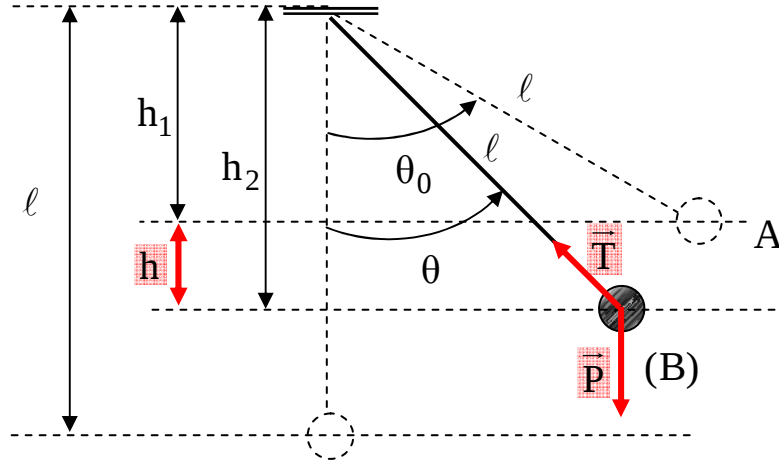
■ المعادلة التفاضلية $\theta(t)$:

لدراسة حركة نواس ثقالي بسيط ، نستعمل نواس مرن يتكون من خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط طوله ℓ ، مرتبط بطرف الحر بجسم صلب نقطي (S) كتلته m .
- نزيح النواس الثقالي البسيط بزاوية θ_0 ، ثم نتركه حرا لحاله دون سرعة ابتدائية .
■ نذكر مسبقا بخاصية المشتقة التالية :

$$(f^n)' = n f' f^{n-1} \rightarrow \frac{d(f^n)}{dx} = 2n \cdot \frac{df}{dx} \cdot f^{n-1} .$$

مثلا :

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2 \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v$$



- الجملة المدروسة : (كرية + أرض) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$ حيث :

$$W_{AB}(\vec{P}) = 0 \quad , \quad W_{AB}(\vec{T}) = 0$$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضع (A) و الوضع (B) :

$$0 + mg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}mv^2$$

من الشكل :

$$\begin{aligned} \bullet \cos\theta_0 &= \frac{h_1}{\ell} \rightarrow h_1 = \ell \cos\theta_0 \\ \bullet \cos\theta &= \frac{h_2}{\ell} \rightarrow h_2 = \ell \cos\theta \end{aligned}$$

يصبح :

$$mg(\ell \cos\theta - \ell \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mg\ell \cos\theta - mg\ell \cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

θ و v دالتين في الزمن في حين θ_0 تكون ثابتة ، و باشتقاق الطرفين نجد :

$$mg\ell \left(\frac{d\theta}{dt} (-\sin\theta) \right) - 0 = \frac{1}{2}m \left(2 \frac{dv}{dt} \cdot v \right)$$

$$-mg\ell \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = \frac{1}{2}m \left(2 \frac{dv}{dt} \cdot v \right) \rightarrow -g\ell \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = \frac{dv}{dt} \cdot v$$

لدينا :

$$v = \ell \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$-2g\ell \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = 2(\ell \frac{d\theta}{dt}) \cdot (\ell \frac{d^2\theta}{dt^2})$$

$$-2g\ell \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = 2\ell^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow -g\sin\theta = \ell \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \ell \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin\theta = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها ليس جيبيا ، و من أجل الزوايا الصغيرة أين $\sin\theta \approx \theta$ ، يمكن كتابة :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \cdot \theta = 0$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبى من الشكل $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، نستنتج أنه من أجل الزوايا الصغيرة تكون حركة النواس البسيط اهتزازية جيبية دورها :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

التمرين (7) : (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نواس بسيط يتكون من خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط طوله $\ell = 1 \text{ m}$ و جسم نقطي (S) كتلته m ، نزيح النواس في اللحظة t بزاوية θ_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية .

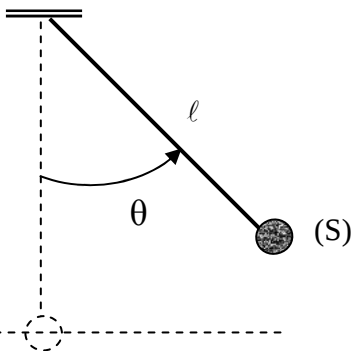
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية بدلالة $\theta(t)$ المميزة للحركة من أجل الساعات الزاوية الصغيرة تكون من الشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

حيث ω_0 هو ثابت يميز طبيعة الحركة يطلب التعبير عنه بدلالة طول الخيط ℓ و شدة الجاذبية g .

2- أثبت أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل المعادلة $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ كحل لها .

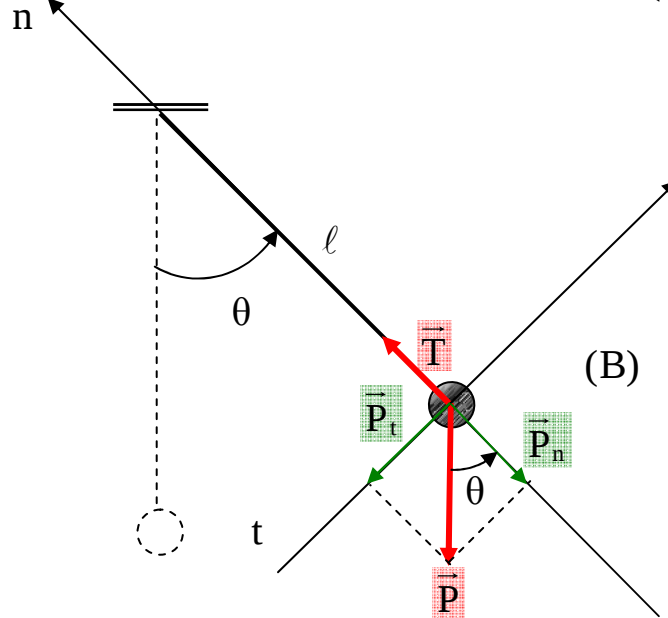
3- دور الحركة الاهتزازية الذاتي من أجل الساعات الصغيرة هو $T_0 = 2s$ ، أوجد :



- أ- النبض الذاتي ω_0 للحركة الاهتزازية .
 ب- قيمة الجاذبية g الأرضية في مكان التجربة .
 يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $\theta(t)$:



- الجملة المدروسة : (كرية) .
 - مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
 - القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.
 - بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور المماسي (ot) نجد :

$$- P \sin \theta = m a_t$$

$$- m \cdot g \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \rightarrow - g \sin \theta = \frac{dv}{dt}$$

لدينا :

$$v = \ell \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$- g \cdot \sin \theta = \ell \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\ell \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cdot \sin \theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة يكون : $\sin\theta \approx \theta$ و منه يصبح لدينا :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

2- التحقق من حل المعادلة التفاضلية :

- $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $\frac{d\theta}{dt} = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega_0^2 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$-\omega_0^2 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

3- أ- نبض الحركة :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

ب- قيمة g :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \rightarrow g = \omega_0^2 \cdot \ell$$

$$g = \pi^2 \cdot 1 = 10 \cdot 1 \rightarrow g = 10 \text{ m/s}^2 .$$

4- المعادلة الزمنية للحركة :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

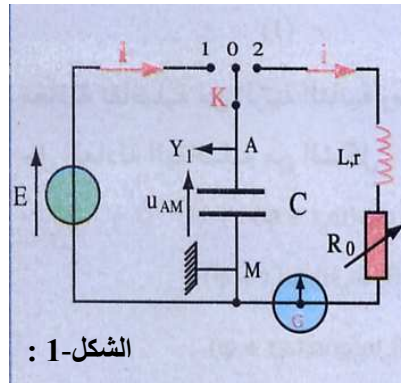
$$\theta_0 =$$

II - الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية

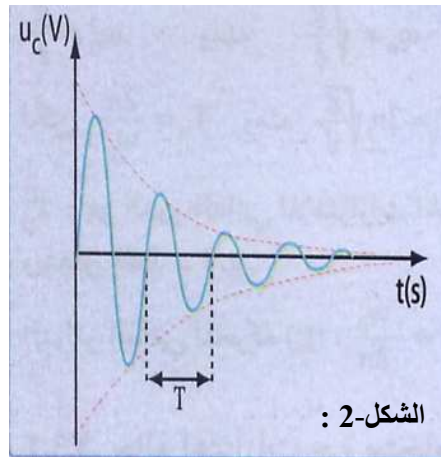
1- الاهتزازات الحرة للدائرة الحقيقية (R,L,C)

• الدراسة التحليلية للدائرة الحقيقية (R,L,C) :

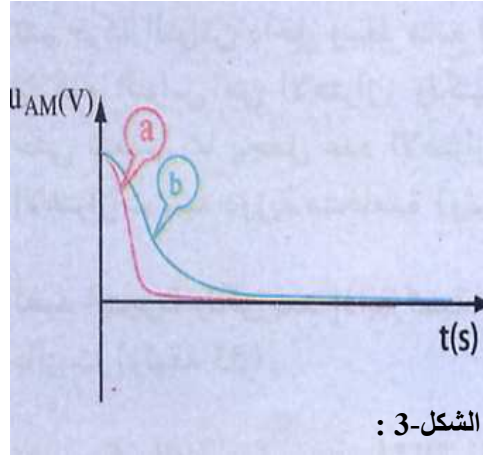
نحقق الدارة المبينة في (الشكل-1) المقابل ، نشحن المكثفة بوضع البادلة في الوضع (1) ، ثم نفرغها بنقلها إلى الوضع (2) و نعطي للمقاومة R_0 قيمة متزايدة ، و من أجل كل قيمة نراقب حركة إبرة المقياس الغلفاني و نتابع أيضا تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة و ذلك من البيان الذي يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي .
نعتبر $R = R_0 + r$ هي المقاومة المكافئة .



- من أجل $R_0 = 0$ أي المقاومة المكافئة للدائرة هي $R = r$ (مقاومة صغيرة) تهتز إبرة المقياس الغلفاني على جانبي الصفر المركزي بسعات متناقصة حتى تعود إلى للصفر ، أما على شاشة راسم الاهتزاز فيظهر البيان المبين في (الشكل-2) و الذي يظهر أن التوتر بين طرفي المكثفة أثناء تفريغها يكون متناوبا و الاهتزازات الحاصلة شبه دورية و سعتها تتناقص بسرعة لذا نقول عن الاهتزازات أنها متخامدة ، وبما أن الدارة لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي نقول إن الاهتزازات حرة و تسمى الدارة (R,L,C) بالدائرة المهتزة الحرة و المتخامدة و النظام في الدارة شبه دوري ، و شبه دور اهتزازتها هو T .



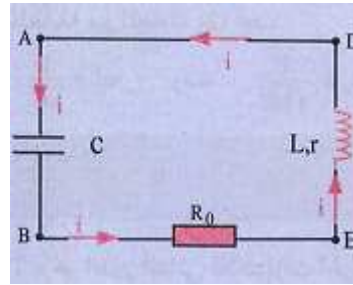
- نزيد من قيمة المقاومة المكافئة R فنلاحظ تزايد تخامد الاهتزازات حتى تصل إلى قيمة كبيرة للمقاومة ، عندها تنحرف إبرة المقياس الغلفاني إلى جهة واحدة ثم تعود إلى للصفر ، أما على شاشة راسم الاهتزاز نشاهد البيان المبين في (الشكل-3) .



الشكل-3 :

• المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدارة الحقيقية (R, L, C) :

نحقق الدارة الكهربائية التالية و التي تتكون على التسلسل من وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R_0 ، نختار اتجاهها موجبا للتيار الكهربائي كما مبين في الشكل .



- بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} + u_{BE} + u_{DE} + u_{DA} = 0$$

$$u_C + u_{R_0} + u_b + 0 = 0 \rightarrow \frac{q}{C} + R_0 i + L \frac{di}{dt} + r i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + (R_0 r) i + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + (R_0 r) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

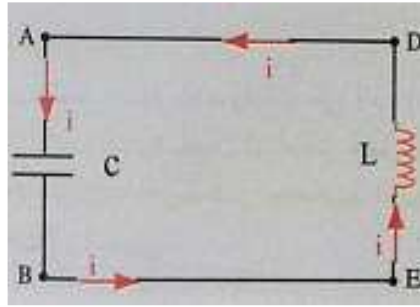
$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{(R_0 r)}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، لا تقبل حل جيبى ، حلها خارج البرنامج .

ب - الاهتزازات الحرة للدائرة المثالية (L,C)

• المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدائرة الحقيقية (R,L,C) :

نحقق الدارة الكهربائية التالية و التي تتكون على التسلسل من وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R_0 ، نختار اتجاهها موجبا للتيار الكهربائي كما مبين في الشكل .



- بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} + u_{BE} + u_{DE} + u_{DA} = 0$$

$$u_C + 0 + u_L + 0 = 0$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلها جيبي من الشكل $q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، ومنه الإهتزازات الجملة حرة جيبيية غير متخامدة دورها :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

• العبارة الزمنية $q(t)$ والمنحنى البياني الموافق :

- حل المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ السابقة :

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

- من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow q = + Q_0$$

بالتعويض في المعادلة :

$$+Q_0 = Q_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = +1 \rightarrow \varphi = 0$$

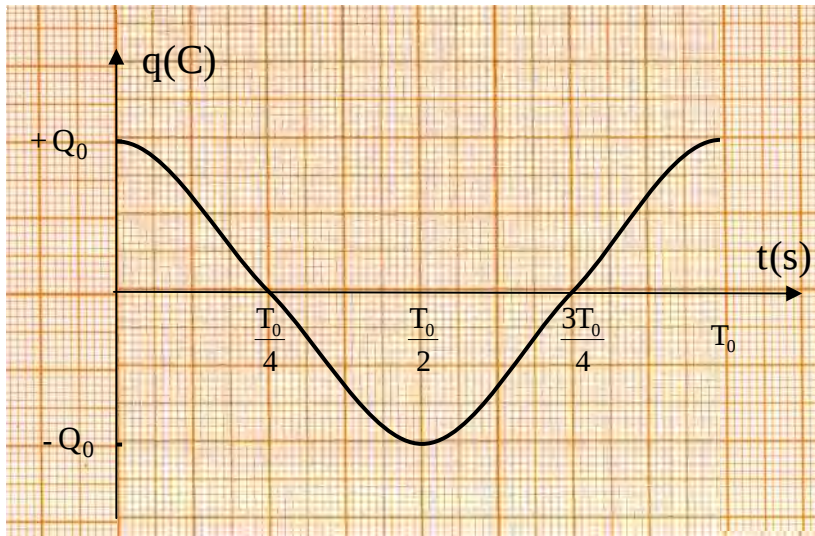
ومنه العبارة الزمنية $q(t)$ تصبح :

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

لرسم المنحنى البياني $q(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة قيم شحنة المكثفة q خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ كما مبين في الجدول التالي :

$t (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$	$+Q_0$	0	$-Q_0$	0	$+Q_0$

و منه يكون المنحنى $q(t)$ كما يلي :



• العبارة الزمنية $i(t)$ والمنحنى البياني الموافق :

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

مما سبق : $q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$ يكون :

$$i = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

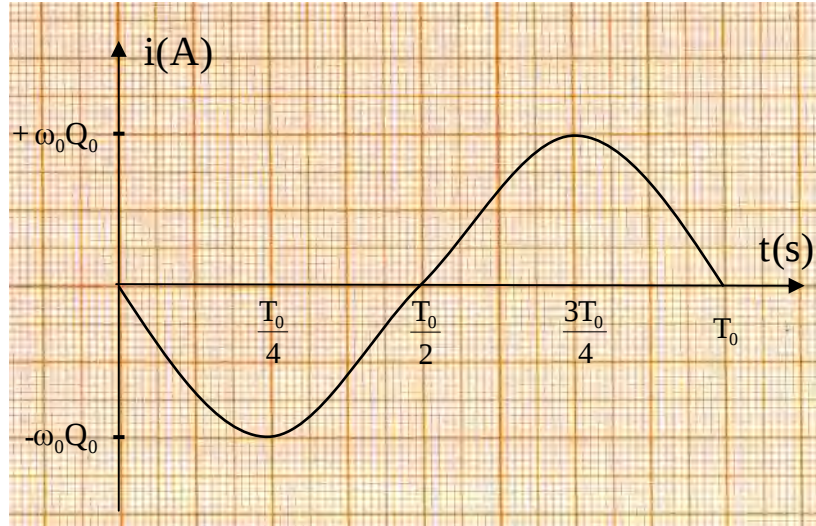
$$i = -I_0 \sin(\omega_0 t)$$

حيث : $I_0 = \omega_0 Q_0$ هي شدة التيار الأعظمية .

بيانيا :

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة قيم شدة التيار i خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

$t (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$i = -\omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t)$	0	$-\omega_0 Q_0$	0	$-\omega_0 Q_0$	0

و منه يكون المنحنى $i(t)$ كما يلي :

• الطاقة في الدارة الكهربائية المتهرة :

■ طاقة الجملة (L, C) :

- تخزن الدارة المثالية (L, C) في اللحظة t طاقة في المكثفة عبارتها $E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$ ، و تخزن في الوشعة طاقة عبارتها $E_{(L)} = \frac{1}{2} L i^2$ ، و عليه فالطاقة الكلية المخزنة في الدارة المثالية (L, C) يعبر عنها بالعلاقة :

$$E = E_{(C)} + E_{(L)}$$

$$E = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

و حيث أن : $u_C = \frac{q}{C}$ نكتب :

$$E = \frac{1}{2} C \frac{q^2}{C^2} + \frac{1}{2} L i^2$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

■ إثبات أن طاقة الدارة المثالية (L,C) ثابتة في كل لحظة :
لدينا مما سبق :

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

وجدنا سابقا :

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \underbrace{(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi))}_1$$

لدينا :

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$$

و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = E_{(C)0}$$

إذن طاقة الجملة (L,C) في حالة اهتزازية غير متخادمة تكون ثابتة و مساوية لطاقة المكثفة الأعظمية .

- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \frac{1}{C} = \omega_0^2 L$ ، نجد أن طاقة الجملة الجملة (L,C) في حالة اهتزازية غير متخادمة تكون ثابتة و مساوية لطاقة الوشيع الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

$$E = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 = E_{(L)0}$$

• طاقة الجملة (جسم + نابض):

- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عابرتها :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

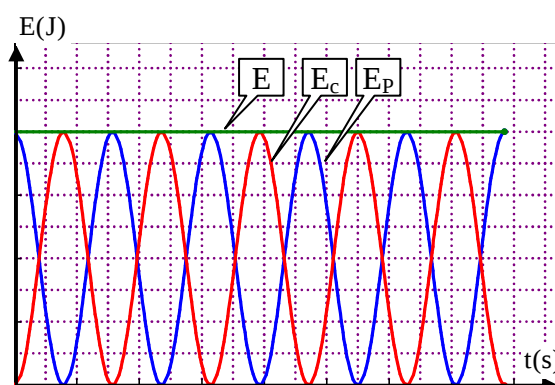
و نتيجة تشوه النابض ، الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة مرونية E_{Pe} عابرتها :

$$E_C = \frac{1}{2} k x^2$$

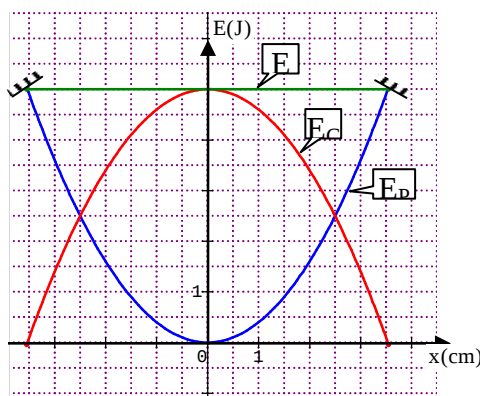
- تمتلك الجملة (جسم + نابض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية والكامنة المرونية ، و نكتب :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

- يمثل الشكل التالي تغيرات الطاقة الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} بدلالة الزمن في الحركة الاهتزازية غير المتخامة (حركة اهتزازية جيبية) . كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- الشكل التالي يمثل تغيرات الطاقتين الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} بدلالة المطال x أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- إذا كانت حركة الجملة غير متخامدة ، نتيجة تغذيتها أو عدم وجود سبب لتناقص الطاقة، تكون طاقة الجملة ثابتة أثناء الحركة الاهتزازية، وحيث أن هذه الطاقة التي اكتسبتها عند اللحظة $t = 0$ كانت نتيجة الإستطالة الأعظمية X_0 ، أين تكون الطاقة الكامنة أعظمية و الطاقة الحركية معدومة يمكن كتابة :

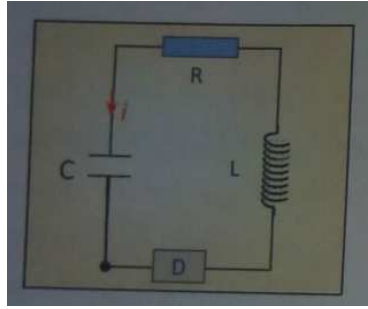
$$E = E_{Pe0} = \frac{1}{2} kX_0^2$$

- عند مرور الجسم بوضع التوازن يكون النابض في وضع الراحة ، تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض) عندئذ معدومة ، كما تكون السرعة أعظمية و عليه فالطاقة الحركية عندئذ أعظمية أيضا ، نكتب إذن :

$$E = E_{C0} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

● تغذية الإهتزازات الكهربائية :

التخامد في الدارة RLC ناتج عن المقاومة R التي تتسبب في ضياع الطاقة على شكل مفعول جول ، و لتعويض الطاقة نضيف إلى الدارة ثنائي قطب (D) يدعى دارة المقاومة السلبية يعمل على تعويض هذه الطاقة الضائعة في كل لحظة بحيث تصبح الاهتزازات دورية .



- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R + u_C = u_D \rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = R_D i$$

لدينا :

$$\bullet i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} \rightarrow i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\bullet \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = R_D C \frac{du_C}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = R_D C \frac{du_C}{dt} - RC \frac{du_C}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = C(R_D - R) \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{(R_D - R)}{L} \frac{du_C}{dt}$$

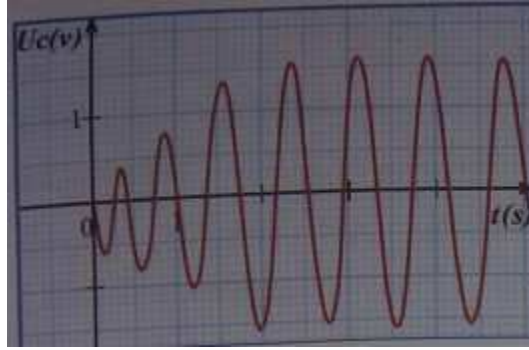
لكي تختفي الاهتزازات يجب أن تكون الطاقة الضائعة بفعل جول ($R.i^2$) في الدارة تساوي الطاقة التي يعطيها المولد D في كل لحظة هي :

$$R_D i^2 = R i^2 \rightarrow R = R_D$$

و منه تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي :

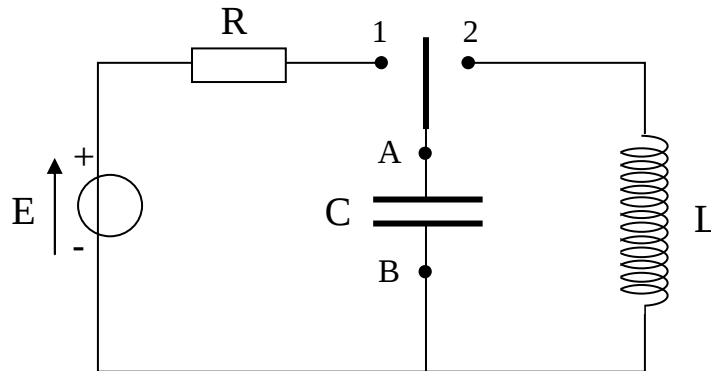
$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبى ، و نشاهد على شاشة راسم اهتزازا مهبطي موصول بين طرفي مكثفة المنحنى التالي :



التمرين (8) : (التمرين : 017 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نحقق التركيب الكهربائي التجريبي المبين في الشكل المقابل باستعمال التجهيز : مكثفة سعته (C) غير مشحونة ، ناقل أومي مقاومته $R = 10 \Omega$ ، مولد ذي توتر ثابت $E = 12 V$ ، وشيعة مقاومتها مهملة ذاتيتها L .



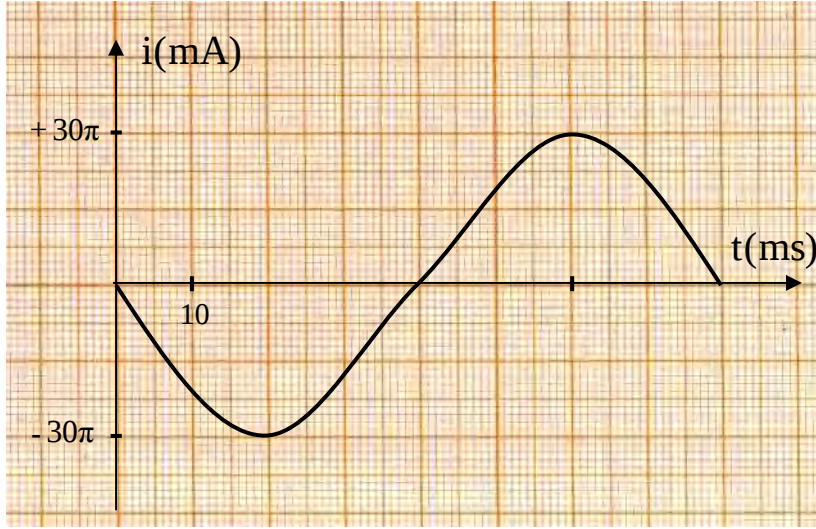
1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$.

أ- ما هي الظاهرة الملاحظة ، فسر هذه الظاهرة على المستوى المجهرى .

ب- عند نهاية الشحن تكون طاقة المكثفة $E_C = 7.2 \cdot 10^{-3} J$ ، أحسب : سعة المكثفة C ، ثابت الزمن τ .

ج- نريد تسريع عملية الشحن ، لهذا الغرض نصل ناقل أومي آخر مقاومته R' مع الناقل الأومي السابق ذو المقاومة R . ببين مع الشرح كيف يجب وصل الناقلين الأوميين R ، R' (على التسلسل أو على التفرع) لتحقيق هذا الغرض .

2- نضع البادلة في الوضع 2 عند اللحظة $t = 0$ ، المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات شدة التيار الكهربائي بدلالة الزمن . نعتبر $\pi^2 = 10$.



- أ- ما هي الظاهرة الملاحظة .
 ب- اكتب المعادلة التفاضلية المعبرة عن شحنة المكثفة $q(t)$.
 ج- استنتج من البيان :
 ▪ الدور الذاتي T_0 .
 ▪ النبض الذاتي ω_0 .
 ▪ شحنة المكثفة الأعظمية (بطريقتين) .
 ▪ ذاتية الوشعة L .
 د- اكتب العبارة اللحظية لشحنة المكثفة $q(t)$ علما أن $q > 0$ عند اللحظة $t = 0$.
 هـ- بين أن طاقة الجملة الكهربائية محفوظة .
 و- في الحقيقة المقاومة الداخلية للوشعة r ليست مهملة . ناقش حسب قيم r طبيعة النظام الكهربائي المهتز مبينا ذلك منحنى كيفي .

الأجوبة :

- 1- أ- الظاهرة الملاحظة :
 هي شحن المكثفة و على المستوى المجهري تنتقل الإلكترونات من اللبوس A إلى اللبوس B و تتراكم في اللبوس B بسبب العازل ، فيشحن اللبوس B سلبا و يشحن اللبوس A إيجابا .
 ب- سعة المكثفة C :
 عند نهاية الشحن تكون طاقة المكثفة أعظمية ، أي : $E_{(C)0} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ و لدينا :

$$E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2 \rightarrow C = \frac{2E_{(C)0}}{E^2} \rightarrow C = \frac{2 \cdot 7,2 \cdot 10^{-3}}{(12)^2} = 10^{-4} \text{ F}$$

- ثابت الزمن τ :

$$\tau = RC \rightarrow \tau = 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3} \text{ s}$$

- ج- لتسريع شحن المكثفة نخفض من قيمة زمن اتمام الشحن (5τ) و بالتالي تخفيض قيمة $\tau = RC$ ، و لتحقيق ذلك

نقل من قيمة المقاومة R و هذا يتحقق عند ربط الناقلين الأوميين على التفرع أين يكون : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

2- أ- الظاهرة الملاحظة :

كون أنه لا توجد مقاومة في الدارة (لا يوجد ناقل أومي و لا مقاومة داخلية للوشية) ، فإن الظاهرة الملاحظة هي اهتزازات كهربائية غير متخامدة .

ب- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

ج- قيمة T_0 :

$$T_0 = 8 \cdot 10 = 80 \text{ ms} \quad (\text{من البيان})$$

- قيمة ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{80 \cdot 10^{-3}} = 25 \pi \text{ rad/s}$$

- قيمة Q_0 :

طريقة (1) :

$$Q_0 = EC \rightarrow Q_0 = 12 \cdot 10^{-4} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

طريقة (2) :

من المنحنى $i(t)$: $I_0 = 30\pi \text{ mA}$ و لدينا :

$$I_0 = \omega_0 Q_0 \rightarrow Q_0 = \frac{I_0}{\omega_0} \rightarrow Q_0 = \frac{30\pi \cdot 10^{-3}}{25\pi} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

- قيمة L :

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \rightarrow L = \frac{1}{(25\pi)^2 \cdot 10^{-4}} = 1,6 \text{ H}$$

د- العبارة $q(t)$:

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow q = +Q_0$$

بالتعويض :

$$Q_0 = Q_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

إذن :

$$q = 1,2 \cdot 10^{-3} \cos(25\pi t)$$

ه- إثبات أن طاقة الجملة (مكتفة + وشية) ثابتة :

- تخزن الدارة المثالية (L,C) في اللحظة t طاقة في المكتفة عبارتها $E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$ ، و تخزن عند نفس اللحظة

في الوشية طاقة عبارتها $E_{(L)} = \frac{1}{2} L i^2$ ، و عليه فالطاقة الكلية المخزنة عند اللحظة t في الدارة المثالية (L,C)

يعبر عنها بالعلاقة :

$$E = E_{(C)} + E_{(L)} \rightarrow E = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

و حيث أن : $u_C = \frac{q}{C}$ نكتب :

$$E = \frac{1}{2} C \frac{q^2}{C^2} + \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

لدينا في الاهتزازات الكهربائية غير المتخادمة :

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

بالتعويض في عبارة الطاقة :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

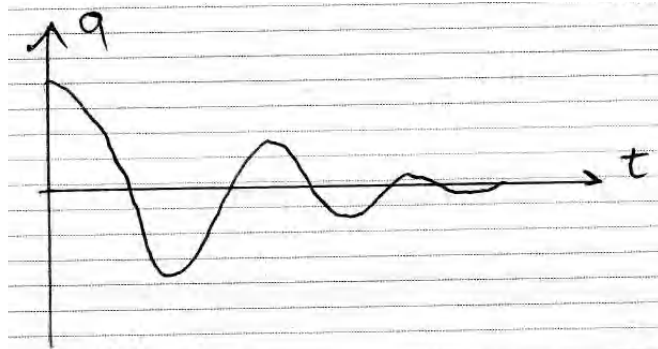
$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} (\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)) \rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = E_{(C)0}$$

- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ $(\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \frac{1}{C} = \omega_0^2 \cdot L)$ ، نجد أن طاقة الجمللة الجمللة (L, C) في حالة اهتزازية غير متخادمة تكون ثابتة و مساوية لطاقة اللوشية الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

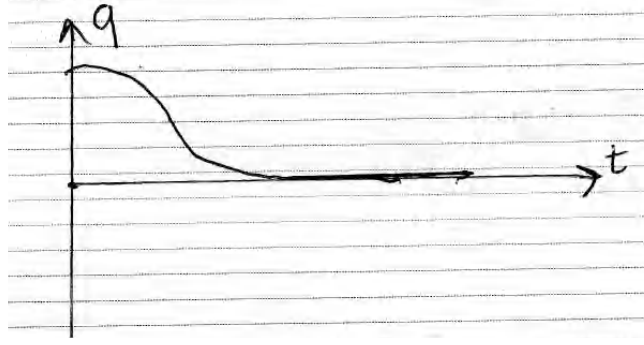
$$E = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 = E_{(L)0}$$

و - طبيعة النظام :

إذا كانت المقاومة الداخلية للوشية r صغيرة يكون النظام شبه دوري متخامد :

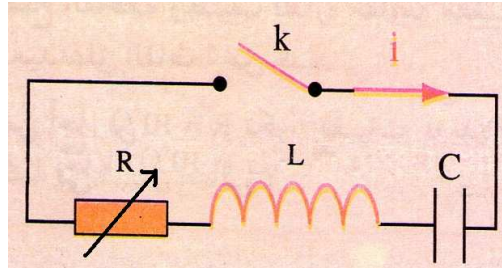


- إذا كانت المقاومة الداخلية للوشية r معتبرة يكون النظام لا دوري حرج .

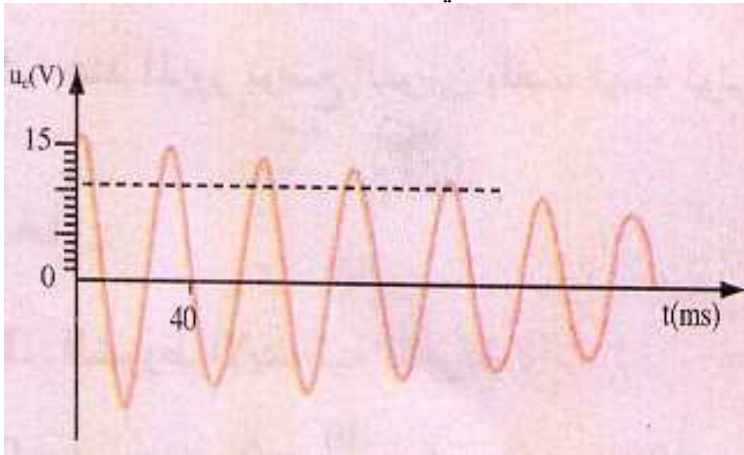


التمرين (9) : (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جزء من دائرة كهربائية تتكون على التسلسل من : مكثفة سعتها $C = 10^{-4} \text{ F}$ شحنت تحت توتر قدره 15 V ، وشيعة ذاتيها L و مقاومتها الداخلية مهملة ($r = 0$) معدلة (ناقل أومي ذو مقاومة متغيرة) .



نتابع تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن فنحصل على البيان التالي :



- 1- ما هو نمط الإهتزازات ؟ علل .
- 2- عين قيمة شبه دور الاهتزازات T .
- 3- أحسب ذاتية الوشيعة L باعتبار الدور T يقترب من الدور الذاتي T_0 .
- 4- أحسب الطاقة الأعظمية للدورة .
- 5- أحسب الطاقة الضائعة عند نهاية الاهتزازة الرابعة
- 6- أحسب الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي I_0 .
- 7- كيف يصبح نمط الاهتزازات إذا كانت قيمة R كبيرة جدا ، مثل في هذه الحالة و بشكل كيفي تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- نمط الاهتزازات :

الجملة المهتزة (R, L, C) لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي أثناء الاهتزازات لذا فالاهتزازات حرة ، و بما أن الدائرة تحتوي على ناقل أومي (مقاومة) ، هذه الأخيرة تعتبر سبب في تخامد هذه الاهتزازات كون أن طاقة الجملة تضيق على شكل حرارة بفعل جول في الناقل الأومي ، إذن نمط الاهتزازات في الدارة (R, L, C) حرة متخامدة .

2- قيمة شبه الدور T :

من البيان :

$$\frac{5T}{4} = 40 \text{ ms} \rightarrow T = \frac{4 \cdot 40}{5} = 32 \text{ ms}$$

3- ذاتية الوشيعَة L :

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow T^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = \frac{(32 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-4}} = 0.256 \text{ H}$$

4- الطاقة الأعظمية للدائرة :

تكون طاقة الجملة (R,L,C) أعظمية عند اللحظة $t = 0$ ، أين تكون طاقة المكثفة أعظمية و طاقة الوشيعَة عندئذ معدومة ، أي :

$$E_{\max} = E_{C \max} = \frac{1}{2} C \cdot u_{C \max}^2$$

من البيان : $u_{C \max} = 15V$ و منه :

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \rightarrow (15)^3 = 1.125 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

5- الطاقة الضائعة في نهاية الاهتزازة الرابعة :

في نهاية الاهتزازة الرابعة يكون التوتر u_C في قيمته الحدية عندها تكون طاقة الوشيعَة معدومة ، و كون أن طاقة المكثفة $u_C = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2$ تكون طاقة الجملة (R,L,C) عند نهاية الاهتزازة الرابعة هي :

$$E = E_{(C)} = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2$$

من البيان ، عند نهاية الاهتزازة الرابعة يكون $u = 11 \text{ V}$ و منه طاقة الجملة (R,L,C) عند هذه اللحظة هي :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} (11)^2 = 6.05 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

الطاقة الضائعة هي النقصان في الطاقة بين اللحظة $t = 0$ و نهاية الاهتزازة الرابعة ، فإذا اعتبرنا الطاقة الضائعة هي E' نكتب :

$$E' = E_0 - E \rightarrow E' = 1.125 \cdot 10^{-2} - 6.05 \cdot 10^{-3} = 5.2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

6- شدة التيار الأعظمية :

تكون شدة التيار الكهربائي في أعظم قيمة لها عندما تكون طاقة الوشيعَة في أعظم قيمة لها ، و أعظم قيمة لطاقة الوشيعَة $E_{(C)\max}$ لا تتعدى طاقة الدائرة (R,L,C) الأعظمية أي :

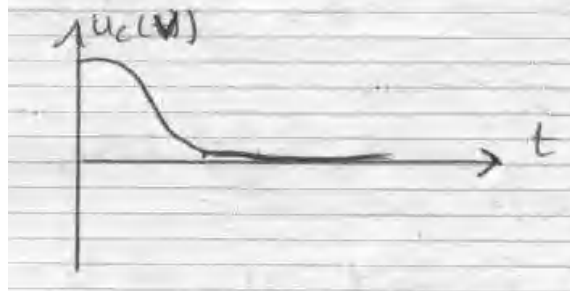
$$E_{(L)\max} = E_{\max} = 1.125 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

و لدينا :

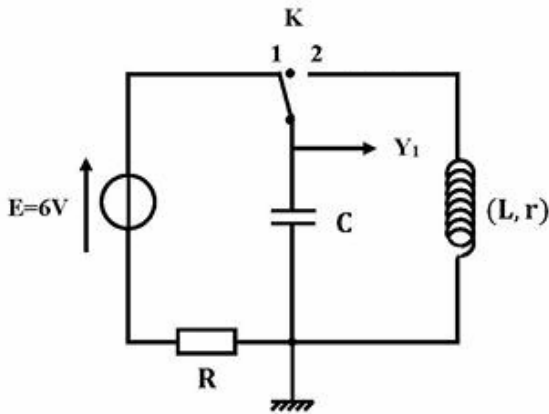
$$E_{(L)\max} = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2E_{(L)\max}}{L}} \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.125 \cdot 10^{-2}}{0.256}} \approx 0.30A$$

7- نمط الاهتزاز عندما تكون R كبيرة جدا :

بازدياد قيمة المقاومة R يزداد تخامد الاهتزازات الكهربائية و عندما تكون قيمة المقاومة كبيرة جدا ، يصبح نظام الدائرة لا دوري (حرجًا) ، في هذه الحالة يصبح شكل تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة كما يلي :



التمرين (13) : (التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع) (**))



ننجز الدارة الممثلة في الشكل (04) و المكونة من :

- مكثفة شحمتها معدومة ، سعتها $C = 20 \mu F$.
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .
- ناقل أومي R .
- مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 6 V$.
- بادلة K .

1- نضع البادلة K في الوضع (1) فنتشحن المكثفة .

أ- أوجد المعادلة التفاضلية بدالة التوتر u_C بين طرفي المكثفة .

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل $u_C = A e^{-\alpha t} + B$ حيث A ، B ، α وثوابت يطلب كتابة عبارتهم بدلالة المقادير المميزة للدارة .

ج- أحسب الطاقة الكهربائية E_0 التي تخزنها المكثفة عند نهاية الشحن .

2- نغير عند اللحظة $t = 0$ البادلة k في الوضع (2) ، يمثل الشكل (05) تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن ، اعتمادا على المنحنى :

أ- فسر الظاهرة الملاحظة .

ب- حدد شبه الدور T .

ج- أحسب الطاقة الضائعة بفعل جول بين اللحظتين $t = 0$ و $t = 3T$.

د- أثبت أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C بين طرفي المكثفة هي من الشكل :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

3- في حالة إهمال r يكون حل المعادلة التفاضلية كالتالي :

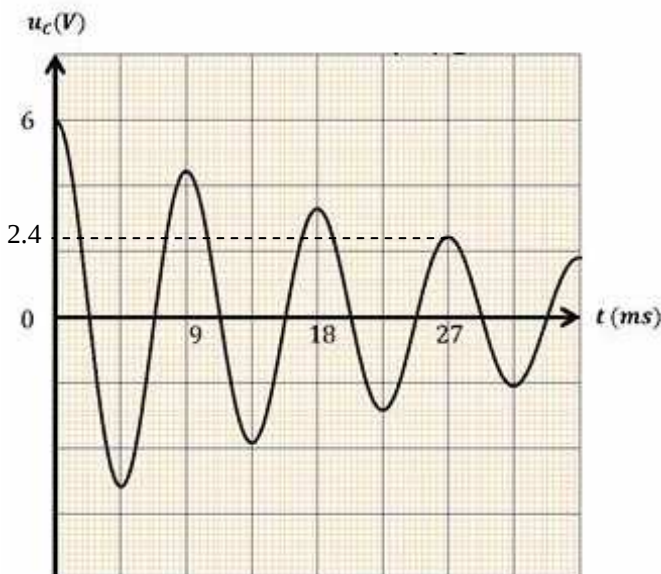
$$u_C(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

أ- ماهي الظاهرة الملاحظة في هذه الحالة .

ب- استنتج عبارة الدور الذاتي T_0 بدلالة ثوابت الدارة .

ج- حدد بدقة كل من U_0 و φ .

د- أحسب قيمة L باعتبار $T = T_0$.



الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_c(t)$ حسب قانون جمع التوترات :

$$U_R + U_C = E$$

$$R \frac{dq}{dt} + U_C = E$$

$$RC \cdot \frac{du_c}{dt} + U_C = E \rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = \frac{E}{RC}$$

3- مع $\alpha < B < A$:

$$u_c = A e^{-\alpha t} + B$$

$$\frac{du_c}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC} (A e^{-\alpha t} + B) = \frac{E}{RC}$$

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} e^{-\alpha t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$A e^{-\alpha t} \left(-\alpha + \frac{1}{RC} \right) + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$$

لكي نتحقق للمساواة يجب أن يكون :

$$-\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\frac{B}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow B = E$$

من الشروط الابتدائية

$$t = 0 \rightarrow q = 0 \rightarrow U_C = \frac{q}{C} = 0$$

بالتعويض :

$$0 = A e^{-\alpha(0)} + B \rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -B = -E$$

ج- الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثف عند نهاية الشحن ،
عند نهاية الشحن تكون الطاقة أعطية وعليه

$$E_{(0)} = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} (6)^2 = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ ج}$$

د- الظاهرة الملاحظة :

كون أنه توجد مقاومة في الدارة (R-L-C) والمتمثلة في المقاومة الداخلية للوسيلة ، فالظاهرة الملاحظة هي اهتزازات كهربائية حرة متخامدة .

د- قيمة حثية الدور

$$T = 9 \text{ ms}$$

من البيان :

حي الطاقة الضائعة بفعل جول بين اللحظتين $t=0$ و $t=3T$:- عند اللحظة $t=0$ الطاقة المخزنة في المكثفة اعطية أي :

$$E_{c1} = E_{c0} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ J}$$

- عند اللحظة $t=3T$ ومن البيان $U_c = 2,4V$ ومنه تكون الطاقة المخزنة في المكثفة عند هذه اللحظة هي :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^{-6} (2,4)^2 = 5,76 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

ومن الطاقة الضائعة بفعل جول هو النقصان في الطاقة أي :

$$E_{c,ab} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{c,ab} = 3,6 \cdot 10^4 - 5,76 \cdot 10^{-5} = 3,024 \cdot 10^4 \text{ J}$$

ج- المعادلة التفاضلية بدلالة $U_c(t)$:

حسب قانون جمع التيارات :

$$U_b + U_c = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + r i + U_c = 0$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + U_c = 0$$

$$L \frac{d^2 (C U_c)}{dt^2} + r \frac{d(C U_c)}{dt} + U_c = 0$$

$$L C \frac{d^2 (U_c)}{dt^2} + r C \frac{d U_c}{dt} + U_c = 0$$

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{r C}{L C} \frac{d U_c}{dt} + \frac{1}{L C} U_c = 0$$

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{d U_c}{dt} + \frac{1}{L C} U_c = 0$$

3- الف- الظاهرة الملاحظة :عند اكمال r تصبح قطور التواتر U_c بين طرفي المكثفة

حيث ، ونلاحظ في الظاهرة الملاحظة في هذه الحالة

اهتزازات حرة كهربائية غير ممتخمة ،

ب- عبارة الدور الذاتي T_0
عند إهمال r تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

من هذه المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

و لدينا :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

ج- قيمة U_0 :

$$U_0 = 6 \text{ V}$$

من البيان :

قيمة ϕ :

من البيان :

بالنغويض :

$$t=0 \rightarrow u_c = u_{c0} = 9 \text{ V}$$

$$6 = 6 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t(0) + \phi\right)$$

$$\cos(\phi) = 1 \rightarrow \phi = 0$$

قيمة L :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 LC \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{(9 \cdot 10^3)^2}{4\pi^2 \cdot 20 \cdot 10^6} = 0,1 \text{ H}$$

III - الاهتزازات القسرية

خاص بالشعب الرياضية فقط

مفهوم الاهتزازات القسرية و التجاوب

- نقول عن جملة ما في شروط معينة أنها تتعرض لاهتزازات قسرية عندما يفرض عامل خارجي دور معين لاهتزازات هذه الجملة ، و نقول أن الجملة المهتزة دخلت في حالة التجاوب عندما تأخذ سعة اهتزازاتها قيمة عظمى .
- تتعرض الجملة المهتزة (ميكانيكية أو كهربائية) إلى تخامد في اهتزازاتها عندما تفقد جزء من طاقتها على شكل تحويل حراري .
- في الجمل الكهربائية يكون الضياع بفعل جول في النواقل الأومية .

الاهتزازات القسرية الكهربائية

التوتر المنتج (الفعال) :

- التوتر المنتج U_{eff} (أو شدة التيار المنتجة I_{eff}) التي يرمز لها بـ للتيار المتناوب الجيبي هو التوتر المستمر (أو شدة التيار المستمر) الذي ينتج نفس الكمية من الحرارة التي ينتجها التوتر (أو التيار) المتناوب الجيبي بين طرفي ناقل أومي في نفس المدة الزمنية .
- يقاس التوتر المنتج و شدة التيار المنتجة بمقياس الفولط و الأمبير العاديين المضبوطين في وضع المتناوب ، بمعنى القيمة التي يشير إليها مقياسي الفولط و الأمبير المضبوطين في وضع المتناوب في دارة مغلقة يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي هي القيمتين المنتجة للتوتر و التيار .
- التوتر المنتج U_{eff} متعلق بالتوتر الأعظمي U_0 وفق العلاقة :

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

- شدة التيار المنتجة I_{eff} متعلقة بشدة التيار الأعظمية I_0 وفق العلاقة :

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

● ممانعة ثنائي القطب (R,L,C) على التسلسل :

- يبقى قانون أوم بين طرفي ناقل أومي يسري فيه تيار مستمر ساري المفعول في كل لحظة بين طرفي ثنائي قطب يسري فيه تيار متناوب جيبي ، و يعبر عنه في هذه الأخيرة وفق العلاقة :

$$U = Z I$$

حيث Z هي ممانعة ثنائي القطب الذي يسري فيه التيار المتناوب الجيبي وحدته الأوم (Ω)

- من هذه العلاقة يمكن كتابة :

$$U_0 = Z I_0$$

$$U_{eff} = Z I_{eff}$$

● استطاعة التحويل الحراري بفعل جول :

-- استطاعة التحويل الحراري بفعل جول في دائرة كهربائية يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي ، هي الطاقة المحولة بفعل جول في الثانية الواحدة ، يرمز لها بـ P و وحدتها الواط (W) و يعبر عنها بالعلاقة :

$$P = R.I_{eff}^2$$

حيث : R مقاومة الناقل الأومي المكافئ في الدارة .

I_{eff} : شدة التيار المنتجة في الدارة .

- الطاقة المحول فعل جول في دائرة كهربائية يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي يعبر خلال مدة زمنية Δt يعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$E = P \Delta t = R.I_{eff}^2 . \Delta t$$

● الدراسة الكيفية :

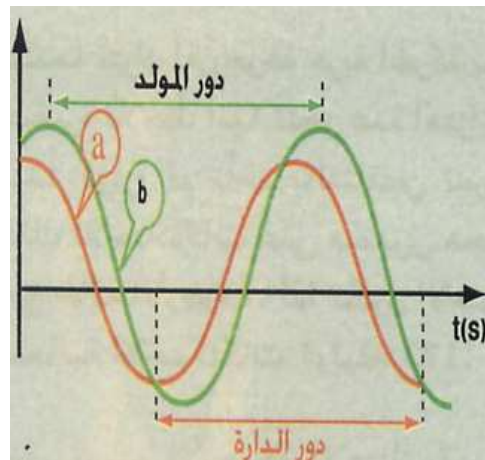
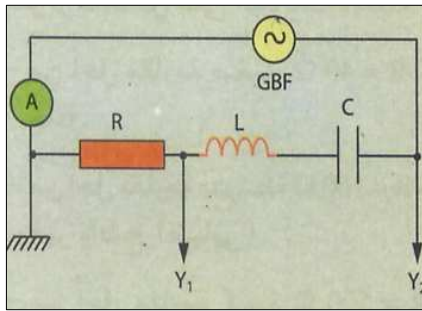
نحقق الدارة الكهربائية التالية :

- نغذي الدارة بتوتر متناوب جيبي تواته قابل للتغيير عبارته الزمنية :

$$u = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

- بواسطة راسم الاهتزاز المهبطي نتابع تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي في المدخل Y_1 و التوتر u_G بين طرفي المولد في المدخل Y_2 .

- من أجل قيمة للتواتر نشاهد على شاشة راسم الاهتزاز البيانيين التاليين ، حيث يمثل المنحنى (a) تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي المماثل للمنحنى $i(t)$ الذي يمثل تغيرات شدة التيار المار بالدائرة .



- من المنحنى $u_R(t)$ المماثل للمنحنى $i(t)$ ، يتبين أن تغيرات شدة التيار i المار بالدائرة هي على شكل دالة جيبية دورها مساوي لدور التوتر u_G بين طرفي المولد (GBF).

- عندما نحسب الدور الذاتي للدائرة المهتزة (R,L,C) الذي يعطى بالعلاقة : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ، ثم نحسب من المنحنى $u_R(t)$ المماثل للمنحنى $i(t)$ دور شدة التيار المار في الدائرة و الذي يجريه المولد (GBF) ، نلاحظ أن الدورين غير متساويين ، و كون أن دور شدة التيار الذي يجري في الدائرة مساوي لدور التوتر $u_G(t)$ الذي يطبقه المولد (GBF) على الدائرة ، يمكن القول أن المولد أجبر الدارة (R,L,C) على الاهتزاز بدور مساوي لدوره ، و بالتالي نقول أننا تحصلنا على اهتزازات كهربائية قسرية .

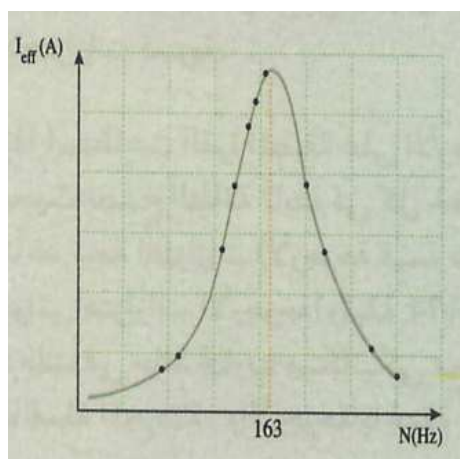
- نسمي المولد (GBF) بالجملة المحرصة (المحرض) و الدارة (R,L,C) بالجملة المجاوبة (المجاوب) .

• الدراسة الكمية :

نأخذ $C = 1 \mu F$ ، $L = 0.95 H$.

نجعل التوتر بين طرفي المولد (GBF) ثابتا و نغير من قيمة تواتره ، و نسجل الشدة المنتجة للتيار الكهربائي في الدارة (R,L,C) .

- نمثل تغيرات شدة التيار الفعالة I_{eff} بدلالة التواتر f للجملة المحرصة (المولد GBF) ، نتحصل على المنحنى التالي :



- حالة التجاوب الكهربائي :

- نحسب التواتر الذاتي للدارة (R,L,C) فنجد :

$$f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 163 \text{ Hz}$$

- من البيان نلاحظ أن الشدة المنتجة للتيار الكهربائي تبلغ قيمة عظمى من أجل تواتر المولد $f_0 = 163 \text{ Hz}$ ، أي أن شدة التيار المنتجة في الدارة (R,L,C) تكون أعظمية عندما يكون تواتر (GBF) مساوي للتواتر f_0 الخاص المجاوب (R,L,C) ، نقول عندها أن الدارة في حالة تجاوب كهربائي ، إذن عند التجاوب يكون :

$$f_0 = f$$

و من ثم يكون :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega \\ T_0 &= T \end{aligned}$$

نذكر أن الدور الذاتي T_0 و النبض الذاتي ω_0 و التواتر الذاتي f_0 للدارة RLC يعبر عنهما بالعلاقة :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ T_0 &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \\ f_0 &= \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

- عندما نقيس ممانعة الدارة عند التجاوب تلاحظ أن قيمتها تصبح مساوية لقيمة مقاومة الدراة ، أي عند التجاوب يكون :

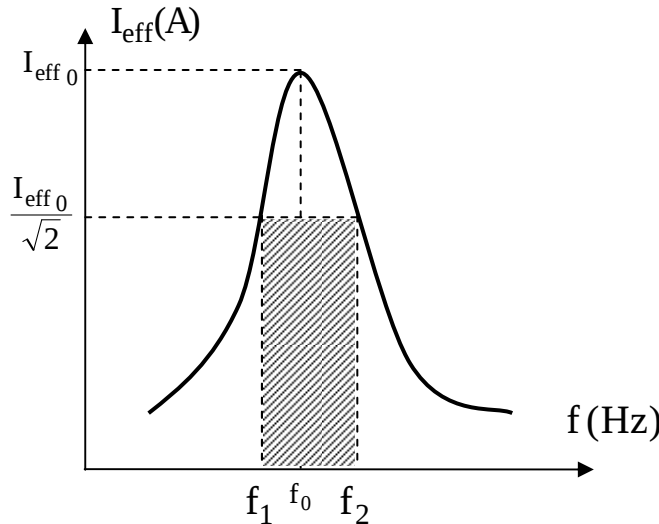
$$Z = R + r$$

- الشريط النافذ :

- الشريط النافذ لتواترات المتجاوب هو مجال التواترات الموافق لـ :

$$I_{\text{eff}} \geq \frac{I_{\text{eff}0}}{\sqrt{2}}$$

- من أجل $I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}0}}{\sqrt{2}}$ يكون للتواتر f قيمتان الأولى f_1 و الثانية f_2 حيث $f_1 < f_2$ (الشكل) ، نسمي f_1 ، f_2 حدي الشريط النافذ .



- يمكن إثبات أن $I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}0}}{\sqrt{2}}$ ، عندما تكون الاستطاعة المحولة بفعل جول في الدارة مساوية لنصف الإستطاعة الأعظمية المحولة بفعل جول في الدارة ، أي :

$$P = \frac{P_0}{2} \rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}0}}{2}$$

- عرض الشريط النافذ :

عرض الشريط النافذ الذي نرمز له بالرمز Δf هو الفرق بين قيمتي التواتر f_1 ، f_2 الموافقتين للقيمة $I_{eff} = \frac{I_{eff0}}{\sqrt{2}}$ ، فهو إذن يعبر عنه بالعلاقة :

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

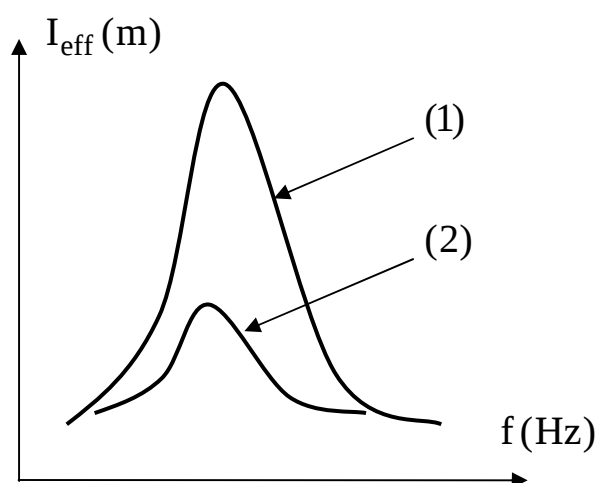
- في المجال Δf (عرض الشريط النافذ) ، نقول عن الجملة المتجاوبة أنها أكثر استجابة .

■ معامل الجودة :

معامل الجودة هو مقدار يستعمل للتعبير عن حالة التجاوب بين المحرض (GBF) و المتجاوب (الدارة R,L,C) ، يرمز لها بـ Q و هو بدون وحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

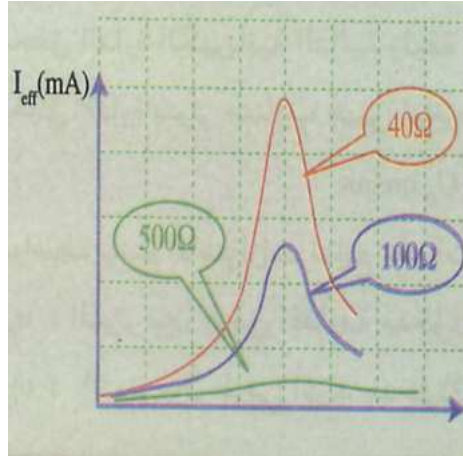
- نقول عن الجملة المهتزة المتجاوبة أنها أكثر استجابة (أو أن استجابتها مقبولة) كلما كان معامل الجودة Q أكبر ، في هذه الحالة يكون المنحنى $I_{eff}(f)$ أكثر حدة .

مثال :

المنحنى (1) أكثر حدة من المنحنى (1) و بالتالي عنده يكون معامل الجودة أكبر و الجملة المهتزة المتجاوبة أكثر استجابة .

● تأثير التخامد :

نكرر التجربة السابقة بتغير قيمة المقاومة R ، و من أجل كل قيمة للمقاومة ، نمثل تغيرات الشدة المنتجة للتيار $i(t)$ بدلالة التواتر f فنحصل على المنحنيات التالية :



- من أجل مقاومة صغيرة $R = 40 \Omega$ ، يكون التخامد ضعيف و التجاوب حاد .
- من أجل مقاومة متوسطة $R = 100 \Omega$ يكون التخامد متوسطا و التجاوب غير واضح (ضبابي) .
- من أجل مقاومة كبيرة $R = 500 \Omega$ ، يكون التخامد كبيرا و المنحنى منبسطا و لا يوجد تجاوب .

■ تأثير العوامل R ، L ، C على ممانعة ثنائي القطب (R, L, C) :

نحقق الدارة (R, L, C) على التسلسل المبينة في الشكل التالي :

- نثبت التواتر f و السعة C و الذاتية L و نأخذ قيم مختلفة للمقاومة R ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت المقاومة R ازدادت قيمة الممانعة Z .

- نثبت التواتر f و السعة C و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للذاتية L ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت الذاتية L نقصت قيمة الممانعة Z .

- نثبت التواتر f و الذاتية L و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للسعة C ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت السعة C نقصت قيمة الممانعة Z .

- نثبت التواتر f و السعة C و الذاتية L و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للتواتر f للتيار المستعمل ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت قيمة التواتر f نقصت قيمة الممانعة Z .

● ملاحظة :

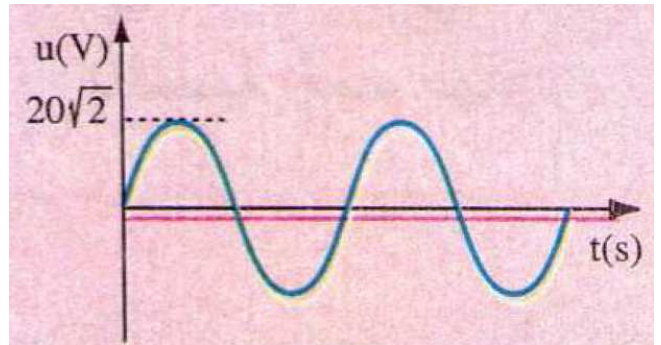
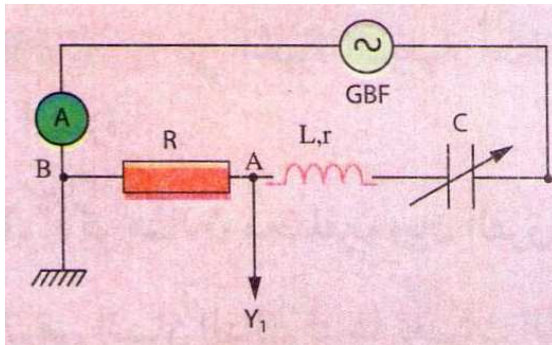
عندما تكون الممانعة صغرى تكون الشدة المنتجة عظمى .

التمرين (1) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (**)

جزء من دائرة كهربائية تضم على التسلسل ناقل أومي مقاومته $R = 10 \Omega$ وشيعة ذاتيتها $L = 1 H$ ومقاومتها r مهملة و مكثفة سعتها C متغيرة ، تغذى الدارة بتوتر متناوب جيبي عبارته : $u = 50\sqrt{2} \sin(100t + \varphi)$ حيث : $u(V)$ ، $t(s)$.

نصل طرفي المقاومة إلى راسم اهتزازات فيظهر على شاشته البيان $u(R)$.

- 1- ماذا يقيس مقياس الأمبير و مقياس الفولط في الدارة ؟
- 2- جد قيمة شدة التيار الأعظمية I_0 ثم قيمة شدة التيار المنتجة I_{eff} .
- 3- أحسب ممانعة الدارة Z .
- 4- إذا علمت أن استطاعة التحويل الحراري الضائعة بالدائرة $P = 60 W$ ، عين r المقاومة الداخلية للوشيعة .



5- نغير سعة المكثفة حتى يشير مقياس الأمبير إلى قيمة عظمى يبدأ بعدها بالتناقص .
أ- ما هي الحالة الكهربائية للدائرة عندما تكون الشدة المنتجة للتيار الكهربائي عظمى ؟ و ما هي قيمة ممانعة الدارة Z_0 عندئذ .

ب- أحسب سعة المكثفة في هذه الحالة .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- في حالة دائرة مغذاة بتيار متناوب جيبي يقيس كل من مقياس الأمبير و مقياس الفولط الشدة المنتجة للتيار الكهربائي I_{eff} و الشدة المنتجة للتوتر الكهربائي U_{eff} على الترتيب .

2- قيمة I_0 :

من البيان : $u_0 = 20\sqrt{2} A$ و لدينا :

$$U_{R0} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R0}}{R} \rightarrow I_0 = \frac{20\sqrt{2}}{10} = 2\sqrt{2} A$$

قيمة I_{eff} :

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 A$$

3- ممانعة الدارة :

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

من عبارة التوتر الكهربائي المغذي للدارة : $U_0 = 50\sqrt{2} \text{ V}$ و منه :

$$Z = \frac{50\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 25 \Omega$$

4- قيمة r :

$$P = (R + r) I_{\text{eff}}^2$$

$$R + r = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} \rightarrow r = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} - R$$

$$r = \frac{60}{(2)^2 \cdot 2} - 10 = 5 \Omega$$

5- أ- عندما تكون الشدة المنتجة للتيار الكهربائي في الدارة أعظمية تكون الدارة في حالة تجاوب كهربائي .

- قيمة Z_0 :

عندما تكون الدارة في حالة تجاوب تكون ممانعة الدارة في أصغر قيمة لها و تساوي المقاومة المكافئة أي :

$$Z_0 = R + r = 10 + 5 = 15 \Omega$$

ب- سعة المكثفة عند التجاوب :

عند التجاوب يساوي النبض الذاتي للمولد النبض الذاتي للدارة المهتزة RLC أي :

$$\omega_0 (\text{دارة}) = \omega_0 (\text{مولد})$$

و لدينا :

$$\omega_0 (\text{مولد}) = 100 \text{ rad/s} \quad (\text{من عبارة التوتر الكهربائي المغذي للدارة})$$

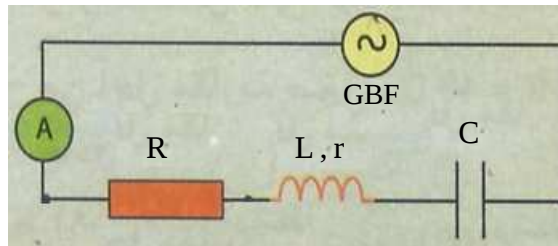
$$\omega_0 (\text{دارة}) = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

و منه :

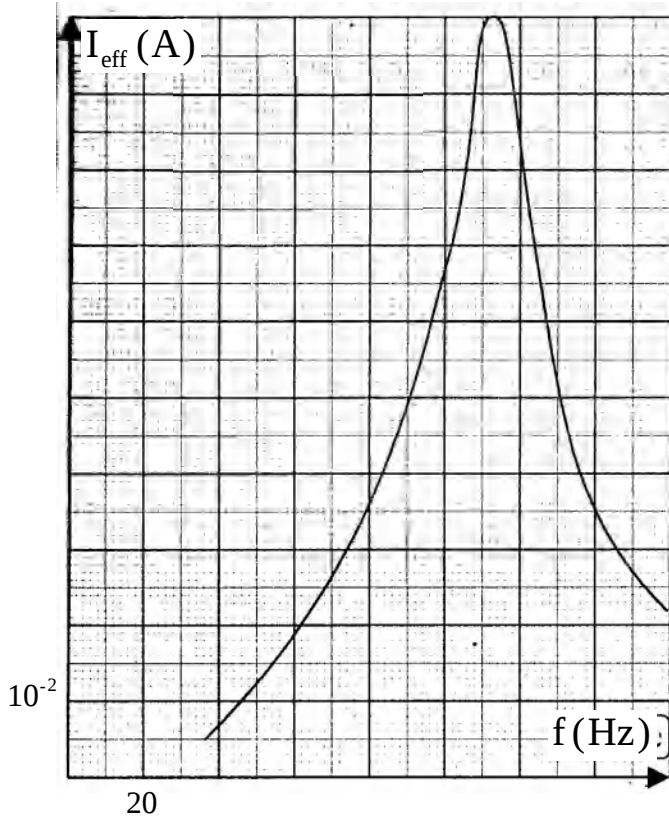
$$\frac{1}{LC} = (100)^2 \rightarrow C = \frac{1}{(100)^2 \cdot L} \rightarrow C = \frac{1}{(100)^2 \cdot 1} = 10^{-4} \text{ F}$$

التمرين (2) : (التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع) (**) :

تضم دارة كهربائية على التسلسل ناقل أومي مقاومته $R = 50 \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة سعتها $C = 5 \mu\text{F}$ ، نغذي الدارة بتوتر جيبي توتره المنتج $u_{\text{eff}} = 6\text{V}$.



من أجل قيم مختلفة للتواتر N نسجل قيم الشدة المنتجة I_{eff} للتيار المار في الدارة ، نرسم المنحنى البياني : $I_{\text{eff}} = f(N)$.



1- استنتج من البيان ما يلي :

أ- التواتر N_0 عند التجاوب .

ب- شدة التيار المنتجة عند التجاوب .

2- أحسب قيمتي المقاومة الداخلية للوشية r و ذاتيتها L .

3- عرف الشريط النافذ للدائرة .

4- استنتج من المنحنى عرض الشريط النافذ ΔN ثم أحسب

عامل الجودة Q .

5- احسب الاستطاعة الكهربائية المستهلكة عند التجاوب .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- أ- قيمة N_0 عند التجاوب :

عند التجاوب يبلغ المنحنى $I_{eff} = f(N)$ قيمة حدية و بالإسقاط :

$$N_0 = 5,6 \cdot 20 = 112 \text{ Hz}$$

ب- شدة التيار المنتجة عند التجاوب :

$$I_{eff0} = 10 \cdot 10^{-2} = 0,1 \text{ A}$$

2- قيمة r :

$$U_{eff} = Z_0 \cdot I_{eff0}$$

عند التجاوب تساوي ممانعة الدارة المقاومة المكافئة للدائرة أي :

$$Z_0 = R + r$$

و عليه :

$$U_{eff} = (R + r) I_{eff0} \rightarrow R + r = \frac{U_{eff}}{I_{eff0}} \rightarrow r = \frac{U_{eff}}{I_{eff0}} - R \rightarrow r = \frac{6}{0,1} - 50 = 10 \Omega$$

قيمة L :

عند التجاوب يكون :

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C}$$

و حيث أن :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow \omega_0 = 4\pi^2 f_0^2$$

يصبح :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 \cdot C} \rightarrow L = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot (112)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,4 \text{ H}$$

3- تعريف عرض الشريط النافذ :

عرض الشريط النافذ هو مجموعة التواترات التي من أجلها تكون : $I_{eff} \leq \frac{I_{eff0}}{\sqrt{2}}$

4- عرض الشريط النافذ :

$$\frac{I_{eff0}}{\sqrt{2}} = \frac{0,1}{\sqrt{2}} = 7,07 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

بالإسقاط :

- $f_1 = 5,1 \cdot 20 = 102 \text{ Hz}$
- $f_2 = 6,2 \cdot 20 = 124 \text{ Hz}$

إذن :

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 124 - 102 = 22 \text{ Hz}$$

- عامل الجودة :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{112}{22} = 5,1$$

5- الاستطاعة الكهربائية المستهلكة عند التجاوب :

عند التجاوب الاستطاعة المستهلكة تكون فقط فعل جول على شكل حرارة :

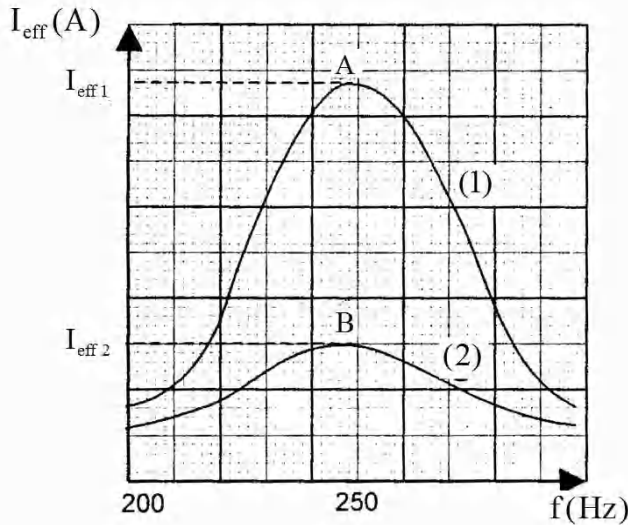
$$P_0 = (R + r) I_{\text{eff}}^2 = (50 + 10) \cdot (0,1)^2 = 0,6 \text{ W}$$

أو :

$$P_0 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}0} = 6 \cdot 0,1 = 0,6 \text{ W}$$

التمرين (3) : (التمرين : 022 في بنك التمارين على الموقع) () :**

تتألف دائرة كهربائية من ناقل أومي مقاومته متغيرة R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 8 \Omega$ ، مكثفة سعتها C ، مقياس أمبير مهمل المقاومة ، موصولة على التسلسل بين طرفي مولد للتوترات المنخفضة GBF التوتر المنتج بين طرفيه $U_{\text{eff}} = 51 \text{ V}$ و تواتره f متغير .



- من أجل $R = 22 \Omega$ ، نرسم المنحنى البياني (1) الممثل لتغيرات الشدة المنتجة I_{eff} بدلالة التواتر f .

- نكرر نفس التجربة من أجل $R = 77 \Omega$ ، فنحصل على المنحنى (2) .

- 1- ما هي الظاهرة الفيزيائية التي يمثلها المنحنيان (1) ، (2) ؟
- 2- أوجد قيمتي الشدتين $I_{\text{eff}1}$ ، $I_{\text{eff}2}$ المشار إليهما في الشكل .
- 3- اعتمادا على هاتين النتيجةين لـ $I_{\text{eff}1}$ ، $I_{\text{eff}2}$ و المنحنيين (1) ، (2) حدد سلم الرسم المعتمد .
- 4- اعتمادا على المنحنيين (1) ، (2) أي الدارتين أكثر نقاءا ؟ برر إجابتك ..

الأجوبة :

1- الظاهرة الفيزيائية التي يمثلها المنحنيان (1) ، (2) هي ظاهرة التجاوب الكهربائي .

2- قيمتي $I_{\text{eff}0-1}$ ، $I_{\text{eff}0-2}$:

$$I_{\text{eff}0} = \frac{U_0}{Z_0}$$

عند التجاوب تساوي ممانعة الدارة المقاومة المكافئة للدارة ، أي : $Z_0 = R + r$ و منه :

$$I_{\text{eff}0} = \frac{U_0}{R + r}$$

- بالنسبة للمنحنى (1) :

$$I_{\text{eff0-1}} = \frac{51}{22 + 8} = 1,7 \text{ A}$$

- بالنسبة للمنحنى (2) :

$$I_{\text{eff0-2}} = \frac{51}{77 + 8} = 0,6 \text{ A}$$

3- سلم الرسم :

$I_{\text{eff0-2}} = 0,6 \text{ A}$ توافقها في المنحنى (2) 1,5cm و عليه :

$$\begin{cases} 1,5 \text{ cm} \rightarrow 0,6 \text{ A} \\ 1 \text{ cm} \rightarrow X \end{cases}$$

$$X = \frac{0,6}{1,5} = 0,4$$

إذن سلم الرسم هو :

$$1 \text{ cm} \rightarrow 0,4 \text{ A}$$

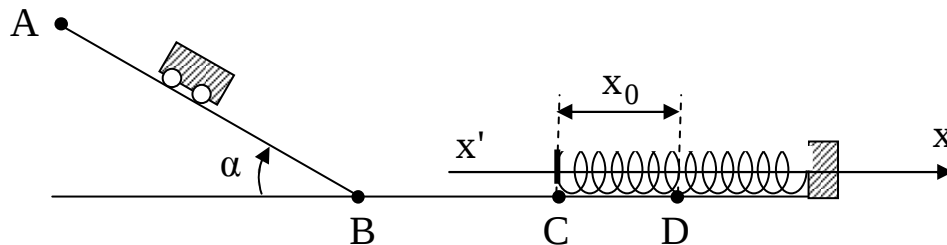
4- الدارة الأكثر نقاء :

الدارة الأكثر نقاء هو الدارة التي تتميز بعامل جودة أكبر و يكون المنحنى $I_{\text{eff}} = (f)$ أكثر حدة ، نلاحظ المنحنى (1) أكثر حدة و بالتالي الدارة الموافقة لهذه المنحنى هي الدارة الأكثر نقاء و ذات عامل جودة أكبر .

IV - تمارين متنوعة

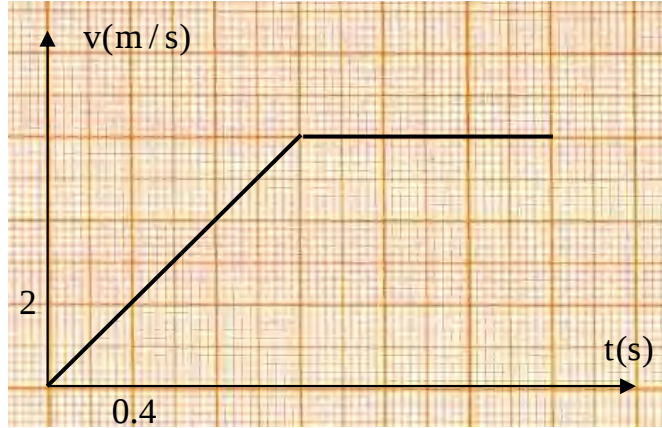
التمرين (11) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (**) :

ملاحظة : نهمل تأثير الهواء و كل الاحتكاكات ، يعطى : $g = 10 \text{ m/s}^2$.
من موضع A أعلى مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية α ، نترك بدون سرعة ابتدائية عربة صغيرة (S) كتلتها $m = 1 \text{ Kg}$ ، لتتحرك باتجاه الموضع B أسفل هذا المستوي ، بعدها تواصل حركتها على مستوي أفقي أملس BCD .



- 1- التمثيل البياني التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عتالة العربة (S) أثناء الانتقال من A إلى B ثم C .
- استنتج من البيان في كل طور : طبيعة الحركة ، المسافة المقطوعة ، تسارع الحركة .
- 2- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (عربة S) بين الموضعين A و B ، أوجد الزاوية α .

3- عند بلوغ العربة الموضع C بسرعة $v_0 = v_C$ تلتحم عند اللحظة $t = 0$ بنابض مرّن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K = 10 \text{ N/m}$ فتضغطه بمقدار X_0 عندما تبلغ الموضع D ، عندها تنعدم سرعتها و تغير جهة حركتها باتجاه الموضع C (الشكل) .



- مثل القوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة العربة (S) بين الموضعين C و D .
- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$ ، محدد طبيعة حركة العربة (S) .
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (عربة + نابض) أوجد قيمة X_0 .
- باعتبار الموضع C مبدأ للفواصل و علما أن السرعة عند هذا الموضع تكون موجبة ، أحسب :
 - النابض الذاتي ω_0 .
 - الدور الذاتي T_0 ، ثابت مرونة النابض K .
- أكتب المعادلة الزمنية لحركة العربة (S) ، ثم أرسم المنحنى $x(t)$ بشكل كافي .

الأجوبة :

1- طبيعة الحركة في كل طور :

• الطور الأول :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ و حيث أن $(a > 0 , v > 0)$ ، نستنتج أن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام .
- المسافة المقطوعة :

$$d = \frac{(3 \cdot 2)(3 \cdot 0.4)}{2} = 3.6 \text{ m}$$

- تسارع الحركة :

$$a = \frac{(3 \cdot 2)}{3 \cdot 0.4} = 5 \text{ m/s}^2$$

• الطور الثاني : $(1.2 \text{ s} \rightarrow 2.4 \text{ s})$:

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، و منه الحركة مستقيمة منتظمة .

- المسافة المقطوعة :

$$d = (3 \cdot 2)(3 \cdot 0.4) = 7.2 \text{ m}$$

- التسارع :

$$v = 0 \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0$$

2- الزاوية α :

- الجملة المدروسة : عربة (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، حيث :

$$W_{AB}(\vec{R}) = 0$$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B :

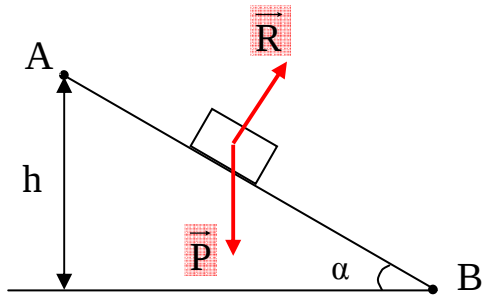
$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{CB}$$

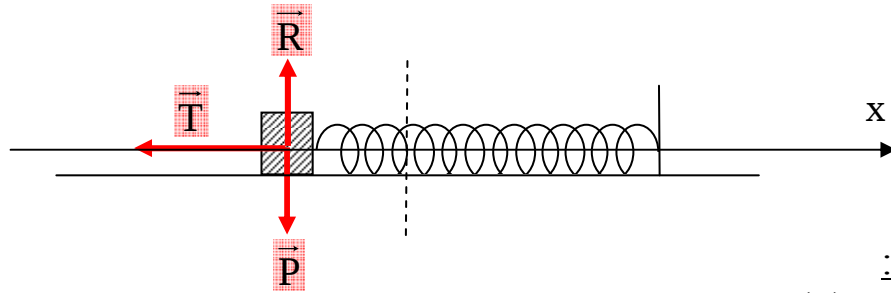
$$0 + m \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$$

$$g \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} v_B^2 \rightarrow 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha = v_B^2 \rightarrow \sin \alpha = \frac{v_B^2}{2 \cdot g \cdot AB}$$

$$\sin \alpha = \frac{(6)^2}{2 \cdot 10 \cdot 3.6} = 0.5 \rightarrow \alpha = 30^\circ$$



2- أ- تمثيل القوة المؤثرة على العربة :



ب- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .

- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ox :

$$-T = ma \rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخادمة .ج- قيمة X_0 :

- الجملة المدروسة : (جسم (S) + نابض) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .

- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، حيث : $W_{CD}(\vec{R}) = 0$ ، $W_{CD}(\vec{P}) = 0$.

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين C و D :

$$E_C + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_D$$

$$E_{CC} + E_{PeC} = E_{CD} + E_{PeD}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kX_0^2 \rightarrow mv_C^2 = kX_0^2 \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{mv_C^2}{k}}$$

اعتمادا على البيان $v_C = 6 \text{ m/s}$ و منه :

$$X_0 = \sqrt{\frac{1(6)^2}{10}} = 6.10^{-2} \text{ m}$$

- النبض الذاتي ω_0 :
من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10} = \sqrt{\pi^2} \rightarrow \omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

- الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

هـ- المعادلة الزمنية للحركة :

$$x = X_0 \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = 6 \cdot 10^{-2} \cos (\pi t + \varphi)$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = 0, v > 0$$

بالتعويض في $x(t)$:

$$0 = 6 \cdot 10^{-2} \cos (\pi (0) + \varphi)$$

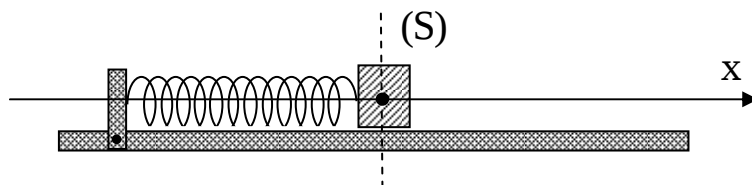
$$\cos \varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin \varphi < 0 \text{ (مرفوض)} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin \varphi > 0 \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

إذن :

$$x = 6 \cdot 10^{-2} \cos (\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

التمرين (12) : (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (**)

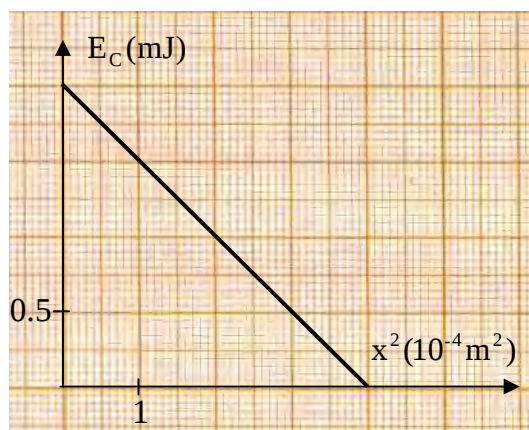
نواس مرن أفقي يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرنته k و جسم نقطي (S) كتلته m يستطيع أن يتحرك على مستوي أفقي دون احتكاك . نزيح الجسم (S) أفقيا بمقدار X_0 ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية ، نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن في الإتجاه الموجب :



- 1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن حركة مركز عطالة الجسم (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .
- 2- اكتب عبارة النبض الذاتي ω_0 و كذا الدور الذاتي T_0 بدلالة m ، k .
- 3- قسنا زمن 10 اهتزازات فوجدنا $\Delta t = 10$ s ، حدد قيمة الدور الذاتي T_0 و النبض الذاتي ω_0 .
- 4- بين أن الطاقة الحركية للجسم (S) يعطى العلاقة :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (X_0^2 - x^2(t))$$

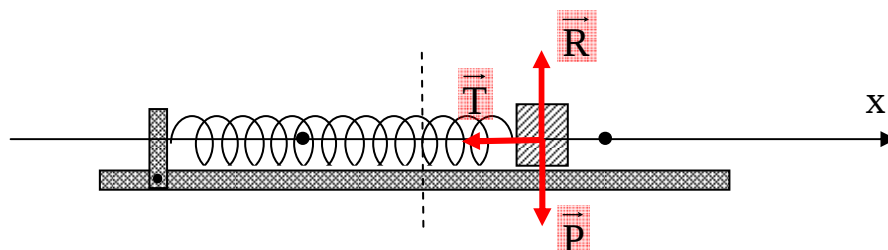
- 5- يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الحركية E_C بدلالة مربع المطال x^2 للجسم النقطي (S) أثناء حركته . حدد اعتمادا على البيان :



- أ- الكتلة m للجسم (s) و المطال الأعظمي X_0 .
- ب- الطاقة الكامنة المرونية الأعظمية E_{Pe} .
- ج- ثابت مرونة النابض k (بطريقتين) .
- د- المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.
- 6- أحسب سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند المرور بالمطال $x = 1$ cm .
- 7- أحسب لحظة المرور الثالث بالمطال $x = + X_0$.
- نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

- 1- اثبات طبيعة الحركة :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .

- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور OX :

$$-T = ma - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبى من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخادمة .

2- عبارة النبض الذاتي ω_0 :
من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- عبارة الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3- قيمة T_0 :

الدور الذاتي T_0 هو الزمن اللازم لانجاز اهتزازة واحدة و عليه :

$$\begin{cases} 10 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ اهتزازة} \\ T_0 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ اهتزازة} \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{1 \cdot 10}{10} = 1 \text{ s}$$

- قيمة ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} \rightarrow \omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$4- \underline{\text{إثبات}} \quad E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (X_0^2 - x^2(t))$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

بما أن الحركة اهتزازية جيبية غير متخادمة يكون :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

بالتعويض في عبارة E_C :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot X_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لدينا :

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 \rightarrow \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

يصبح لدينا :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot X_0^2 (1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (X_0^2 - X_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi))$$

و حيث أن :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow X_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = x^2$$

يصبح لدينا :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (X_0^2 - x^2)$$

5- أ- الكتلة m للجسم (S) و المطال الأعظمي X_0 :

بيانيا :

المنحنى $E_C = f(x^2)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$E_C = A x^2 + B \dots\dots\dots (1)$$

حيث : A هو معامل التوجيه ، B نقطة تقاطع المنحنى مع محور الترتيب .

نظريا :

اعتماد على العلاقة المتحصل عليها سابقا نكتب :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (X_0^2 - x^2) \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$E_C = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot X_0^2 \dots\dots\dots (2)$$

بالمطابقة :

$$\bullet -\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = A \rightarrow m = \frac{-2A}{\omega_0^2}$$

$$\bullet -\frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 = B \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{2B}{m \cdot \omega_0^2}}$$

من البيان :

$$\bullet A = -\frac{4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = -5$$

$$\bullet B = 4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3}$$

إذن :

$$m = \frac{-2(-5)}{(2\pi)^2} = 0.25 \text{ kg}$$

$$X_0 = \sqrt{\frac{2(2 \cdot 10^{-3})}{0.25 (2\pi)^2}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

ب- الطاقة الكامنة المرونية الأعظمية E_{pe} :- في الموضع الموافق لـ $x = X_0$ (المطال الأعظمي) يكون :

$$E_{C1} = 0 \quad (v = 0)$$

$$E_{pe1} = E_{pe0} \text{ (طاقة كامنة أعظمية)}$$

$$E_1 = E_{C1} + E_{pe1} = E_{pe0}$$

- في وضع التوازن الموافق لـ $x = 0$ يكون :

$$E_{C2} = E_{C0} \text{ (السرعة أعظمية)}$$

$$E_{pe2} = 0 \text{ (النايض في حالة راحة)}$$

$$E_2 = E_{C1} + E_{pe1} = E_{C0}$$

- بما أن الحركة اهتزازية غير متخامدة يكون طاقة الجملة (جسم + نايض) محفوظة لذلك يكون :

$$E_1 = E_2 \rightarrow E_{pe0} = E_{C0}$$

من البيان :

$$E_{C0} = 4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

إذن :

$$E_{pe0} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

ج- ثابت مرونة النايض k :الطريقة الأولى :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m \rightarrow k = (2\pi)^2 \cdot 0.25 = 10 \text{ N/m}$$

الطريقة الثانية :

$$E_{pe0} = \frac{1}{2} k X_0^2 \rightarrow k = \frac{2 E_{pe0}}{X_0^2} \rightarrow k = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 10 \text{ N/m}$$

د- المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(2\pi t + \varphi)$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = 0, v > 0$$

بالتعويض في $x(t)$:

$$0 = 2 \cdot 10^{-2} \cos(2\pi (0) + \varphi)$$

$$\cos \varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_{(0)} = -v_0 \cos \varphi < 0 \text{ (مرفوض)} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow v_{(0)} = -v_0 \cos \varphi > 0 \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة هي :

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(2\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

6- سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند المرور بالمطال $x = 1 \text{ cm}$:
عند وضع التوازن تكون السرعة أعظمية و عليه :

$$v = v_0 = \omega_0 X_0$$

$$v = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0.1256 \text{ ms}$$

7- لحظة المرور الثالث بالمطال $x = + X_0$:

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(2\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

بتعويض : $x = X_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ نجد :

$$2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \cos(2\pi t + \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \cos(2\pi t + \frac{3\pi}{2}) = 1$$

$$2\pi t + \frac{3\pi}{2} = 2\pi k \rightarrow 2t + \frac{3}{2} = 2k \rightarrow t + \frac{3}{4} = k \rightarrow t = k - \frac{3}{4}$$

$$\bullet k = 0 \rightarrow t = -\frac{3}{4} \text{ (مرفوض)}$$

$$\bullet k = 1 \rightarrow t = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 \text{ (المرور الأول)}$$

$$\bullet k = 2 \rightarrow t = 2 - \frac{3}{4} = 1.25 \text{ (المرور الثاني)}$$

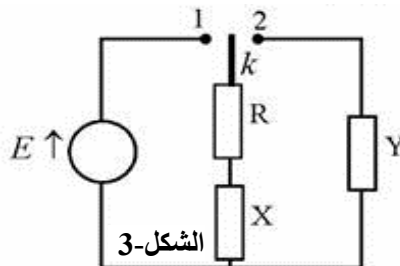
$$\bullet k = 3 \rightarrow t = 3 - \frac{3}{4} = 2.25 \text{ (المرور الثالث)}$$

إذن لحظة المرور الثالث هي : $t = 2.25 \text{ s}$.

التمرين (14) : (التمرين : 032 في بنك التمارين على الموقع) (**)

في حصة للأعمال المخبرية ، قدم الأستاذ لفوج من التلاميذ العناصر الكهربائية التالية : مولد كهربائي ذو توتر ثابت (E) و مقاومة داخلية مهملة ، بادلة (k) ،

ناقل أومي مقاومته ($R = 100 \Omega$) ، عنصر مجهول (X) ، عنصر مجهول (Y) ، راسم اهتزاز ذو ذاكرة .
من أجل تحديد و مميزات كل من العنصرين المجهولين (X) و (Y) أحدهما مكثف و الآخر وشيعة مقاومتها مهملة طلب الأستاذ من التلاميذ تحقيق التركيب التجريبي (الشكل-3) .



التجربة الأولى :

نضع البادلة في الوضع (1) في اللحظة $t = 0$ و باستعمال راسم الاهتزاز المهبطي نسجل التوتر $u_R(t)$ (الشكل-4) .
بالاعتماد على البيان :

- 1- حدد طبيعة العنصر (X) مع التعليل .
- 2- عين قيمة ثابت الزمن τ للدارة .
- 3- عين المقدار المميز للعنصر (X) .
- 4- استنتج قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد (E) .
- 5- أكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها المقدار $u_R(t)$.

التجربة الثانية :

باعتبار العنصر (X) مكثفة سعتها $C = 80 \mu F$ مشحونة كلياً ، نضع البادلة في الوضع (2) . فنلاحظ على شاشة راسم الإهتزاز المهبطي منحنى (الشكل-5) الذي يمثل تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

1- ما هي الظاهرة التي يلاحظها التلاميذ ؟

2- هل يسمح منحنى (الشكل-5) من معرفة طبيعة العنصر (Y) علل .

3- أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_C(t)$.

4- عين قيمة شبه الدور لـ $u_C(t)$.

5- أحسب المقدار المميز للعنصر (Y) .

6- أحسب الطاقة المخزنة في المكثفة

عند اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = 3T$ ، ماذا

تستنتج ؟ فسر ذلك .

يعطى : $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :التجربة الأولى :1- تحديد العنصر X :

أثناء شحن المكثفة تتناقص شدة التيار في ثنائي القطب RC وبالتالي تتناقص التوتر u_R بين طرفي الناقل الأمامي (لأن $u_R = R i$) ، إذن ثنائي القطب X عبارة عن مكثفة .

2- ثابت الزمن τ :

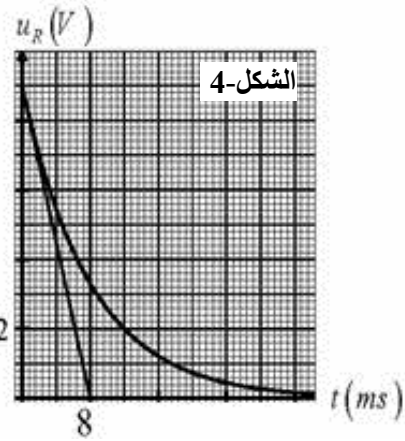
تمثل قيمة τ لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_R(t)$ مع محور الزمنية (0t) وبالتالي من المنحنى $u_R(t)$ يكون :

$$\tau = 8 \text{ ms}$$

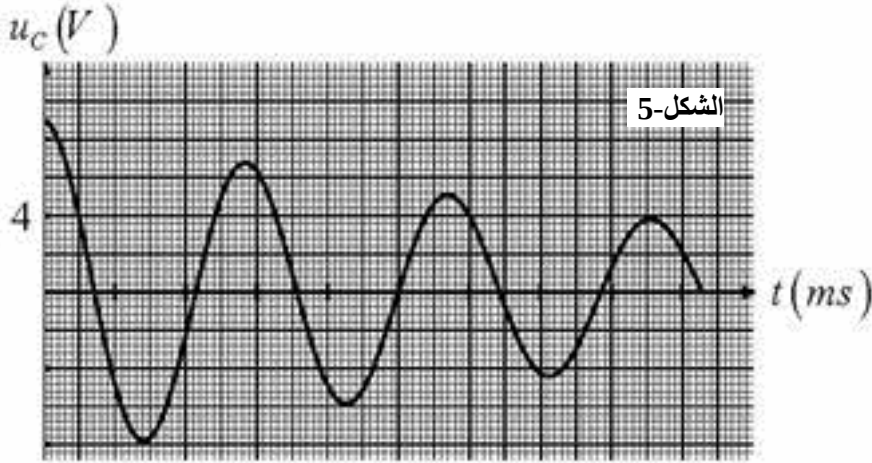
3- المقدار المميز للعنصر X (سعة المكثفة) :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R}$$

$$C = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{100} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$



الشكل-4



الشكل-5

4- قيمة E :

$$U_R(t=0) = 4,5 \times 2 = 9V$$

مد البيان

ولدينا

$$U_R = R i \rightarrow U_R(t=0) = R I_0$$

وحيث أن $I_0 = \frac{E}{R}$ نكتب :

$$U_R(t=0) = R \cdot \frac{E}{R} = E \rightarrow E = 9V$$

5- المعادلة التفاضلية التي يحققها المقدار $U_R(t)$ حسب قانون جمع التوترات :

$$U_R + U_C = E$$

$$U_R + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرف بالنسبة للزمن :

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{C} \dot{q} = 0$$

لدينا :

$$U_R = R i \rightarrow \dot{q} = \frac{U_R}{R}$$

ومنه :

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC} U_R = 0$$

التحري الثانية :

1- الظاهرة التي يلاحظها التلاميذ هي اهتزازات

حرارة كهربائية تشبه دورية

2- إمكانية معرفة العنصر X من منحنى الشكل 5 :

في الاهتزازات الكهربائية تفرغ المكثف طاقته في التوسعة والعكس أي تفرغ الوتيرة طاقته في التوسعة التي تنشأ عندئذ، بما أن العنصر X هو مكثف فحتمًا يكون العنصر X عبارة عن وسعة .

3- المعادلة التفاضلية التي يحققها $U_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$U_L + U_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + U_C = 0$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + U_C = 0$$

$$L \frac{d^2(C \cdot U_C)}{dt^2} + U_C = 0$$

$$L C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0 \rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

4- قيمة شبه الدور $u_c(t)$:

من منحنى الشكل 5 :

$$T = 2,9 \times 20 = 58 \text{ ms} = 5,8 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

5- المقدار المميز للعنصر γ (دالة الوشيجة L) :

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{(5,8 \cdot 10^{-2})^2}{4 \times 10 \times 8 \cdot 10^{-5}} = 1,05 \text{ H}$$

6- الطاقة المخزنة في المكثف عند $t=0$ ، $t_2 = 3T$:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} C u_c^2$$

التمثيل على منحنى الشكل 5 :

$$t_1 = 0 \rightarrow u_c = 9 \text{ V} \rightarrow E_c(t_1 = 0) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-5} (9)^2 = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$t_2 = 3T \rightarrow u_c = 3,8 \text{ V} \rightarrow E_c(t_2 = 3T) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-5} (3,8)^2 = 3,60 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

الاستنتاج :

نلاحظ $E_c(t_2) < E_c(t_1)$ ، نستنتج أن طاقة السار (RLC) غير محفوظة كما أنها تتناقص (اهتزازات متخامدة)

التفسير :

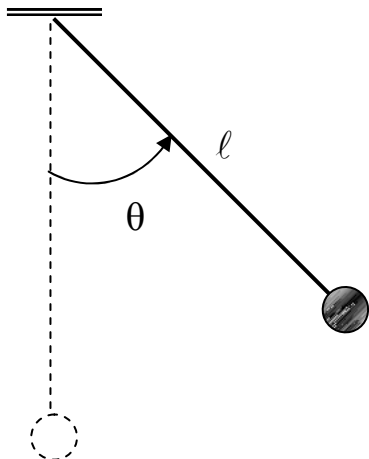
نفسر تناقص طاقة المكثف ، بتحويل جزء منها في التآكل الأوبي بفعل جول وهو سبب التخميد .

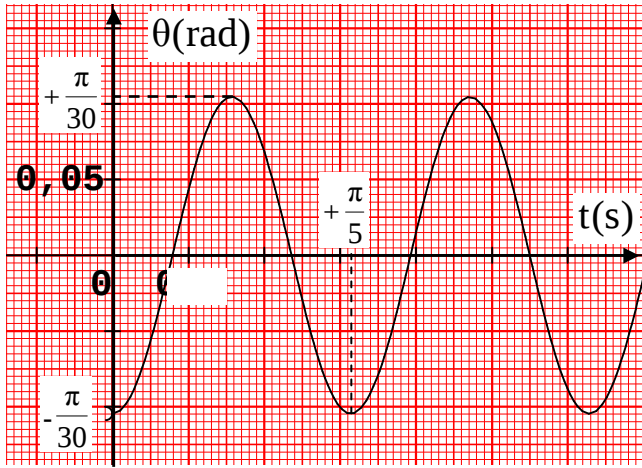
التمرين (15) : (بكالوريا 2004 - ع ط ح) (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (**)

1- يتألف نواس بسيط من خيط مهمل الكتلة طوله (ℓ) ، يحمل في طرفه الأسفل جسما (S) نقطيا كتلته $m = 18 \text{ g}$ ، يمكن لهذا النواس أن يهتز في المستوي الشاقولي حول المحور الأفقي المار من نقطة تعليقه (O) ، نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ صغيرة ، ثم نحرره عند اللحظة $t = 0$ بدون سرعة ابتدائية .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، استنتج طبيعة حركة النواس و جد عبارة دورها الذاتي T_0 بدلالة g ، ℓ .

2- يسمح تجهيز مناسب بتسجيل ثم رسم البيان الذي يمثل تغيرات المطال الزاوي θ بدلالة الزمن (الشكل) .





- أ- استنتج من البيان قيمة الدور الذاتي T_0 و السعة الزاوية θ_0 .
 ب- إذا علمت أن $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، أحسب طول النواس (ℓ) .
 ج- أكتب المعادلة الزمنية لحركة هذا النواس .
 4- نزيح النواس بزاوية كبيرة (θ_0) ثم نتركه بدون سرعة ابتدائية .
 أ- أوجد عبارة السرعة الخطية v للجسم النقطة (S) عند مروره بوضع التوازن بدلالة المقادير g ، ℓ ، θ_0 .
 ب- بين أن عبارة توتر الخيط عند المرور بوضع التوازن تعطى بالعلاقة :

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

- ج- إذا كانت شدة التوتر عند هذا الوضع 0.36 N ، استنتج الزاوية θ_0 .

الأجوبة :

1- طبيعة حركة النواس :

- الجملة المدروسة : (كرية) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G \rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور المماسي (ot) نجد :

$$- P \sin \theta = m a_t \rightarrow - m.g \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$$

$$- g \sin \theta = \frac{dv}{dt}$$

لدينا :

$$v = \ell \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$- g \sin \theta = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \rightarrow \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة يكون : $\sin \theta \approx \theta$ و منه يصبح لدينا :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، نستنتج أن حركة النواس اهتزازية جيبيه غير متخامدة .

- عبارة الدور الذاتي T_0 بدلالة g ، ℓ :
من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

و لدينا :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2- أ- قيمة T_0 ، θ_0 :
من البيان :

$$\bullet T_0 = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$\bullet \theta_0 = \frac{\pi}{30} \text{ rad}$$

ب- قيمة ℓ :
مما سبق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2 \cdot \ell}{g} \rightarrow \ell = \frac{T_0^2 \cdot g}{4\pi^2} \rightarrow \ell = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 \cdot 10}{4\pi^2} \rightarrow \ell = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

ج- المعادلة الزمنية :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\bullet \theta_0 = \frac{\pi}{30} .$$

$$\bullet \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$\bullet t = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{30} \quad (\text{من البيان})$$

بالتعويض :

$$-\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{30} \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = -1 \rightarrow \varphi = \pi$$

و منه المعادلة الزمنية تكون كما يلي :

$$\theta = \frac{\pi}{30} \cos(\omega_0 t + \pi)$$

4- أ- عبارة السرعة عند وضع التوازن بدلالة g ، ℓ ، θ_0 :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$ حيث

: $W_{AB}(\vec{T}) = 0$.

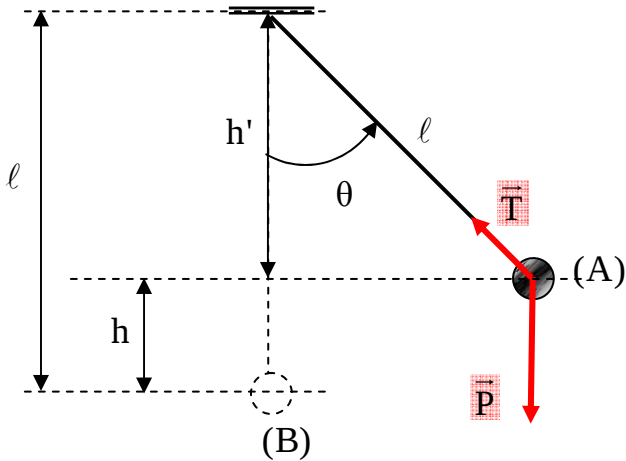
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$\square E_{CA} = 0 \quad (v_A = 0)$$

$$\square E_{CB} = \frac{1}{2} m v_B^2$$



$$\square W_{AB}(\vec{P}) = m.g.h$$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = \ell - h' \\ \cos \theta_0 = \frac{h'}{\ell} \end{cases} \rightarrow h' = \ell \cos \theta_0 \rightarrow h = \ell - \ell \cos \theta_0 = \ell (1 - \cos \theta_0)$$

و منه :

$$W_{AB}(\vec{P}) = m.g.\ell (1 - \cos \theta_0)$$

يصبح لدينا :

$$0 + m.g.\ell (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$2g.\ell (1 - \cos \theta_0) = v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2g.\ell (1 - \cos \theta_0)}$$

و هي عبارة سرعة الجسم النقطة (S) عند مروره بوضع التوازن B .

ب- عبارة توتر الخيط عند المرور بوضع التوازن :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.

- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

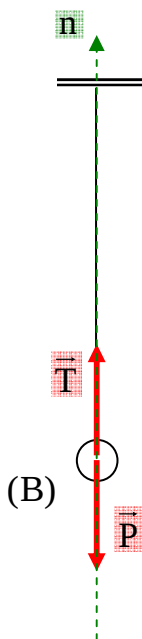
$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور الناظمي (on) نجد :

$$- P + T = m a_n$$

$$- m g + T = m \frac{v_B^2}{\ell}$$

مما سبقا وجدنا : $v_B = \sqrt{2g.\ell (1 - \cos \theta_0)}$ و منه :



$$-mg + T = m \frac{2g \cdot \ell (1 - \cos \theta_0)}{\ell}$$

$$-mg + T = 2mg (1 - \cos \theta_0)$$

$$-mg + T = 2mg - 2mg \cos \theta_0$$

$$T = 3mg - 2mg \cos \theta_0 \rightarrow T = mg(3 - 2\cos \theta_0)$$

ج- قيمة θ_0 من أجل $T = 0.36 \text{ N}$
من العلاقة السابقة :

$$T = 3mg - 2mg \cos \theta_0$$

$$2mg \cos \theta_0 = 3mg - T \rightarrow \cos \theta_0 = \frac{3mg - T}{2mg}$$

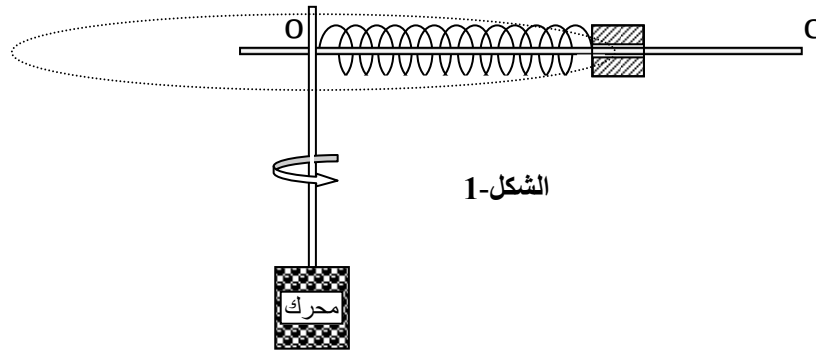
$$\cos \theta_0 = \frac{(3 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 10) - 0.36}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 0.5 \rightarrow \theta_0 = 60^\circ$$

التمرين (16): (التمرين : 018 في بنك التمارين على الموقع) (**)

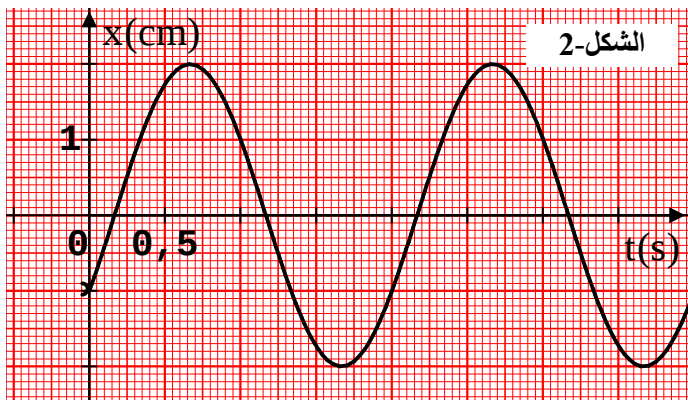
نلف حول ساق أفقية (oc) نابض مرنا كتلته مهملة ، حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $k = 40 \text{ N/m}$ طوله و هو في حالته الطبيعية $\ell_0 = 20 \text{ cm}$.

نثبت إحدى نهايتيه في النقطة (o) و في النهاية الأخرى للنابض يلحم جسم صلب (S) كتلته $m = 500 \text{ g}$ يمكنه الانزلاق وفق الساق (oc) دون احتكاك (الشكل-1).

1- يدير محرك بسرعة ثابتة الجملة (الساق oc - النابض - الجسم الصلب) في مستوي أفقي حول محور شاقولي (yy') ، فيأخذ الجسم (S) حركة دائرية منتظمة حول النقطة (o) بسرعة ثابتة $v = 1 \text{ m/s}$.



الشكل-1



الشكل-2

أ- أوجد قيمة استطالة النابض أثناء الحركة علما أن ثابتة ب- أحسب شدة توتر النابض .

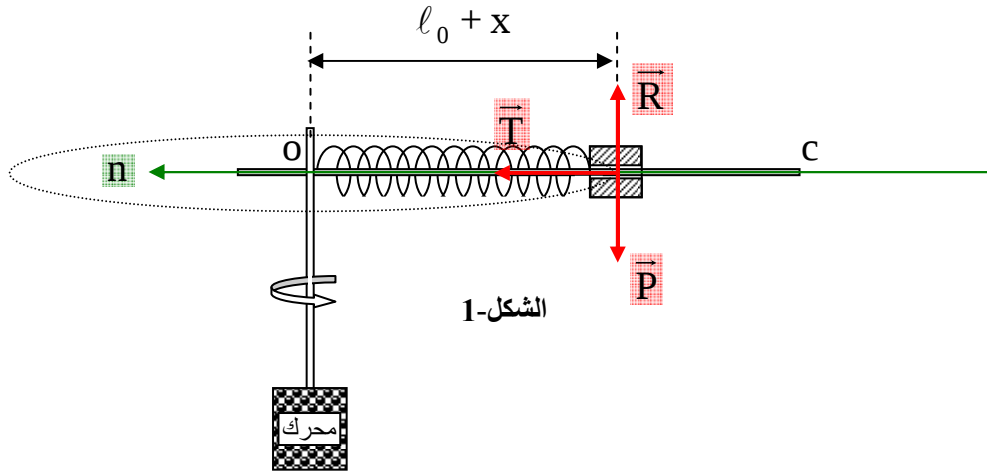
2- نوقف الجملة السابقة عن الدوران ، و نسحب الجسم (S) أفقيا ثم نتركه ، فيكتسب حركة اهتزازية جيبية غير متخامة ، يمثل منحنى (الشكل-2) تغيرات المطال x بدلالة الزمن .

أ- اعتمادا على المنحنى البياني عين قيمتي الدور الذاتي T_0 و التواتر الذاتي ω_0 .

ب- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.

الأجوبة :

1- أ- استطالة النابض :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوة الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة توتر النابض $\vec{T}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور الناظمي (on) :

$$T = m a_n$$

$$k x = m \frac{v^2}{(\ell_0 + x)}$$

$$40 x = 0.5 \frac{(1)^2}{(0.2 + x)}$$

$$40 x = \frac{0.5}{(0.2 + x)}$$

$$8 x + 40 x^2 = 0.5 \rightarrow 40 x^2 + 8 x - 0.5 = 0$$

$$\Delta = (8)^2 - 4(40)(-0.5) = 144 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 12$$

$$x_1 = \frac{-8 - 12}{2 \cdot 40} = -0.25 \text{ m} \quad (\text{مرفوض})$$

$$x_1 = \frac{-8 + 12}{2 \cdot 40} = 0.05 \text{ m} \quad (\text{مقبول})$$

إذن : $x = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$ و هي استطالة النابض أثناء دوران الجسم (S) .

ب- شدة توتر النابض :

$$T = k x$$

$$T = 40 \cdot 0,05 = 2 \text{ N}$$

2- أ- قيمة T_0 ، ω_0 :
من البيان :

$$\bullet T_0 = 4 \cdot 0,5 \rightarrow T_0 = 2 \text{ s}$$

$$\bullet \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

ب- المعادلة الزمنية :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\bullet X_0 = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\bullet \omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

من البيان أيضا :

$$t = 0 \rightarrow x = 10^{-2} \text{ m} \rightarrow v > 0$$

بالتعويض في $x(t)$:

$$- 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi(0) + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = 0.5 \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{2\pi}{3} & \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin\varphi < 0 \text{ (مرفوض)} \\ \varphi = \frac{4\pi}{3} & \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin\varphi > 0 \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

**** الأستاذ : فرقاني فارس ****
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr

نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها .
وشكرا مسبقا

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

www.sites.google.com/site/faresfergani