

الواجب التبرلي الثاني

التمرين الأول

الجزء الأول

1. عين حلول المعادلة التفاضلية : $y' - 2y = 0$ (1) .
2. a و b عدنان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x) = (ax + b)e^x$.
 أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة $y' - 2y = xe^x$ (2) .
 ب- برهن أن v تكون حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $(v + u)$ حل للمعادلة (2) .
 ج- استنتج جميع حلول المعادلة (2) .
 د- عين الحل الخاص للمعادلة (2) و الذي ينعدم من أجل $x = 0$.

الجزء الثاني

- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1. أدرس تغيرات الدالة g .
 2. برهن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $-1.6 < \alpha < -1.5$.
 3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثالث

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (فسر النتيجة هندسيا) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 3. بين أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
 4. أرسم (C_f) .
 5. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = e^{-2x} - (1-x)e^{-x}$ و (C_h) تمثيلها البياني .
 • بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) .
 6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) + m = 0$.



لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ : $g(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln(x)$:

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 10 \text{ cm}$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2. أحسب من أجل كل x من $]0,1[$: $g'(x)$ ثم بين أن $g''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ ، عين إشارة $g''(x)$.

3. أدرس تغيرات الدالة g' .

4. استنتج أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha < \beta$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$.

5. شكل جدول تغيرات الدالة g .

6. أحسب $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

7. أرسم (C_g) ، يعطى $g(\alpha) \approx 0.15$ و $g(\beta) \approx -0.15$.

8. لتكن الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ : $\varphi(x) = -g(x)$.

• بين كيف يمكن رسم (C_φ) انطلاقاً من (C_g) .



لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \ln(x) \times \ln(1-x) ; x \in]0,1[\\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 10 \text{ cm}$.

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ، ماذا تستنتج؟

2. بين أنه من أجل كل $x \in [0,1]$: $f(1-x) = f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

4. بين أنه من أجل كل x من $]0,1[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1-x)}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. أرسم (C_f) .

الأستاذ: فلول ع

قد لا يبلغ الرد الفجر إلا عن طريق الليل

1. تعيين حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 0$: هي الدوال $x \mapsto Ce^{2x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$.

2. أ- تعيين المرددين a و b : u حلا للمعادلة $y' - 2y = xe^x$ معناه $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ أي

$$ae^x + (ax + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \quad \text{أي} \quad (-ax + a - b)e^x = xe^x \quad \text{بالمطابقة نجد: } a = -1 \text{ و } b = -1.$$

ومنه $u(x) = (-x - 1)e^x$

ب- برهان أن v حل للمعادلة (1) : $(v + u)$ حل للمعادلة (2) معناه $(u + v)' - 2(u + v) = xe^x$ أي

$$u' - 2u + v' - 2v = xe^x \quad \text{و منه نستنتج أن } v' - 2v = 0 \text{ أي } v \text{ حل للمعادلة (1).}$$

ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2) : نضع $f = u + v$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) :

$$f(x) = \overbrace{(-x - 1)e^x}^u + \overbrace{Ce^{2x}}^v \quad \text{حيث } C \in \mathbb{R}$$

د- تعيين الحل الخاص : $f(0) = (-0 - 1)e^0 + Ce^{2 \cdot 0} = 0$ أي $C = 1$ ومنه $f(x) = (-x - 1)e^x + e^{2x}$

1. دراسة تغيرات الرالة g :

أ- النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \left(2 - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_0 - \underbrace{\frac{2}{e^x}}_0 \right) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \left(2 \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} - 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{2e^x}_0 - \underbrace{x}_{-(-\infty)} - 2 = +\infty$

ب- اتجاه تغير الرالة : $g'(x) = 2e^x - 1$ ومنه $g'(x) = 0$ معناه $2e^x - 1 = 0$ أي $e^x = \frac{1}{2}$ أي $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

$$\begin{aligned} g(-\ln 2) &= 2e^{-\ln 2} - (-\ln 2) - 2 \\ &= 2e^{\ln \frac{1}{2}} - (-\ln 2) - 2 \\ &= 1 + \ln 2 - 2 \\ &= -1 + \ln 2 \approx -0.31 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\ln 2)$	$+\infty$

ج- جدول التغيرات :

2. برهان أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين : حل معدوم أي $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 0$ و الآخر $-1.6 < \alpha < -1.5$: لدينا الدالة g

مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty, -\ln 2[$ فهي كذلك على المجال $]-1.6, -1.5[$ و $g(-1.6) \times g(-1.5) = (0.004) \times (-0.05) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $-1.6 < \alpha < -1.5$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

1. تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left[1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right] = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^{2x}}_0 - \underbrace{xe^x}_0 + \underbrace{e^x}_0 = 0$

التفسير الهندسي: وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$.

2. تبيان أن: $f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + e^x(x+1)] = 2e^{2x} - xe^x - 2e^x = e^x \underbrace{(e^x - x - 2)}_{g(x)} = e^x \times g(x)$

و منه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ لأن $e^x > 0$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

جدول تغيرات الرالة:

3. تبيان أن: $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ لدينا $g(\alpha) = 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$ و لدينا من جهة أخرى:

$$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha = (e^\alpha)^2 - (\alpha+1)e^\alpha = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -\left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}\right)$$

مصر $f(\alpha)$: $-1.6 < \alpha < -1.5$ أي $\begin{cases} (-1.6)^2 > \alpha^2 > (-1.5)^2 \\ 2(-1.5) > 2\alpha > 2(-1.6) \end{cases}$ أي

$$-0.11 < f(\alpha) < 0.24 \text{ أي } -\left(\frac{-3+(-1.6)^2}{4}\right) < -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} < -\left(\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4}\right)$$

4. الرسم:

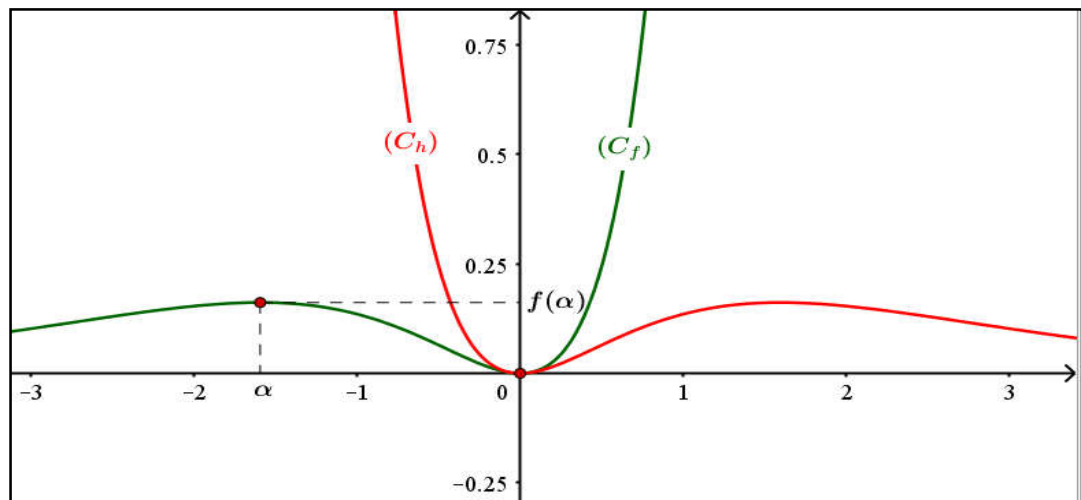
5. نلاحظ أن $h(x) = e^{-2x} - (1-x)e^{-x} = e^{2(-x)} - (1+(-x))e^{(-x)} = f(-x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

6. الناقشة البيانية: $f(x) + m = 0$ أي $f(x) = -m$ ومنه إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = -m$

♦ $-m < 0$ أي $m > 0$: لا توجد حلول ♦ $m = 0$: حل مضاعف ♦ $0 < -m < f(\alpha)$ أي

$-f(\alpha) < m < 0$: ثلاث حلول ♦ $-m = f(\alpha)$ أي $m = -f(\alpha)$: حلين أحدهما موجب و الآخر حل مضاعف

سالب ♦ $-m > f(\alpha)$ أي $m < -f(\alpha)$: حل وحيد موجب.



1. حساب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{(1-x) \ln(1-x)}_{0^+ \ln 0^+ = 0} - \underbrace{x \ln(x)}_{1 \ln 1 = 0} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(1-x) \ln(1-x)}_0 - \underbrace{x \ln(x)}_0 = 0$

2. تبيان أن: $g'(x) = \left[-1 \ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x} \right) \times (1-x) \right] - \left[\ln(x) + \frac{1}{x} \times x \right] = -\ln(1-x) - \ln(x) - 2$

و $g''(x) = -\left(\frac{-1}{1-x} \right) - \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x - (1-x)}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(1-x)}$

إشارة $g''(x)$: إشارة $g''(x)$ من إشارة $2x-1$ لأن $x(1-x) > 0$ في المجال $]0,1[$ ومنه $2x-1=0$ أي $x = \frac{1}{2}$.

3. دراسة تغيرات الرالة g' :

النهايات: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\underbrace{-\ln(1-x)}_{-\infty} - \underbrace{\ln(x)}_{\ln(1)=0} - 2 \right) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{-\ln(1-x)}_{-\ln(1-0)=0} - \underbrace{\ln(x)}_{-\infty} - 2 \right) = +\infty$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= \ln(2) + \ln(2) - 2$$

$$= -2 + 2\ln 2 \approx -0.61$$

x	0	1/2	1
$g''(x)$		-	+
$g'(x)$	$+\infty$	$-2 + 2\ln 2$	$+\infty$

جبرول تغيرات الرالة g' :

4. استنتاج أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلين:

⊗ الدالة g' مستمرة و متناقصة تماما على $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty$ و $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 2\ln 2 < 0$ ، فإنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0 < \alpha < 0.5$ يحقق $g'(\alpha) = 0$.

⊗ الدالة g' مستمرة و متزايدة تماما على $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ ، $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 2\ln 2 < 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = +\infty$ ، فإنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0.5 < \beta < 1$ يحقق $g'(\beta) = 0$.

x	0	α	β	1	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

:

$g'(x)$

إشارة

إشارة $g'(x)$:

5. جبرول تغيرات الرالة g :

x	0	α	$\frac{1}{2}$	β	1
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	0	$g(\alpha)$	0	$g(\beta)$	0

x	0	1/2	1
$g(x)$	+	0	-

6. حساب: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، إشارة $g(x)$:

7. $\varphi(x) = -g(x)$ معناه أن (C_φ) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.

الجزء الثاني

1. تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x) \times \ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\ln(x)}_{-\infty} \times \underbrace{\frac{\ln(1-x)}{x}}_{-1} = +\infty$

⚡ لاحظ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = [\ln(1-x)]' = \frac{-1}{1-x} = -1$ باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \ln(1-x)$ عند 0.

نستج: أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين.

2. تبيان أن: في المجال $]0,1[$: $f(1-x) = \ln(1-x) \times \ln(1-(1-x)) = \ln(x) \times \ln(1-x) = f(x)$

و لدينا من أجل $x=0$ أو $x=1$ تبقى المساواة محققة: $f(1-0)=f(0)=0$ ومنه من أجل $x \in [0,1]$:

$f(1-x) = f(x)$ إذن نستج أن (C_f) يقبل محور تناظر معادلته $x = \frac{1}{2}$.

⚡ لاحظ: $x = \frac{1}{2}$ محور تناظر معناه: $f\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) = f(x)$ أي $f(1-x) = f(x)$.

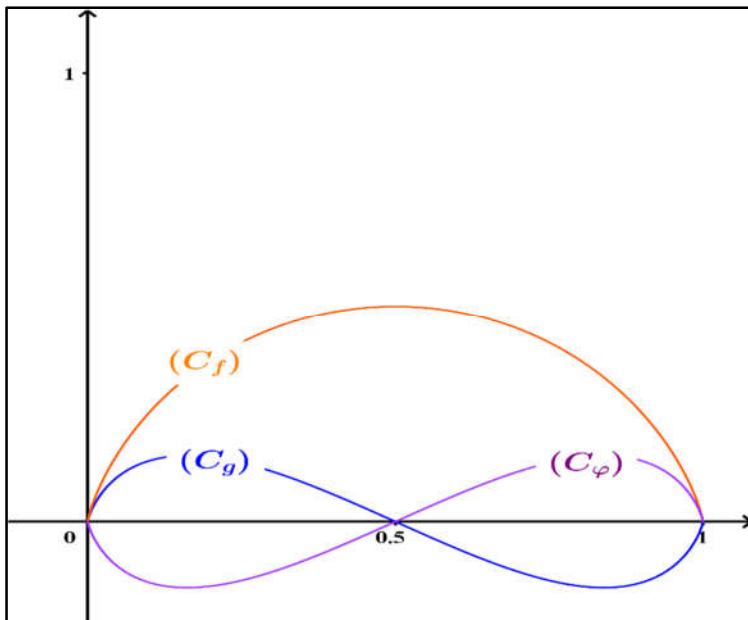
3. حساب: $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) \times \ln(1-x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{x}{x}}_0 \times \ln(x) \times \ln(1-x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{x \ln(x)}_0 \times \underbrace{\frac{\ln(1-x)}{x}}_{-1} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x) \times \ln(1-x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x-1} \times \ln(x) \times \ln(1-x) \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{x-1}}_1 \times \underbrace{[-(1-x) \ln(1-x)]}_0 \right) = 0$

⚡ لاحظ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = [\ln(x)]' = \frac{1}{x} = 1$ باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \ln(x)$ عند 1.

4. تبيان أن: $f'(x) = \frac{1}{x} \times \ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x} \right) \times \ln x = \frac{(1-x) \ln(1-x) - x \ln(x)}{x(1-x)} = \frac{g(x)}{x(1-x)}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x(1-x) > 0$ في المجال $]0,1[$.



الرسم

جول تغيرات الرالة f:

x	0	1/2	1
f'(x)		+	-
f(x)	0	$(\ln 2)^2$	0

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = (-\ln(2)) \times (-\ln(2)) = (\ln 2)^2 \approx 0.48$$