

التحضير الجيد لبكالوريا 2021

الأستاذ : مزيان محمد

3AS

درس مفصل
و تمارين محلولة
لجميع الشعب العلمية

 : Meziane Maths

 : Meziane Maths

 : Meziane Maths

 : meziane.probastat@gmail.com

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021

www.dzexams.com

المجلة الشاملة للدراسة الأسيية النديرة

2	1 الدالة الأسية
3	2 حلول المعادلة : $f' = kf$
4	1.2 دوال تحول المجموع إلى جداء
4	3 اتجاه تغير الدالة الأسية
5	1.3 النهايات
5	2.3 جدول التغيرات
6	3.3 التمثيل البياني
6	4 حل معادلات ومتراجحات
7	5 دراسة الدالة $exp \circ u$
7	1.5 النهايات
8	2.5 اتجاه التغير
8	3.5 المشتقة
9	6 تمارين محلولة
9	1.6 تمارين تدريبية
31	2.6 تمارين تجريبية
52	7 التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020
52	1.7 شعبة العلوم التجريبية
60	2.7 شعبة التقني الرياضي
66	3.7 شعبة الرياضيات

الأستاذ : مزيان محمد

مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = f$ و $f(0) = 1$ نرسم إلى هذه الدالة بالرمز " exp " ونسميها الدالة الأسية النيبيرية

مبرهنة

الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

برهان

نعرف الدالة g على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = exp(x) \cdot exp(-x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x) = exp(x) \cdot exp(-x) - exp(x) \cdot exp(-x) = 0$ و منه g دالة ثابتة و عليه :
بما أن : $exp(0) = 1$ فإن : $g(x) = 1$ و عليه : $exp(x) \cdot exp(-x) = 1$ و منه : exp لا تنعدم أبدا .

لنبرهن أن الدالة exp موجبة تماما بالخلف :

نفرض وجود عدد x_0 بحيث $exp(x_0) \leq 0$ في المجال $[0; x_0]$

أو المجال $[x_0; 0]$. الدالة exp قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة .

ولدينا : $exp(x_0) < 0$ و $exp(0) > 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $exp(x) = 0$ تقبل حلا في هذا المجال و هذا يناقض الفرض لأن exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

و منه لا يوجد أي عدد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $exp(x_0) < 0$ و عليه $exp(x) > 0$ من أجل كل عدد طبيعي x .

نتائج

$$exp(0) = 1$$

$$exp'(x) = exp(x)$$

خواص جبرية

$$exp(x) \neq 0$$

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$$

$$exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$$

$$exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$$

$$exp(nx) = [exp(x)]^n$$

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e \approx 2.718281828$. من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n$ ، لدينا إذن : من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $exp(n) = e^n$. اصطلاحا نرسم، من أجل كل عدد حقيقي x ، إلى $exp(x)$ بـ e^x .

العدد e والترميز e^x

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad 4$$

$$e^0 = 1 \quad 1$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad 5$$

$$\exp'(x) = e^x \quad 2$$

$$e^{nx} = (e^x)^n \quad 6$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad 3$$

مثال تطبيقي

بسط العبارات التالية :

$$1) (e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$$

$$2) \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}} = e^{2x+1-(-2x)} = e^{2x+1+2x} = e^{4x+1}$$

$$3) \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$$

$$4) \left(\frac{(e^x)^3 \times e^{-6x}}{e^{4-x}} \right)^2 = \left(\frac{(e^{3x}) \times e^{-6x}}{e^{4-x}} \right)^2 = \left(\frac{e^{3x-6x}}{e^{4-x}} \right)^2 = \left(\frac{e^{-3x}}{e^{4-x}} \right)^2 = (e^{-3x-(4-x)})^2 = (e^{-3x-4+x})^2 = (e^{-2x-4})^2 = e^{-4x-8}$$

$$5) \sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$6) \sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}} = \sqrt{3e^{x-1-(2x+1)}} = \sqrt{3e^{x-1-2x-1}} = \sqrt{3e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times (e^{-x-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \times e^{\frac{-x-2}{2}}$$

2 حلول المعادلة : $f' = kf$

الحل : $f(x) = e^{kx}$

مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = kf$

و $f(0) = 1$ هي الدالة e^{kx}

برهان

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ ، كما أن $f(0) = e^0 = 1$ وبالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$

الوحدانية : نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$ ، نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - g(x)kf(x)}{[f(x)]^2} = 0$ إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$ مع $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = 1$ وعليه $f(x) = g(x)$ إذن الدالة f موجودة ووحيدة.

مبرهنة

الدوال غير المعدومة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل عددين حقيقيين x و y ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ ،
هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي

3 إتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$

برهان

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2$ ، وبما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x > 0$.

خاصية

الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

برهان

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp'(x) = e^x > 0$ ومنه e^x متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا : $e^a < e^b$ معناه أن $a < b$
و $e^a = e^b$ يعني أن $a = b$
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$
و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

خواص

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (2)$$

برهان

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - x$. من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = e^x - 1$ ،
وبما أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 1$ ،
إذن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $e^x \geq x$ أي $e^x \geq x$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2 من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

3 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = e^x - x$ و
 $f''(x) = e^x - 1$. بما أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f''(x) \geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ وعلماً أن
 $f'(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ ومنه فالدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ وعلماً أن
 $f(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) \geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ ،
وبالتالي فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة وعلماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ فإن
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

4 لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ومنه نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

5 نضع $X = -x$. إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ ومنه: $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$

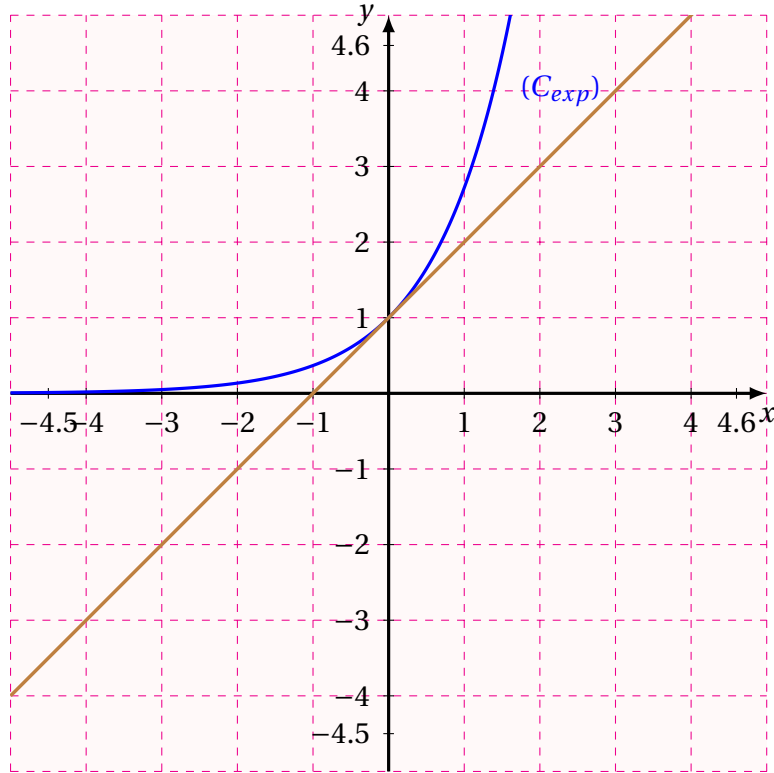
6 من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = \exp'(0) = 1$ إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

جدول التغيرات 2.3

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		+	
e^x		0	$+\infty$

التمثيل البياني



المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$.
 لدينا $exp'(0) = exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$.
 من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = exp'(0) = 1$ إذن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4 حل معادلات ومتراجحات

الطريقة

المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$
 المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تعني $u(x) < v(x)$

مثال تطبيقي

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1 $e^{2x} + 3 = 0$

2 $e^{-2x+1} - 1 = 0$

3 $e^{-2x-1} - e^x < 0$

الحل

1. $e^{2x} = -3$ تعني . هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^{2x} > 0$. إذن $S = \emptyset$.

2. $e^{-2x+1} = 1$ أي $e^{-2x+1} = e^0$ أي $-2x+1 = 0$ و منه $\frac{1}{2}$ إذن $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. $e^{-2x-1} < e^x$ أي $-2x-1 < x$ أي $x > -\frac{1}{3}$ و منه $S = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

4. $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$ بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + X - 2 \leq 0$ جذراً كثير الحدود $X^2 + X - 2$ هما -2 و 1

و منه $X^2 + X - 2 \leq 0$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$

$X < -2$ تعني $e^x < -2$ هذه المتراجحة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^x > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]0; +\infty[$.

دراسة الدالة $\exp \circ u$

5

1.5 النهايات

مبرهنة

a, b, c وتمثل أعداداً حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

نعتبر الدوال التالية u, e^x و f حيث $f = \exp \circ u$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} e^x = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x+2}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+2) = -\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

مثال تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{-3x^3+2}$

أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x^3+2} = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 2) = -\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x^3+2} = 0$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2.5 اتجاه التغير

خاصية

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغير على المجال I

برهان

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

مثال

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^2-3}$
- نلاحظ أن $f = \exp \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = x^2 - 3$
- بما أن الدالة u متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$.
- وبما أن الدالة u متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

3.5 المشتقة

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن للدالة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ,

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

برهان

- إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما أن الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:
- من أجل كل x من I , $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp)'[u(x)] = u'(x) \times (\exp)[u(x)]$
- أي من أجل كل x من I , $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

أمثلة

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{2x}$ هي $f'(x) = 2.e^{2x}$
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = e^{-5x+3}$ هي $g'(x) = -5.e^{-5x+3}$

مشتقة الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = e^{x^2+x+1}$ هي $h'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$.

مشتقة الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $k(x) = e^{\frac{1}{x}}$ هي $k'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

6 تمارين محلولة

1.6 تمارين تدريبية

التمرين 01

ضع العلامة ✓ أمام كل جملة صحيحة و العلامة ✗ أمام كل جملة خاطئة.

1 $e^{-3} < 0$

2 $e^{-5} = -e^5$

3 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$ يقطع حامل محور الفواصل .

4 $\sqrt{e^{2x}} = e^x$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

6 الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي : $x \mapsto e^{3x}$.

7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$

8 إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^x \geq e^2$

9 إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^x \leq 0$

10 من أجل كل عدد حقيقي $x : e^x \cdot e^{-x} = 1$

11 إشارة : $(x-1)e^x$ هي نفس إشارة $x-1$

12 من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$

14 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

15 $e^x - e = e^{x-1}$

16 $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

17 الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

18 ليس للمترابحة $e^{x^2-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$

19 الدالة : $x \mapsto e^{x^2-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$

20 $e^{-\frac{1}{2}} < 1$

الحل

✓ 17

. ✗ 13

. ✗ 9

✓ 5

. ✗ 1

. ✗ 18

✓ 14

✓ 10

. ✗ 6

. ✗ 2

. ✗ 19

. ✗ 15

✓ 11

✓ 7

. ✗ 3

. ✓ 20

. ✓ 16

. ✗ 12

. ✓ 8

. ✓ 4

التمرين 02

بسط ما يلي :

$$\frac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2} \quad 5$$

$$\frac{1}{(e^{-x})^2} \quad 3$$

$$e^{3x} \cdot e^{-2x} \quad 1$$

$$e^x (e^{-x} + e^{2x}) \quad 6$$

$$\frac{e^{4x+1}}{e^{2x} \cdot e^{-1}} \quad 4$$

$$e^x \cdot e^2 \quad 2$$

الحل

التبسيط :

$$1 \quad e^{3x} \cdot e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$$

$$2 \quad e^x \cdot e^2 = e^{x+2}$$

$$3 \quad \frac{1}{(e^{-x})^2} = \frac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}$$

$$4 \quad \frac{e^{4x+2}}{e^{2x} \cdot e^{-1}} = e^{4x+1} \cdot e^{-2x} \cdot e^1 = e^{4x-2x+1} = e^{2x+2}$$

$$5 \quad \frac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2} = \frac{e^{-4x+5}}{e^{2x-4}} = e^{-4x+5} \cdot e^{-2x+4} = e^{-6x+9}$$

$$6 \quad e^x (e^{-x} + e^{2x}) = e^x \cdot e^{-x} + e^x \cdot e^{2x} = e^{x-x} + e^{x+2x} = 1 + e^{3x}$$

التمرين 03

* بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

* نبين أن : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

التمرين 04

بين أن الدوال f المعرفة كما يلي هي دوال معرفة على $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$ 2 $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ 3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}}$ 4 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$

1 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \geq 0\}$ وهي محققة دوما لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ ،
• $D_f = \mathbb{R}$

2 لدينا : $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} + 1 \neq 0\}$ تكافئ $e^{2x} = -1$ وهذا مستحيل إذن :
• $D_f = \mathbb{R}$

3 لدينا : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 4 > 0\}$ محققة دوما لأن $e^x > 0$ ومنه : $D_f = \mathbb{R}$.

4 لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 3 \neq 0\}$ تكافئ : $e^x = -3$ وهذا مستحيل ومنه : $D_f = \mathbb{R}$.

التمرين 05

* نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$
إذا علمنا أن : $0 \leq x \leq 1$ عين حصرا للعبارة $f(x)$.

* تعيين حصرا للعبارة : $f(x)$
لدينا : $0 \leq x \leq 1$ ومنه : $e^0 \leq e^x \leq e^1$ إذن : $2 \leq e^x + 1 \leq 1 + e$
وبالتالي : $\frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}$
ومنه : $0 \leq f(x) \leq 1 + e$ إذن : $0 \times \frac{1}{1+e} \leq x \times \frac{1}{e^x + 1} \leq 1(e+1)$

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
1 بين أن الدالة f فردية.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$ ،

الحل

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ولدينا:

• إذن الدالة f دالة فردية. $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$

2 $\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{2(e^{2x} + 1)}{(e^x + 1)^2}} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \frac{(e^x + 1)^2}{(e^{2x} + 1)}$

و منه $\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^{2x} + 1)} = \frac{(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)} = f(2x)$

وهكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x) + f(x) = 2$ ، فسر بياننا النتيجة.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$

الحل

ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

1 $f(-x) + f(x) = \frac{e^x(3e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}$

و منه $f(-x) + f(x) = 2$

المنحنى الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0, 1)$.

2 $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

التمرين 08

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

7 $e^{3x} - \frac{1}{e^x} = 0$

4 $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

1 $e^{2x-1} = 1$

5 $(x^2 - 4)e^x = (9x + 10)e^x$

2 $e^{x^2-1} = e$

6 $e^x - e^{-x} = 0$

3 $(x^2 - 4x + 3)e^x = 0$

حل المعادلات :

1 لدينا : $e^{2x-1} = 1$ وهي تكافئ : $e^{2x-1} = e^0$ وعليه : $2x-1=0$ ومنه : $x = \frac{1}{2}$ وعليه : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 لدينا : $e^{x^2-1} = e$ وهي تكافئ : $x^2-1=1$ ومنه : $x^2=2$ إذن : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ وبالتالي : $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

3 لدينا : $(x^2-4x+3)x=0$ وهي تكافئ : $\Delta' = 4, x^2-4x+3=0$ للمعادلة حلين : $x_2=3, x_1=1$ إذن : $S = \{1; 3\}$

4 لدينا : $e^{2x}-2e^x+1=0$

بوضع $e^x = y$ نجد : $\begin{cases} y^2-2y+1=0 \\ y=e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (y-1)^2=0 \\ y=e^x \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} y=1 \\ e^x=1 \end{cases}$ أي : $y=1e^x=e^0$ إذن :

$x=0$ أي : $S = \{0\}$

5 لدينا : $(x^2-4)e^x = (9x-18)e^x$

وهي تكافئ : $x^2-4=9x-18$ ومنه : $x^2-9x+14=0$ $\Delta = 25$ ومنه للمعادلة حلين $x_1=2$ و $x_2=7$ إذن : $S = \{2; 7\}$

6 لدينا : $e^x - e^{-x} = 0$ وهي تكافئ : $e^x - \frac{1}{e^x} = 0$

وعليه : $\frac{e^{2x}-1}{e^x} = 0$ إذن : $e^{2x}-1=0$ وعليه : $e^{2x}=1$ أي : $e^{2x}=e^0$ وبالتالي : $2x=0$ ومنه : $x=0$ إذن : $S = \{0\}$

7 لدينا : $e^{3x} - \frac{1}{e^x} = 0$ وهي تكافئ : $\frac{e^{4x}-1}{e^x} = 0$

ومنه : $e^{4x}-1=0$ إذن : $e^{4x}=1$ وعليه : $4x=0$ ومنه : $x=0$ إذن : $S = \{0\}$

التمرين 09

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

5 $e^{2x}-2e^x+1 \leq 0$

3 $e^{x^2-4} \leq e^{7x-16}$

1 $xe^{2x}-x^2e^{2x} \leq 0$

6 $x^2e^{4x}+4e^x > 0$

4 $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e^x}$

2 $e^{2x-1} \leq 1$

حل المتراجحات :

1 لدينا : $xe^{2x}-x^2e^{2x} \leq 0$ وهي تكافئ : $e^{2x}(x-x^2) \leq 0$ وعليه : $x-x^2 \leq 0$ لأن : $e^{2x} > 0$ إذن : $x(-x+1) \leq 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-x^2$	-	0	+	-

وعليه : $x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ إذن : $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

2 لدينا : $e^{2x-1} \leq 1$ وهي تكافئ : $e^{2x-1} \leq e^0$ ومنه : $2x-1 \leq 0$ إذن : $x \leq \frac{1}{2}$ وعليه : $S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$

3 لدينا : $e^{x^2-4} \leq e^{7x-16}$ وهي تكافئ : $x^2-4 \leq 7x-16$ وعليه : $x^2-7x+12 \leq 0$

ندرس إشارة : $x^2-7x+12$ ، $\Delta = 1$ يوجد جذران : $x_1 = 3$ ، $x_2 = 4$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 12$	+	0	-	0	+

إذن : $S = [3; 4]$

4 لدينا : $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e^x}$ وهي تكافئ : $e^{x^2-2} \cdot e^x \leq 1$ وعليه : $e^{x^2+x-2} \leq e^1$ إذن : $x^2+x-2 \leq 1$

وبالتالي : $x^2+x-3 \leq 0$ إذن : $x^2+x-2 \leq 1$

ندرس إشارة : x^2+x-3 ، $\Delta = 13$ يوجد جذران : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ، $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
x^2+x-3	+	0	-	0	+

إذن : $S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$

5 لدينا : $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$

بوضع : $e^x = y$ نجد : $y^2 - 2y + 1 \leq 0$ ومنه : $(y-1)^2 \leq 0$ وعليه : $y-1=0$: $e^x = y$

إذن : $e^x = 1$ وعليه : $x = 0$ إذن : $S = \{0\}$

6 لدينا : $x^2 e^{4x} + 4e^x > 0$ وهي تكافئ : $e^x (x^2 e^{3x} + 4) > 0$ وهي محققة دوما لأن : $e^x > 0$ و $e^{3x} > 0$ و $x^2 > 0$ وعليه

• $S = \mathbb{R}$

التمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+1}$ وليكن (C_f) منحنيا البياني.

1 أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2 عين نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{3}$.

الحل

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}x+1}$

بما أن $e^{\frac{1}{3}x+1} > 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- 2 يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x_0 موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x_0) = \frac{1}{3}$
 يكون لدينا إذن $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_0+1} = \frac{1}{3}$ أي $e^{\frac{1}{3}x_0+1} = 1$ وهذا يعني $\frac{1}{3}x_0 + 1 = 0$ أي $x_0 = -3$
 وبالتالي توجد نقطة وحيدة من (C_f) فاصلتها $x_0 = -3$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ) .

التمرين 11

عين مجموعة تعريف الدالة f والمجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة f' في كل حالة مما يلي :

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ 6 | $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$ 1 |
| $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 7 | $f(x) = xe^{x-1}$ 2 |
| $f(x) = \sin xe^{\cos x}$ 8 | $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ 3 |
| $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 9 | $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ 4 |
| $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}$ 10 | $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ 5 |

الحل

- 1 لدينا : $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$
 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث : $f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$
- 2 لدينا : $f(x) = xe^{x-1}$
 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث : $f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x) = (1+x)e^{x-1}$
- 3 لدينا : $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$
 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، حيث : $f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1) - e^x(e^x + x)}{(e^x - 1)^2}$
 ومنه : $f'(x) = \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$ وعليه : $f'(x) = \frac{e^{2x} - 1 - e^{2x} - xe^x}{(e^x - 1)^2}$
- 4 لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$
 الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ حيث : $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 1) - 2x \cdot e^x}{(x^2 - 1)^2}$ ومنه : $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 1)e^x}{(x^2 - 1)^2}$
- 5 لدينا : $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ حيث : $D_f = \mathbb{R}$
 الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = (2x - 4)e^{3x} + (x^2 - 4x + 5)e^x$
 وعليه : $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ ومنه : $f'(x) = (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x$

6 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$

ومنه : $e^x - 1 \geq 0$ وعليه : $e^x \geq 1$ وبالتالي : $x \geq 0$ إذن : $D_f = [0; +\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث : $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

7 لدينا : $f(x) = \frac{1}{e^x}$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

8 لدينا : $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \cos x \cdot e^{\cos x} + \sin x (-\sin x) e^{\cos x}$

ومنه : $f'(x) = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$ وعليه : $f'(x) = e^{\cos x} [\cos x - (1 - \cos^2 x)]$

وبالتالي : $f'(x) = (\cos^2 x + \cos x - 1) e^{\cos x}$

9 لدينا : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

10 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}$

حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0\}$ نحل المتراجحة $e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0$ بوضع : $y = e^x$ نجد : $y^2 - 2y + 1 \geq 0$

و عليه : $(y - 1)^2 \geq 0$

أي أن : $(e^x - 1)^2 \geq 0$ وهي محققة دوماً . إذن : $D_f = \mathbb{R}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}} = \frac{e^{2x} - e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}}$

التمرين 12

أحسب النهايات التالية :

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1) e^x$

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1) e^x - 3e^{2x}]$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1}$

الحل

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^x - e^x) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x + 2x e^x - e^x) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3 \right) = -\infty \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ لأن}$$

التمرين 13

احسب نهايات الدالة f في كل حالة مما يلي عند مجموعة التعريف :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad 5$$

$$f(x) = x + e^x \quad 1$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} \quad 6$$

$$f(x) = e^{-x+4} \quad 2$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad 7$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \quad 3$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad 8$$

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad 4$$

الحل

$$1 \quad \text{لدينا : } f(x) = x + e^x \text{ حيث : } D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty$$

$$2 \quad \text{لدينا : } f(x) = e^{-x+4} \text{ حيث : } D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+4} = +\infty \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+4} = 0$$

$$3 \quad \text{لدينا : } f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \text{ حيث : } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1 \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty \text{ وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$4 \quad \text{لدينا : } f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ حيث : } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ ، } \left(\frac{1}{x} = t : \text{ نضع} \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$5 \quad \text{لدينا : } f(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{ حيث : } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$6 \quad \text{لدينا : } f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} \text{ حيث : } D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = +\infty$$

7 لدينا : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ حيث : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

8 لدينا : $f(x) = (x-1)e^x$ حيث : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

التمرين 14

نعتبر الدالة f والمعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

2 عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x \neq 0$.

الحل

1 قابلية الاشتقاق عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^{2x} - e^x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = -\infty$$

و منه f غير قابلة لاشتقاق عند 0 من اليسار .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{2x} - e^x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

و منه f غير قابلة لاشتقاق عند 0 من اليمين وبالتالي f غير قابلة لاشتقاق عند 0 .

2 تعيين الدالة المشتقة من أجل $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x} - e^x)x - 1(e^{2x} - e^x)}{x^2} = \frac{2xe^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x} - (x-1)e^x}{x^2}$$

التمرين 15

* نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = (4x+3)e^x$

احسب كل من المشتقات : $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(n)}(x)$ ثم استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$.

$$f(x) = (4x+3)e^x \quad *$$

$$f'(x) = 4.e^x + (4x+3)e^x = (4+4x+3)e^x = (4x+7)e^x$$

$$f''(x) = 4.e^x + (4x+7)e^x = (4+4x+7)e^x = (4x+11)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = 4.e^x + (4x+11)e^x = (4+4x+11)e^x = (4x+15)e^x$$

$$f^{(4)}(x) = 4.e^x + (4x+15)e^x = (4+4x+15)e^x = (4x+19)e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (4x+3+4n)e^x : f^{(n)} \text{ عبارة}$$

التمرين 16

أدرس التغيرات لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad 4$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad 3$$

$$f(x) = x - e^x \quad 2$$

$$f(x) = xe^x \quad 1$$

دراسة تغيرات f :

$$1 \quad \text{لدينا : } f(x) = xe^x \text{ حيث : } D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

و عليه $f'(x)$ له نفس إشارة $x+1$ ولدينا :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$		$-$	$+$

إذن f متزايدة تماماً على $[-1; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty; -1]$ ؛ و عليه جدول التغيرات كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$2 \quad \text{لدينا : } f(x) = x - e^x \text{ حيث : } D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - e^x$$

- $f'(x) = 0$ تكافئ : $1 - e^x = 0$ ومنه : $e^x = 1$ وعليه : $x = 0$
- $f'(x) > 0$ تكافئ : $1 - e^x > 0$ ومنه : $e^x < 1$ إذن : $x < 0$ و عليه f متزايدة تماما على $] -\infty; 0]$.
- $f'(x) < 0$ تكافئ : $x > 0$ ومنه f متناقصة تماما على $] -\infty; 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

3 لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x}$ حيث : $D_f =] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ تكافئ : $x - 1 = 0$ إذن : $x = 1$

$f'(x) > 0$ تكافئ : $x > 1$ إذن : f متزايدة تماما على $] 1; +\infty[$

و كذلك f متناقصة تماما على $] -\infty; 0[$ وعلى $] 0; 1[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	e	$+\infty$

4 لدينا : $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$

$e^x - 1 = 0$ تكافئ : $e^x = 1$ وعليه : $x = 0$.

إذن : $D_f =] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0^- \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0^+ \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\bullet f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 - e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

و منه : $f'(x) < 0$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-		-
$f(x)$	-1	$+\infty$	1

التمرين 17

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = e^x + e^{-x}$

1 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) \geq 2$

نعتبر الدالة g المعرفة بالعلاقة : $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} - 1}$

2 ادرس تغيرات الدالة g ، أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g

الحل

1 دراسة تغيرات f : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$e^x = e^{-x} : \text{ومنه } e^x - e^{-x} = 0 \text{ تكافئ}$$

$$\bullet x = 0 \text{ و عليه : } x = -x \text{ و منه : } 2x = 0 \text{ أي : } x = 0$$

$$e^x > e^{-x} : \text{ت كافئ : } e^x - e^{-x} > 0 \text{ و منه : } e^x > e^{-x}$$

$$\text{إذن : } x > -x \text{ و منه : } 2x > 0 \text{ و عليه : } x > 0$$

إذن f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ و بالتالي فهي متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

الاستنتاج :

من جدول التغيرات القيمة 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :
 $f(x) \geq 2$

2 دراسة تغيرات الدالة g :

$$\bullet D_g = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} - 1 \neq 0\}$$

نحل المعادلة: $e^x + e^{-x} - 1 = 0$ أي: $e^x + e^{-x} = 1$ أي: $f(x) = 1$ وهذا مستحيل لأن : $f(x) \geq 2$ إذن ليس للمعادلة حلول و عليه : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\bullet g'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x} - 1)^2}$$

$g'(x) = 0$ تكافئ : $-e^x + e^{-x} = 0$ أي: $e^{-x} = e^x$ و عليه : $-x = x$ و منه : $2x = 0$ أي : $x = 0$

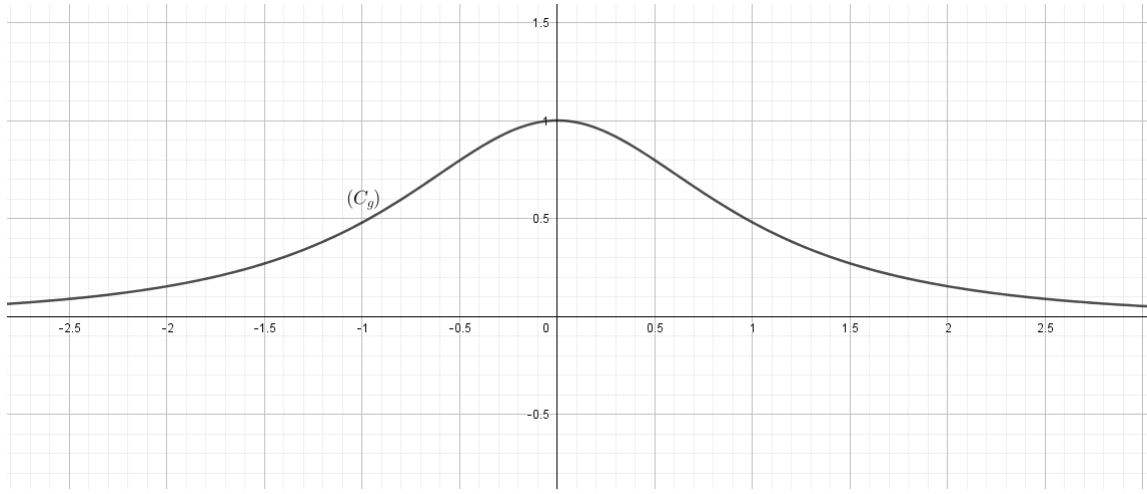
$g'(x) > 0$ تكافئ : $-e^x + e^{-x} > 0$ أي: $e^{-x} > e^x$ و عليه : $-x > x$ و منه : $2x > 0$ أي : $x > 0$

إذن g متزايدة تماما على $] -\infty; 0]$ و عليه فهي متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	0	1	0

$$\bullet g(0) = 1$$

إنشاء (C_g) :



التمرين 18

(I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = 1 - x - e^{-x}$

1 ادرس تغيرات الدالة h

2 استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1 احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها واتجاه تغير الدالة f

2 احسب نهايات الدالة f عند مجموعة تعريفها . ثم استنتج جدول تغيراتها .

3 أنشئ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين 19

(I) نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

1 ادرس تغيرات الدالة f

2 ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. بين أن (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

3 بين أن النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) ثم أنشئه .

(II) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$

1 اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2 أنشئ (C_g) التمثيل البياني للدالة g باستخدام (C_f)

3 ناقش بياناً تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي m بحيث :
 $(m-3)|e^x - 1| = 2e^x$

الحل

1 دراسة تغيرات الدالة f : $D_f = \{x \in \mathbb{R}^* : e^x - 1 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R}^* \text{ ، } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$		-	+

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^x \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. : \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{e^x - 1} = +\infty \text{ : ومنه}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^x \rightarrow 2 \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ : وعليه}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ إذن : } f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x \cdot 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

ومن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]0; +\infty[$ ، $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	2

2 بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ فإن معادلة مستقيم مقارب $y = 0$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ فإن معادلة مستقيم مقارب $y = 2$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = +\infty$ فإن معادلة مستقيم مقارب $x = 0$.

1 نبين أن $\omega(0; 1)$ مركز تناظر :

من أجل $\epsilon \in D_f$

لدينا : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ و $2\alpha - x \in D_f$

أي : $f(-x) + f(x) = 2$ و عليه $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$

لدينا من أجل كل x من D_f : $-x \in D_f$

$$f(-x) + f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2}{1-e^x} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{-2}{e^x-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{-2+2e^x}{e^x-1} = 2$$

• إذن : $\frac{2(e^x-1)}{e^x-1} = 2$ و منه $\omega(0;1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .

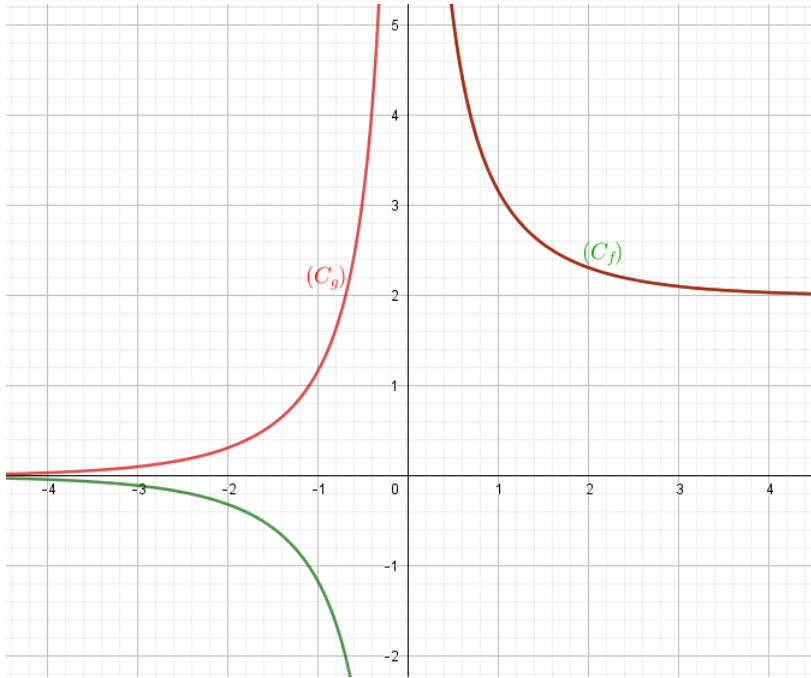
2 كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2e^x}{-(e^x-1)}, e^x-1 < 0 & x < 0 \\ g(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}, e^x-1 > 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = -f(x), x \in]-\infty; 0] \\ g(x) = f(x), x \in]0; +\infty[\end{cases} \quad \text{إذن :}$$

في المجال $]0; +\infty[$ ينطبق على (C_f) وفي المجال $] -\infty; 0]$ نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

- إنشاء (C_g) و (C_f) :



3 - المناقشة البيانية : $(m-3)|e^x-1| = 2e^x$

أي : $m-3 = \frac{2e^x}{|e^x-1|}$ أي $m-3 = g(x)$

و منه بوضع $m-3 = \alpha$ نجد $g(x) = \alpha$

لما $\alpha \leq 2$ أي $m-3 \leq 2$ أي $m \leq 5$

- ومنه ليس للمعادلة حلول .

- لما $\alpha > 2$ أي $m > 5$: للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .

• $g(x) = e^{x^2+ax+b}$: $\mathbb{R}$ على المعرفة على g الدالة حقيقيان و a و b عدنان حقيقيين
عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

الحل

من جدول التغيرات لدينا : $g'(\frac{3}{2}) = 0$ و $g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$

• مشتقة الدالة g : $g'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$

$g'(\frac{3}{2}) = 0$ تكافئ $(3+a)e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = 0$ لأن $3+a=0$: $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} \neq 0$

إذن : $a = -3$

$g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b) = -\frac{5}{4}$ و منه : $b = 1$

و بالتالي : $a = -3$ و $b = 1$

التمرين 21

• (C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

للدالة f حيث : $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$ مع a, b, c أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ في النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$

و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقارباً معادلته $y = 2x$.

الحل

النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0) = -\frac{1}{2}$ أي : $a + b = -\frac{1}{2}$

المماس (T) عند النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ معادلته : $y = 2x - \frac{1}{2}$ معناه : $f'(0) = 2$

$f'(x) = -2ae^{-2x} - be^{-x} + c$ و منه : $f'(0) = 2$ تكافئ : $-2a - b + c = 2$ أي : $-2a - b = 2 - c$

$y = 2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - cx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [ae^{-2x} + be^{-x}] = 0$$

معناه : $y = cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = -\frac{1}{2} \\ -2a - b = 0 \end{array} \right. \text{ التي تكافئ : } \left\{ \begin{array}{l} a + b = -\frac{1}{2} \\ -2a - b = 2 - c \end{array} \right.$$

و منه : $a = \frac{1}{2}$ و $b = -1$ و بالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x$.

التمرين 22

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عددين حقيقيين. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1, e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.
- (2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4; 5]$.
- (3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0 .
- (4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها.
- (5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4; 5]$ كما يلي : $g(x) = [f(x)]^2$. استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$.

الحل

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1, e)$ معناه : $f(1) = e$

معامل توجيه المماس عند $\Omega(1, e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1) = 3e$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = e \\ f'(1) = 3e \end{array} \right. \text{ نحسب } f'(x) \text{ فنجد : } f'(x) = (ax + a + b)e^x \text{ و بالتالي نحل الجملة :}$$

$$\text{و منه : } \left\{ \begin{array}{l} (a + b)e = e \\ (2a + b)e = 3e \end{array} \right. \text{ و بالتالي نجد : } a = 2 \text{ و } b = -1 \text{ أي : } f(x) = (2x - 1)e^x$$

(2) حساب $f'(x)$: $f'(x) = 2e^x + e^x(2x - 1) = e^x(2 + 2x - 1) = e^x(2x + 1)$

إشارة المشتقة من إشارة $(2x + 1)$ لأن : $e^x > 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-4	$-\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-9 - 4e^{-4}$	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	$9e^5$

(3) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 .

$y = x - 1$ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

(4) نبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x) = (2x + 3)e^x$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

x	-4	$-\frac{3}{2}$	5
$f''(x)$	-	0	+

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2}; -4e^{-\frac{3}{2}}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

(5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$ حيث : $g(x) = [f(x)]^2$

حيث : $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$ و $f'(x) = (2x + 1)e^x$ و $f(x) = (2x - 1)e^x$

x	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	0	+
$g(x)$	$81e^{-8}$	$4e^{-1}$	0	$81e^{30}$

هو التمثيل البياني للدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = ax + b + e^{-x}$ حيث : a و b عدنان حقيقيان .

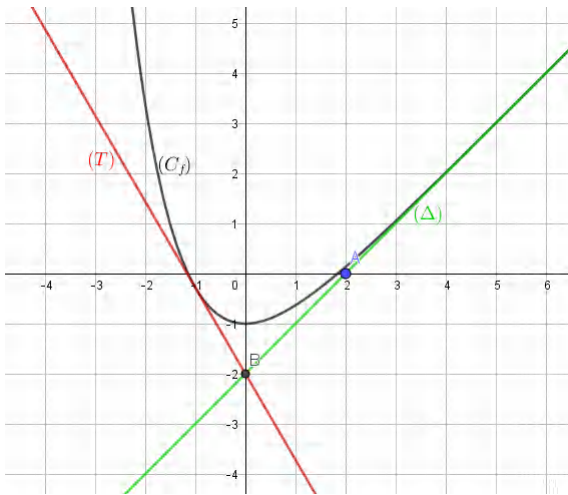
(Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

(T) هو المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1 - e$

(1) أكتب معادلة للمستقيم (Δ).

(2) إستنتج قيمة كلا من a و b .

(3) أكتب معادلة للمماس (T).



الحل

(1) بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

فإن معادلة (Δ) هي : $y = ax + b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

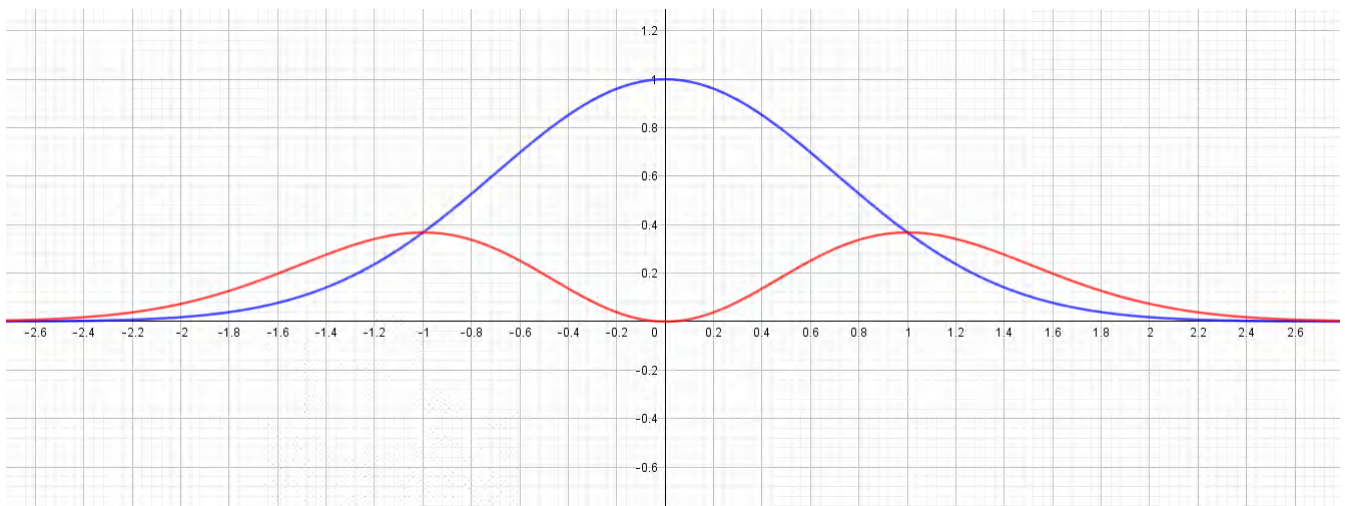
فيكون لدينا :
$$\begin{cases} 0 = 2(a) + b \\ -2 = 0(a) + b \end{cases}$$
 فنحصل على : $a = 1$ و $b = -2$.

إذن : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي : $y = x - 2$

(2) معادلة (T) : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ أي : $y = (1 - e)(x + 1) - 3 + e$ و بالتالي : معادلة (T) هي : $y = (1 - e)x - 2$.

التمرين 24

هو f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ وليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



الحل

- (1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل .
- (2) أدرس شفعية الدالتين f و g .
- (3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g .
- (4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

- (1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن $f(0) = 1$ و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن $g(0) = 0$.
- (2) شفعية الدالتين f و g :

- شفعية f : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ و منه f دالة زوجية .
- شفعية g : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$ و منه g دالة زوجية .
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ حيث f و g زوجيتان .
- (ب) دراسة تغيرات الدالة f :
- $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

- (ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(x^2) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$
- جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$									

- (4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق $g(x) - f(x)$
- $g(x) - f(x) = x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ إشارة هذا الفرق من إشارة $x^2 - 1$ لأن $e^{-x^2} > 0$ و منه :
- على المجالين $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$ يكون $x^2 - 1 > 0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f) .
- على المجال $]-1, 1[$ يكون $x^2 - 1 < 0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f) .
- المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1; e^{-1})$ و $C(1; e^{-1})$.

2.6 تمارين تجريبية

التمرين 01

- يمكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
- حيث a, b, c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.
- نضع $c = -3, b = 0, a = 1$.
- (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
- (4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.
- (5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- (6) أرسم (T) و (C_f) .
- (7) m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$.

• لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
 حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .
 (1) تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$(2) \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t$$

$$\text{نجد } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة :

$$\text{حساب المشتقة : } f'(x) = (2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 3) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1; 3]$.

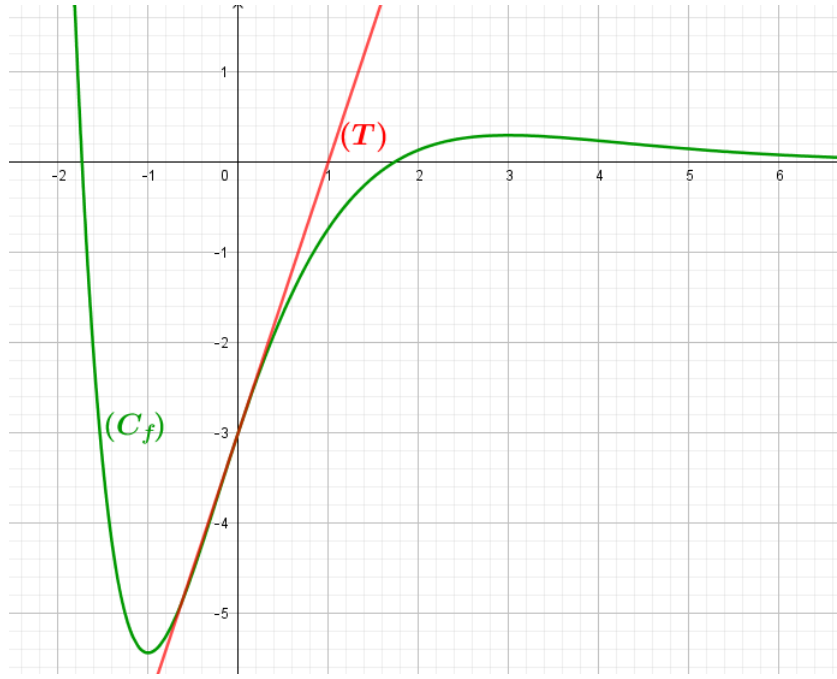
x	$-\infty$	-1			3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$			$\frac{6}{e^3}$	0

(4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$.

(5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ أي أن $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$.

(6) رسم (T) و (C_f)



(7) m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ
 $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$
 حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.
 المناقشة :

- لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .
- لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.
- لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين.
- لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب .
- لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .
- لما $-m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .
- لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة.
- لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

- نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$
- (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70 < \alpha < 0.71$.
- (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .
- (1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$ ، و فسر النتيجة بيانيا .
- ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$.
- (2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \times g(x)$ ، ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .
- (3) بين أن $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- (4) احسب احداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب .
- (5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة A .
- (6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln \frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) ، المماس T والمنحنى (C_f) .
- (7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$.

الحل

الجزء الأول

① دراسة تغيرات الدالة g : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$

أولا : حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = +\infty$

ثانيا : اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا : $g'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال : $]0,7;0,71[$ و $g(0,7) \times g(0,71) \leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,7 < \alpha < 0,71$
جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$

① حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)(2e^{\frac{1}{2}x} - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = +\infty$$
 و

حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x - 2 + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} \right) = 0$$
 لدينا :

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = 2 - x$ بجوار $(-\infty)$
دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة إشارة الفرق $f(x) - (2-x)$

$$\text{لدينا : } f(x) - (2-x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$$

ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x} > 0$

ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة إشارة العبارة $2x-4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية		يقطع (C_f) في النقطة $A(2;0)$	

② دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = (2+x-2)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} - 1 = e^{\frac{1}{2}x}(x - e^{-\frac{1}{2}x}) = e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بما أن $e^{\frac{1}{2}x} > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

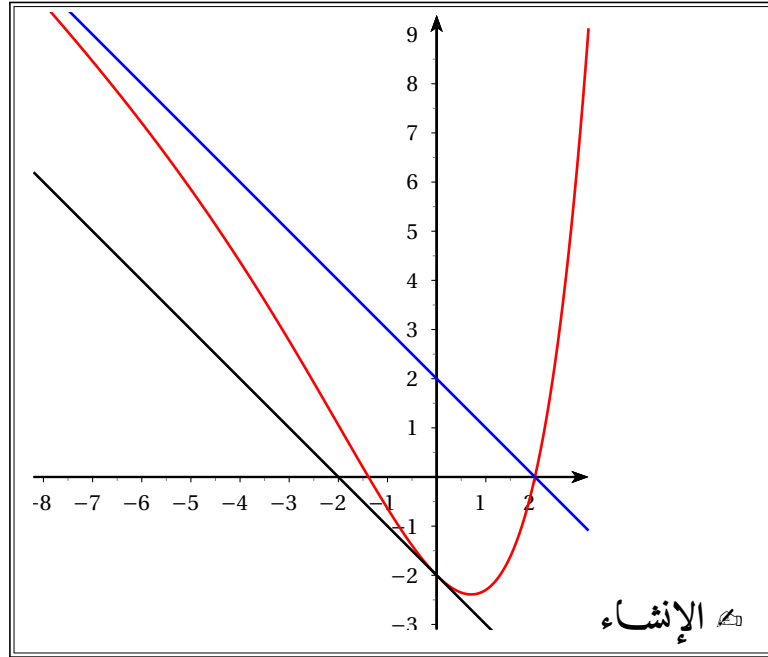
③ إثبات ان $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha - e^{-\frac{1}{2}\alpha} = 0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha} = \alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

بالتعويض نجد : $f(\alpha) = (2\alpha - 4)\frac{1}{\alpha} + 2 - \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} + 2 - \alpha = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ $\hookrightarrow$ حصر $f(\alpha)$

لدينا $0,71 < \alpha < 0,71$ ومنه : $3,29 < 4 - \alpha < 3,3$ و $-5,61 < -\frac{4}{\alpha} < -5,71$ إذن : $-2,42 < f(\alpha) < -2,31$

$\hookrightarrow$ احداثي النقطة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب : لدينا $f(0) = -2$ ومنه $(C_f) \cap (y'y) = \{A(0; -2)\}$

$\hookrightarrow$ معادلة المماس عند A : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x - 2$



$\hookrightarrow$ المناقشة البيانية:

لدينا: $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$ تكافئ $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} = m-2$

أي $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 = m$ وعليه $f(x) = m - x$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m - x$

$\hookrightarrow$ من أجل $m < -2$ المعادلة لا تقبل حلولاً

$\hookrightarrow$ من أجل $-2 < m < 2$ المعادلة تقبل حلن مختلفين في الإشارة

$\hookrightarrow$ من أجل $m = -2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً $x = 0$

$\hookrightarrow$ من أجل $m > 2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

• لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$

(3) إستنتج إشارة $g(x)$

• نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(وحدة الطول $2cm$)

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة f

(3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

(5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف

(6) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

(7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$)

• (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي

(1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

(2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$

الحل

• الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = \boxed{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ ومنه إشارة $g'(x)$

من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty, 2[$ ومنه على المجال : $[-0.38, -0.37]$.
وبما أن $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

3. إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا ايضا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1)$
لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x) = g'(x)$ ومنه

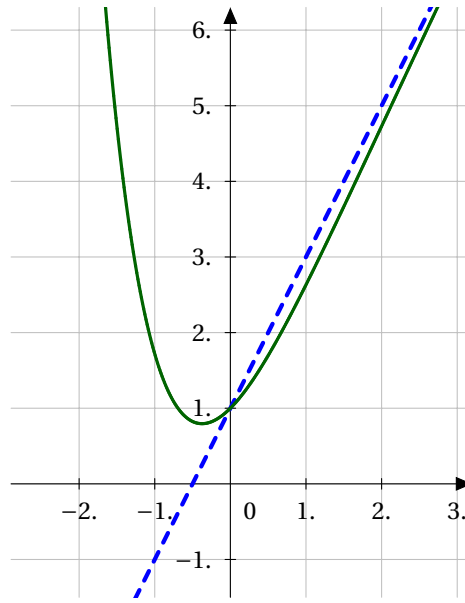
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $(2; 5 - \frac{2}{e^2})$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6. إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$g(\alpha) = 0$ تكافئ $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$ ومنه : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

7. رسم المنحنى (C_f)



1. تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y = 2x + m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0) = 2$ أي أن $g(x) = 2$ ومنه $(x-1)e^{-x} = 0$ وبالتالي $x_0 = 1$

لدينا : $f(1) = 3 - e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y = 2x + 1 - e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m = 1 - e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

$m + 2x = f(x)$ أي أن $m + 2x = -xe^{-x} + 1 + 2x$ نجد بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m = -xe^{-x} + 1$ يعني $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ، لدينا عندئذ :

إذا كان $m \in]-\infty, 1 - e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولاً .

إذا كان $m = 1 - e^{-1}$ للمعادلة حل وحيد .

• إذا كان $m \in]1 - e^{-1}, 1[$ للمعادلة حلان .

• إذا كان $m > 1$ للمعادلة حل وحيد .

التمرين 04

• g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$.

• نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

(1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسر النتيجةين بيانياً .

(3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x} + x)^2}$

(4) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O .

(6) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ، ثم استنتج إشارة $x - f(x)$.

(7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$

الحل

1. حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$$-e^{-x} + 1 \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad g'(x) \leq 0 \quad -e^{-x} + 1 \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad g'(x) \geq 0$$

$$e^{-x} \geq 1 \quad \text{يكافئ} \quad e^{-x} \leq 1$$

$$-x \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad 1 \leq e$$

$$x \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad x \geq 0$$

إذن إذا كان $x \in]-\infty; 0[$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، وإذا كان $x \in]0; +\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$

من أجل $x \in]-\infty; 0[$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متناقصة على $] -\infty; 0[$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (1)$

من أجل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متزايدة على $]0; +\infty[$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا: $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ و منه $e^{-x} + x \geq 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{(x) \times 1}{(x) \times (\frac{e^{-x}}{x} + 1)} = \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1$$

التفسير البياني:

عند $-\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y = 0$ و $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

عند $+\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y = 1$.

3. f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = \frac{1(e^{-x} + x) - (-e^{-x} + 1)(x)}{(e^{-x} + x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} + x)^2}$ إذن $f'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} + x)^2}$

4. دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} (x+1)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x} > 0$ و المقام موجب تماما، اذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
f	0	$\frac{1}{1-e}$	1

5. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O :

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس هي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x$

6. التحقق من أن $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1} = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$$

إشارة $x - f(x)$:

لدينا $g(x) \geq 0$ و $g(x) + 1 \geq 1$ و $g(x) + 1 > 0$ ، إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x < 0$ فإن $x - f(x) < 0$ ،

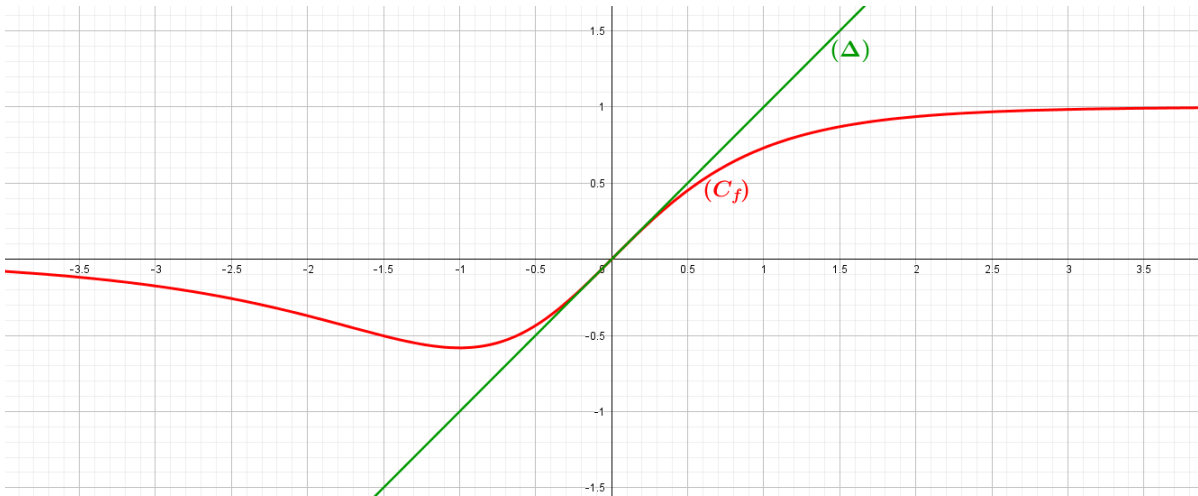
$x > 0$ فإن $x - f(x) > 0$

وإذا كان $x = 0$ فإن $x - f(x) = 0$.

7. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
(C_f) تحت (Δ)	(Δ) و (C_f) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) فوق (Δ)

8. رسم (C_f) و (Δ)



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$

المناقشة: لدينا $\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x} \frac{x}{x + e^{-x}} = m + 1$ أي $\frac{x}{x + e^{-x}} = m + 1$ أي $f(x) = m + 1$ ، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m + 1$ ، نميز الحالات التالية:

إذا كان $m + 1 \geq 1$ أي $m \geq 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول

إذا كان $0 < m + 1 < 1$ أي $-1 < m < 0$ ، للمعادلة حل وحيد موجب

إذا كان $m + 1 = 0$ أي $m = -1$ ، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0 = 0$

إذا كان $m + 1 < 0$ أي $\frac{1}{1 - e} < m + 1 < -1$ أي $\frac{1}{1 - e} - 1 < m < -1$ ، للمعادلة حلين سالبين متمايزين

إذا كان $m+1 = \frac{1}{1-e}$ أي $m = \frac{1}{1-e} - 1$ ، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1 = -1$
 إذا كان $m+1 < \frac{1}{1-e}$ أي $m < \frac{1}{1-e} - 1$ ، المعادلة ليس لديها حلول .

التمرين 05

في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

(1) بقراءة بيانية :

(أ) عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم إستنتج قيمة c .

(ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

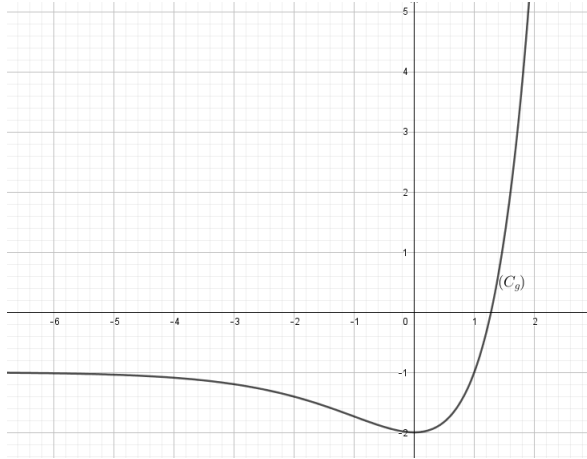
(ج) عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي كل من a و b .

(2) نفرض فيما يلي : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

(أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2 < \alpha < 1.3$

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$.



ف f هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(4) بين $f(\alpha) = \alpha - 1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

(7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي : $h(x) = f(|x|)$

(أ) بين أن h دالة زوجية .

(ب) أرسم المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

الحل

(I) 1) بقراءة بيانية :

(أ) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$

إذن نستنتج أن : $c = -1$.

ب) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ج) لدينا : $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$

لدينا : $g(0) = -2$ أي : $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ أي : $b - 1 = -2$ و منه : $b = -1$.

نحسب $g'(x) : g'(x) = a \times e^x + e^x(ax + b) = e^x(a + ax + b)$

لدينا : $g'(0) = 0$ أي : $e^0(a + a \times 0 - 1) = 0$ أي : $a - 1 = 0$ و منه : $a = 1$

إذن : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

(2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1, 2; 1, 3]$ و بما أن : $g(1.2) = -$ و $g(1.3) = +$ أي : $g(1.2) \times g(1.3) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1.2 و 1.3 .

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
	$-$		$+$

II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$

1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

$$2) \text{ لدينا : } y = x : (\Delta) , \text{ نحسب : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة : $(-x)$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$$\text{نحسب المشتقة } f'(x) : f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x + 1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x - 1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن : $(e^x + 1)^2 > 0$.

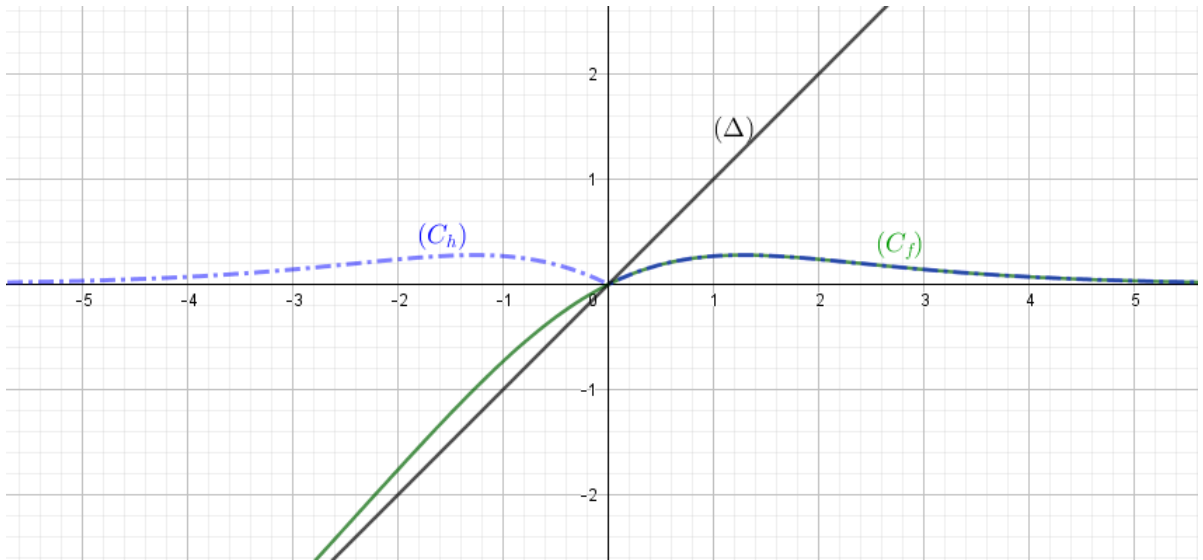
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(4) إثبات : $f(\alpha) = \alpha - 1$

نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ أي : $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ أي : $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$, ومنه : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$
 لنحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$

وهو المطلوب .

حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $1.2 < \alpha < 1.3$ أي : $0.2 < \alpha - 1 < 0.3$ ومنه : $0.2 < f(\alpha) < 0.3$
 (5) الإنشاء :



(6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$, عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي

لحامل محور الفواصل والذي معادلته : $y = f(m)$.

إذا كان : $m \in]-\infty; 0]$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن : المعادلة تقبل حلان متميزان .

إذا كان : $m = \alpha$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

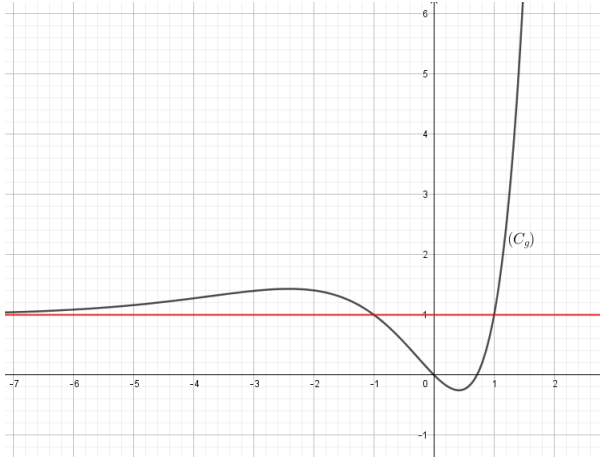
(7) لدينا الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $h(x) = f(|x|)$

أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ و بالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$
 (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب في المجال $]-\infty; 0]$.

التمرين 06



• لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .
 يعطى جدول القيم التالي :

8.0	75.0	7.0	65.0	6.0	x
2.0	07.0	-03.0	-11.0	-17.0	g(x)

- (1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
- (2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.
- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- (ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
- (2) تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1, 1)$.
- (ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) والمماس (T) .
- (ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .
- (4) أرسم كلا من (T) , (T') و (C_f) .
- (5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E) : (x - 1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول .

الحل

- (1) (I) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
 لدينا : $g(0) = (0^2 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.
 ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7; 0.75]$ و $g(0.70) \times g(0.75) = -0.03 \times 0.07 = -0.0021 < 0$ و
 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
 وبالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.

(2) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

(II) لدينا : $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$ معرفة على $D_f = \mathbb{R}$

(1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = +\infty$$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = 1 + [2x - 2 + (x-1)^2] e^x = 1 + (2x - 2 + x^2 - 2x + 1) e^x = 1 + (x-1)^2 e^x = g(x)$$

أي : $f'(x) = g(x)$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	0	-	+

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين : $]-\infty; 0[$ و $]\alpha; +\infty[$ و f متناقصة تماماً على المجال $[0; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

(2) التحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$

لدينا : $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 e^\alpha$

و لدينا : $g(\alpha) = 0$ و منه : $1 + (\alpha^2 - 1)e^\alpha = 0$ وبالتالي : $e^\alpha = -\frac{1}{\alpha^2 - 1}$

إذن : $f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 \times \left(-\frac{1}{\alpha^2 - 1}\right)$ أي : $f(\alpha) = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - \alpha - \alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 1}$

وبالتالي : $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $0.70 < \alpha < 0.75$ و منه : $(0.70)^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < (0.75)^2 + 1$ و $0.70 + 1 < \alpha + 1 < 0.75 + 1$.
 إذن : $\frac{(0.70)^2 + 1}{0.70 + 1} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} < \frac{(0.75)^2 + 1}{0.75 + 1}$ وبالتالي : $0.85 < f(\alpha) < 0.92$.
 (3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$:

$$\bullet (T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = g(1)(x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

ب) تبين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x - 1)^2 e^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) والمماس (T)

$$\bullet \text{ ندرس إشارة الفرق } f(x) - y : f(x) - y = x + (x - 1)^2 e^x - x = (x - 1)^2 e^x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	+
الوضعية	(T) فوق (C_f)	(C_f) يخترق (T) في النقطة $A(1; 1)$	(T) فوق (C_f)

تبين أن المنحنى (C_f) يقبلا مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا : $(T) \parallel (T')$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي : $f'(x_0) = 1$

و منه : $1 + (x_0^2 - 1)e^{x_0} = 1$ وبالتالي : $(x_0^2 - 1)e^{x_0} = 0$ و منه : $(x_0^2 - 1) = 0$ لأن : $e^{x_0} \neq 0$ و عليه : $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$.

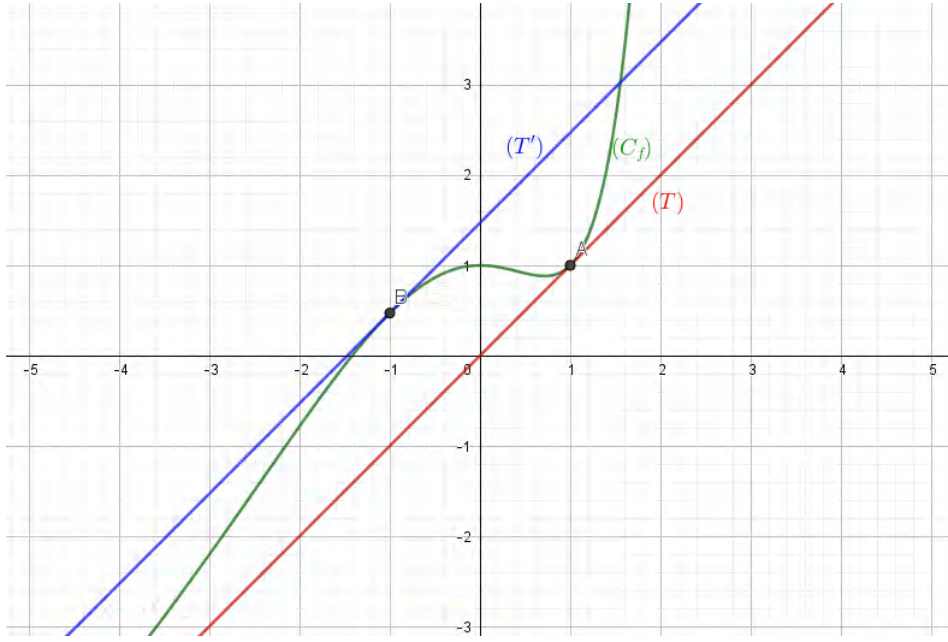
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس (T') :

$$\text{لدينا : } B(-1; -1 + 4e^{-1})$$

$$\bullet (T') : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = 1 \times (x + 1) - 1 + 4e^{-1} = x + 4e^{-1}$$

الرسم :



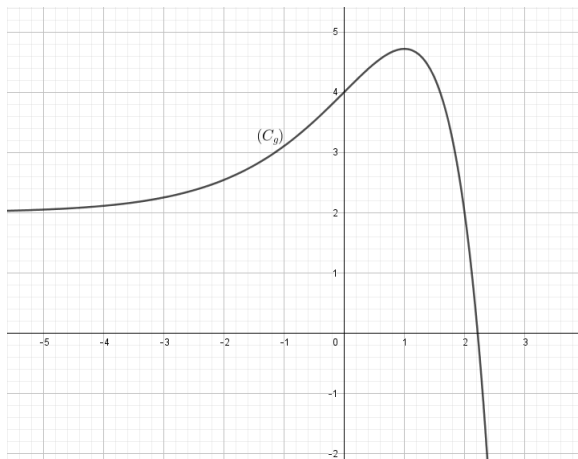
تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

لدينا : $(x-1)^2 e^x = m+1$ تكافئ : $x + (x-1)^2 e^x = x + m + 1$ تكافئ : $f(x) = x + m + 1$

حلول المعادلة (E) بيانها هي فواصل النقاط المشتركة بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m + 1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T') .

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني : $0 < m+1 < 4e^{-1}$ وبالتالي : $-1 < m < -1 + 4e^{-1}$

التمرين 07



الم دالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (2-x)e^x$

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتماسين $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل المقابل)

(1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث

$2.21 < \alpha < 2.22$

(2) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

الم نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتماسين $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة بيانيا

- (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1 + e^{-x})^2}$.
 ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
 (3) بين أن : $f(-\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ ، ثم عيّن حصرا للعدد $f(-\alpha)$.
 (4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في المعلم السابق .
 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .
 ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .
 (5) أثني كلا من المنحنى (δ) والمنحنى (C_f) (تعطى $f(-\alpha) = 0.48$) .

الحل

I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (2 - x)e^x$.

(1) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2,21 < \alpha < 2,22$.

• الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1;3[$ و $]2,21;2,22[\subset]1;3[$ أي $\begin{cases} g(2,21) \approx 0,08 \\ g(2,22) \approx -0,02 \end{cases}$ و $g(2,21) \times g(2,22) < 0$.

ومنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]1;3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2,21 < \alpha < 2,22$.
 بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1 + e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب) تبيان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1 + e^{-x})^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2x(1+e^{-x}) + x^2 e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2} = \frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$f(-\alpha)$	0	$+\infty$	

3) لدينا : $f(-\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+e^\alpha} = \frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha^2}{\frac{-\alpha}{2-\alpha}} = -\alpha(2-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا : $2,21 < \alpha < 2,22$ و منه $0,21 < \alpha - 2 < 0,22$ إذن $0,46 < \alpha(\alpha-2) < 0,48$ و بالتالي $0,46 < f(-\alpha) < 0,49$.

4) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+e^{-x}} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = 0$

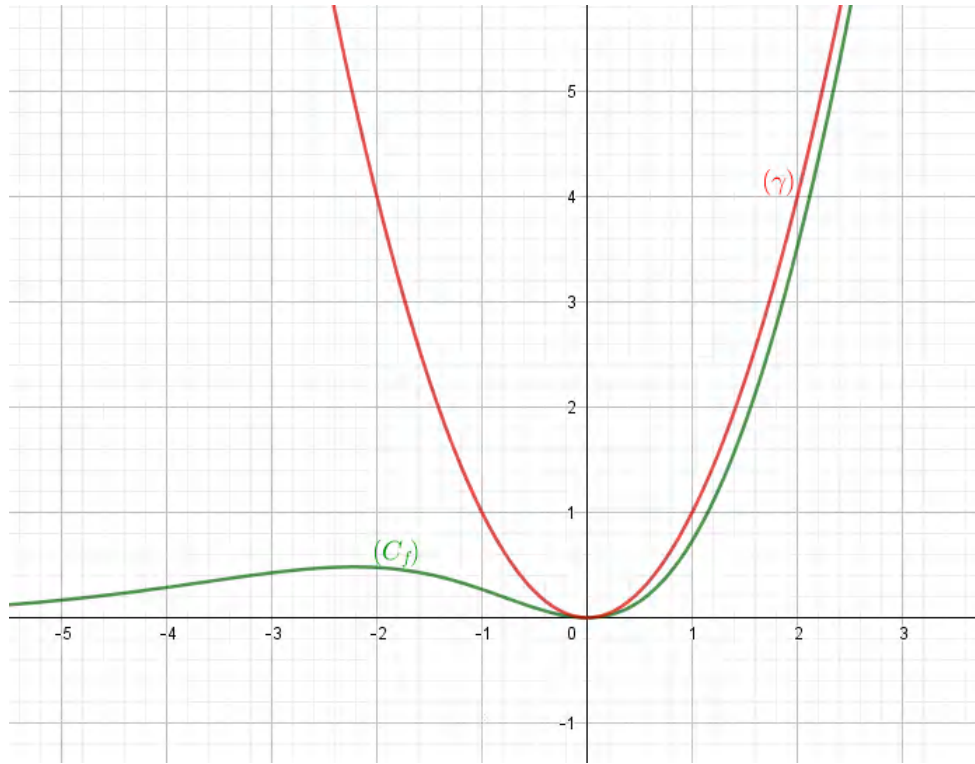
التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x) - x^2 = \frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq 0$ و بالتالي المنحنى (γ) يقع أسفل المنحنى (C_f) .

• (γ)

5) الرسم :



7 التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020

التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020

شعبة العلوم التجريبية

1.7

التمرين 01

- (I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.
- عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.
- (II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ و (C_g) إلى تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$).

ب أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

د أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

ه أرسم (C_g) .

III لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$ باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ نمز ب (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + 1$.

ب أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4 بين أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5 أ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$.

ب هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج أرسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

التمرين 03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^x - ex - 1$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب أحسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها.

ج شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 أ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

د أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم (C_f) في المجال $]-\infty; 2[$.

التمرين 04

(I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in [-1; +\infty[$.

ب تحقق أن: $0,5 < \alpha < 0,6$ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 2[$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2[$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

إستنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty; 2[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4 أ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5 أ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب أنشئ (Δ) و (C_f) .

x	$f(x)$
20.0	037.0
21.0	016.0
22.0	-005.0
23.0	-026.0
24.0	-048.0
25.0	-070.0

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ واستنتج المستقيمين المقاربين لـ (C) .

2 احسب $f'(x)$ ، بين أن f متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α باستعمال الجدول أعلاه ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4 ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5 عين بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$

1 ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 أ تحقق من أن: $g(\frac{\alpha+1}{2}) = 0$ ثم بين أن $g'(\frac{\alpha+1}{2}) = 2f'(\alpha)$.

ب استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T) .

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1 أ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = e^{2x+2} \cdot g(-x)$.

ب استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة تماما على $]-\alpha; +\infty[$.

2 أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = -x + 1$.

5 أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ : $f(-\alpha) \approx 0,1$.

التمرين 07

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

1 أ حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'

ب بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

ج احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وشكل جدول تغيراتها

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,3$

3 استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x .

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

1 أ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x \cdot g(x)}{(e^x - x)^2}$

ج ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وشكل جدول تغيراتها

2 أ بين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج ارسم المنحنى (C_f) .

التمرين 08

(I) g الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1 أ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

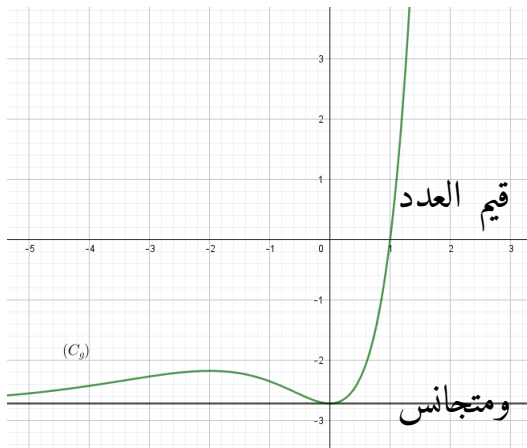
- 2 أ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1,52 < \alpha < -1,51$
- ب استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $1cm$

- 1 أ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$
- ج شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$)
- د عين دون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ وفسر هندسيا للنتيجة.
- 2 أ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = -x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
- ب ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- ج بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياتهما.
- د ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$
- ه ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

التمرين 09

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$ (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو في الشكل المقابل .



- 1 أ احسب $g(1)$
- 2 بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كإيلي : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 احسب النهايات الآتية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بين أن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

3 بين أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$

4 استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; -1]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 بين كيف يمكن انشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \rightarrow e^x$ ثم ارسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

التمرين 10

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.

ب أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

3 إنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

التمرين 11

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1 أ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-0,38 < \alpha < -0,36$.

د استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$ ثم تفسير النتيجة بيانياً.

ج ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث : $y = 2x + 1$.

2 بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون : $f'(x) = g(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3 اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

5 عين عدد وإشارة حلول المعادلة $x = (1 - m)e^x$.

التمرين 12

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$
 (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - ex$ و $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1 أ ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية .

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3 أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 ادرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5 أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$) .

6 الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

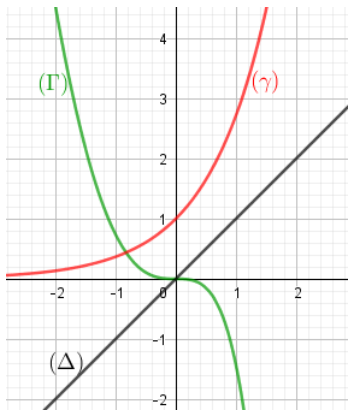
أ بين أن h دالة زوجية .

ب من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه .

(I) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x \mapsto e^x$.
بقراءة بيانية:



1 برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - x > 0$.

2 حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أن: $g(0) = 0$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1 بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2 أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

ب استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

ب بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$.

ج استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$, ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ?

4 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$, ثم تحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

5 أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

2.7 شعبة التقني الرياضي

مستوى التوجيه

التمرين 01

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $f(-x) + f(x)$ و ماذا تستنتج؟

2 أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

- 3 بين أن المستقيم $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .
- 4 احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- 5 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α حيث: $-1,7 < \alpha < -1,6$.
- 6 بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها
- 7 بين أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان ثم ارسم المنحنى (C_f) .

التمرين 02

- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.
 - 2 احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.
 - 3 بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 4 (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$.
 - أ بين أن (D) و (D') مقاربان ل (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.
 - ب بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,65 < x_1 < -1,66$.
 - ج أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - د أرسم (D) و (D') و (C_f) .
 - 5 m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$.
 - ناقش بياننا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.
 - 6 g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$.
 - ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 ادرس تغيرات الدالة f .
- 2 عيّن المستقيمات المقاربة ل (C_f) .
- 3 بين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس ل (C_f) عندها.
- 4 لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = f(x) - x$.
- أ ادرس تغيرات الدالة g .
- ب بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا و حيدا α حيث $2.7 < \alpha < 2.8$.
- ج أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- 5 أ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
- ب ارسم المماس والمستقيم الذي معادلته: $y = x$ و (C_f) .

- (I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.
- 1 أدرس تغيرات الدالة g ، شكل جدول تغيراتها.
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.
- 3 استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].
- 1 بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.
- 2 أ) برهن أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.
- ب أستخدم إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج احسب $f(1)$ ، ثم أستخدم إشارة $f(x)$.

3 أ) بين أن : $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج) أرسم (C_f) .

4 ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$

5 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = [f(x)^2]$

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم أستنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين 05

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-1)e^x$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$. ثم تحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$.

ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)

ج) أرسم (T) و (C_f) .

4) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلاً واحداً في $\mathbb{R}$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني.

أ) بين أن الدالة h زوجية.

ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

6) g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث a و b عدداً حقيقيين.

عين a و b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$.

التمرين 06

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+2)e^x - 2$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

- (3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$ و (C_f) وتمثيلها البياني .
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2-أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.
- (ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
- ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (3-أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,55 < \beta < -1,56$.
- (ب) أرسم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

التمرين 07

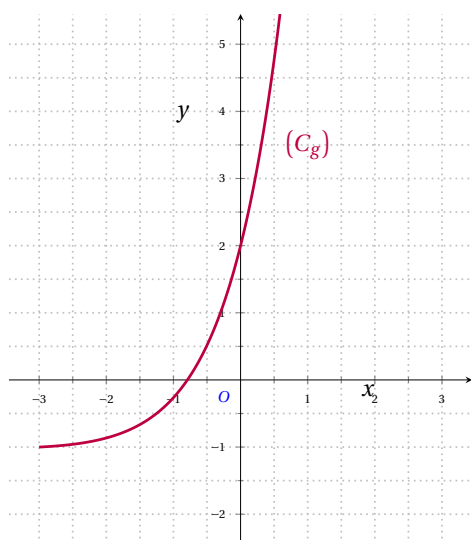
- لتكن (I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$
- أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$
- (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1-أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
- 2-أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f) .
- (ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- 3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له .
- 4- باستعمال المنحنى (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

التمرين 08

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $] -\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1}e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) احسب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2- بين أنه من أجل كل x من $] -\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$.
- ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- 3- أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر .
- (ب) h الدالة العددية المعرفة على المجال $] -\infty; 1[$ بـ : $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم أستنتج أنه من أجل كل x من $] -\infty; 1[: h(x) \geq 0$.
- (4) بين أنه من أجل كل x من $] -\infty; 1[: f(x) + x = \frac{xh(x)}{(x-1)}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .فسر النتيجة بيانيا.
- (5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A(-2; \frac{2}{3}e^2)$ ، ثم أرسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-2; 1]$.

التمرين 09



(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي $g(x) = (x+3)e^x + 1$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .
بقراءة بيانية:

(أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

(ب) إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقّق أنّ : $-0.8 < \alpha < -0.7$.

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. بين أنّه من كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم كلّ جدول تغيرات الدالة f .

3. (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم إستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(ج) أكتب معادلة لـ: مماس (T) (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

4. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $] -\infty; 1[$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

5. أحسب $f(x) - g(x)$ ثم إستنتج دالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أنّ الدالة h زوجية.

- (ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x-2) + 1$.
- (ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.

التمرين 10

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm).
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$.
- ب - أدرس إشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .
- ج - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) أ - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
- ب - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.
- (4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها.
- (5) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
- (6) ليكن m وسيطاً حقيقياً . عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

3.7 شعبة الرياضيات

التمرين 01

- I) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة f .
- (2) بين ان (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند ω .
- ثم بين ان ω مركز تناظر لـ (C_f) .
- (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج ان (C_f) يقبل مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما.
- (4) بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2, 77; -2, 76[$.
- احسب $f(1)$ و $f(-1)$ ارسم (C_f) .
- II) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني.

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$:
 (2) أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق (دون دراسة g).

التمرين 02

- (I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (3-x)e^x - 3$
 (1) أدرس تغيرات الدالة g .
 (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha \in]2,82; 2,83[$
 (3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x
 (II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني
 (1) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ واكتب معادلة ل مماس (T) عند O
 (2) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 ب) بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن : $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$
 ج) تحقق أن : $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ، ثم عين حصرا له .
 د) أنشئ جدول تغيرات f
 (3) أحسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية ل (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \rightarrow -x^3$
 (4) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسيا .
 (5) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C) .

التمرين 03

- (I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = 2 - xe^x$
 (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,8 < \alpha < 0,9$
 (3) عين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.
 (II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول : 2cm]
 (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
 (2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة : $y = x + 1$ مقارب ل (C_f)
 (3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
 (4) أ- بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

- ب-بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (5) أرسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .
- (6) ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

التمرين 04

- (I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$. أ-1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- ب-أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 2-أ-بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.
- تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.
- ب- استنتج إشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .
- (II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$. و (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm] .
- أ-1 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب-بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
- ج-أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- 2-أ-بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.
- ب-شكل جدول تغيرات الدالة f على (نأخذ: $f(\alpha) = -0,9$)
- 3-أ-بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجهه كل منهما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة لكل منهما .
- ب-مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .
- ج-ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

التمرين 05

- (I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.
- 1-أدرس تغيرات الدالة g .
- 2-بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث: $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.
- 3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.
- و (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1-احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا .
- 2-بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

- 3- بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
- 4- احسب $f(1)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_f) .

التمرين 06

- f الدالة المعرفة بـ : $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.
 - 2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - 3-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 4-أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.
 - استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
 - 5) g الدالة المعرفة على $] -\infty; 0[$ بـ : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 - أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 - ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 6-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$: $f(x) > x$.
 - ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 - ج) أنشئ المنحنى (C_f) .
- 8) m عدد حقيقي ، h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $] -\infty; 0[$ بـ : $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$.
- أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .
 - ب) باستعمال (C_f) ، ناقش بياننا وحسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $h'_m(x) = 0$.

التمرين 07

- φ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.
- 1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.
 - ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ و شكل جدول تغيراتها.
 - 2) تبيان أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يختلف عن 1 ، ثم تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$.
 - 3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II) f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

- 1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ •
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
 2) بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.
 3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .
 4-أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$
 ب) ادرس اشارة الفرق $f(x) - g(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) .

التمرين 08

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$
 I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ و تمثيلها البياني
 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ •
 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، أحسب $f(-2)$ وأرسم (C_f) .
 II) ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$ و (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 1- أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيهما.
 2- أدرس اتجاه تغير f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.
 3- M_m نقطة من (C_m) فاصلتها X_m حيث : $X_m = 1 - m$ •
 أثبت أنه عندما m يسمح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه.
 4- أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_m) .

التمرين 09

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى يطلب تعيين معادلة له.
 ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ •
 ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.
 3- الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كيلي: $h(x) = x^2 e^{-x+2} - 4$, ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج اشارة $h(x)$ و حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$ •

- 4- إرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $]0; +\infty[$. 5- نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x-2) \dots (E)$.
ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
6- الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
إعتمادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g .

التمرين 10

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كيلي : $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$.
(1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ وأستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.
(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,9 < \alpha < 1$.
واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
(II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كيلي : $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
أ-1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$. واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x)$ يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$ ثم استنتج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كيلي : $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.
أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
ب) تحقق أن : $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
4- أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 1.73$) .

التمرين 11

- (I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث K وسيط حقيقي .
ليكن $(\mathcal{E}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{E}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .
2. أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3. (أ) أحسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي K اتجاه تغير الدالة f_k .
 (ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل K عدد حقيقي موجب تماما .
 4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K الأوضاع النسبية للمنحنين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$
 نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$.
 2. (أ) بين أنّ المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $1,28 < \alpha < -1,27$.
 (ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا .
 3. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) + (x+1)e^{-2x}$
 (أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ثم إستنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.
 (ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$

التمرين 12

- (I) الدالتان g و h معرفتان على المجال $] -\infty; 0]$ كما يلي : $g(x) = -2e^x$ و $h(x) = x(e^x + 1)$
 حدد إشارة كلا من $g(x)$ و $h(x)$ على المجال $] -\infty; 0]$.
 (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $] -\infty; 0]$ كما يلي : $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) (أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0]$: $f'(x) = h(x) + g(x)$.
 (ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $] -\infty; 0]$.
 (2) أحسب $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 (3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -\infty; 0]$ ثم نحقق أن : $-1.5 < \alpha < -1.4$.
 (4) (P) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ على المجال $] -\infty; 0]$
 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
 (ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنين (P) و (C_f) .
 (ج) أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $] -\infty; 0]$.
 (5) ليكن m وسيطا حقيقيا ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة $|f(x)| = e^m$ في المجال $] -\infty; 0]$.