

الرياضيات في الثانوية

نمارين نموذجية في الحساب الشعاعي مرفقة بحلول مفصلة

20 نمارين

للسنة أولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الأستاذ حناش نبيل

ثانوية : زيناى الحاج بلقاسم - عين البيضاء -

Mars 2021

النمرين رقم 01 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ ، } \alpha \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\text{لتكن النقط : } A(1;3) \text{ ، } B(-2;-3)$$

$$C(1;-1) \text{ ، } D(3;\alpha) .$$

(1) أحسب مركبتي كل شعاع من الأشعة التالية :

$$\overrightarrow{AB} \text{ ، } \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AC} .$$

$$(2) \text{ أحسب مركبتي الشعاع : } 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$$

$$(3) \text{ عين العدد } \alpha \text{ حتى يكون الشعاعان } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CD}$$

مرتبطين خطياً .

النمرين رقم 02 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ ، } \alpha \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\text{لتكن النقط : } A\left(-5; \frac{1}{2}\right) \text{ ، } B\left(\alpha; \frac{3}{2}\right)$$

$$C(3;2) .$$

(1) عين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف

$$[AC] .$$

(2) عين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازياً للشعاع

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(3) عين إحداثيي النقطة D بحيث :

$$2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} .$$

النمرين رقم 03 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ ، } m \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\text{نعتبر النقط : } A(2;-3) \text{ ، } B\left(-1; \frac{3}{2}\right)$$

$$C(m;2) .$$

(1) أكتب معادلة للمستقيم (AC) .

(2) عين قيم m حتى تكون $B \in (AC)$.

(3) عين قيم m بحيث يكون المستقيم (AC) يوازي

حامل محور الترتيب .

(4) عين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم

$$(AC) \text{ يساوي } 1 .$$

(5) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I

$$\text{منتصف } [AB] \text{ و يوازي الشعاع } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

النمرين رقم 04 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) . \text{ نعتبر النقط } A \text{ ، } B \text{ و } C \text{ حيث :}$$

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ ، } \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(1) بين أن : $B(-2;-1)$ و $C(-2;5)$.

(2) برهن أن النقط A ، B ، O في إستقامة .

(3) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع ثم عين إحداثيي مركزه I

(4) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ- عين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلة له

ب- عين إحداثيي M نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع

حامل محور الفواصل .

النمرين رقم 05 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط A ، B و C حيث :

$$\vec{OA} = -\vec{i} - \vec{j} , \vec{OB} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) عين إحداثيي النقطتين B و C ثم علم النقط A ،

B و C .

(2) أ- أحسب الأطوال AB ، AC و BC .

ب- إستنتج نوع المثلث ABC .

(3) أحسب إحداثيي النقطة N منتصف $[BC]$.

4- عين إحداثيي النقطة M المعرفة بالعلاقة :

$$\vec{OM} = \vec{AC} + 2\vec{NB} + \vec{OC}$$

النمرين رقم 06 :

لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي مختلفة

مثنى مثنى .

$$(1) \text{ علم النقطة } D \text{ بحيث : } \vec{DA} - 3\vec{DC} = \vec{0}$$

$$(2) \text{ علم النقطة } E \text{ بحيث : } \vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BD}$$

(3) برهن أن $AEDB$ متوازي أضلاع .

(4) برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا :

$$\vec{MA} - 3\vec{MC} = -2\vec{MD}$$

(5) ليكن O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$.

$$\text{برهن أن : } \vec{AB} + \vec{AE} = 2\vec{AO}$$

النمرين رقم 07 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

نعتبر النقط : $C(3;2)$ ، $B(\alpha;-1)$ ،

$A(2;3)$ حيث α عدد حقيقي .

(1) عين α حتى تكون النقط A ، B ، O في

إستقامة .

(2) نعتبر أن : $\alpha = 2$

عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$

متوازي أضلاع .

$$(3) \text{ نعتبر النقطة } E \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

بين أن النقطة E هي مركز متوازي الأضلاع

$ABCD$.

(4) أ- أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

A و يوازي المستقيم (BC) .

ب- عين إحداثيي N نقطة تقاطع (Δ) مع حامل

محور الفواصل .

ج- (Δ') المستقيم الذي معادلته : $y = x + 1$ ،

أوجد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') .

النمرين رقم 08 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) .$$

نعتبر النقط : $A(-1;2)$ ، $B(2;0)$ ،

$C(\alpha^2 + 1; \alpha)$ حيث α عدد حقيقي .

(1) عين قيم α حتى تكون النقط A ، B و C في إستقامة .

(2) أكتب معادلة المستقيم (AB) .

(3) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي معامل توجيهه 2 و يشمل النقطة $I(1;5)$.

(4) عين $(AB) \cap (\Delta)$.

النمرين رقم 09 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) .$$

لتكن النقط : $A(1;0)$ ، $B(3;-2)$ ،

$C(3;2)$ ، $E(5;0)$.

(1) جد أطوال أضلاع المثلث ABC ثم إستنتج نوعه .

(2) عين قيمة α حتى تكون النقط A ، B و

$D(\alpha; \alpha + 1)$ في إستقامة واحدة .

(3) بين أن الرباعي $ABEC$ مربع .

(4) أ- جد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل B و

يوازي (AC) .

ب- جد إحداثيي نقطتي تقاطع (Δ_1) مع محوري

الإحداثيات .

(5) أكتب معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يمر بالنقطة O و

يوازي المستقيم ذو المعادلة : $3x + 2y + 1 = 0$

(6) جد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) .

النمرين رقم 10 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط A ، B و C حيث :

$$\vec{OB} = -3\vec{i} - 5\vec{j} , A(2;-2)$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(1) عين إحداثيي النقطة C ، ثم علم النقط A ، B و C .

(2) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع .

(3) لتكن M منتصف القطعة $[BC]$ و النقطة N

التي تحقق العلاقة الشعاعية : $\vec{DM} = \frac{3}{2} \vec{DN}$

أ- إستنتج أن النقط D ، M و N في إستقامة .

ب- عين إحداثيي النقطة N .

(4) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و

يوازي المستقيم (AC) .

(5) لتكن النقطة $E(-2;-4)$. أحسب أطوال أضلاع

المثلث ACE ثم إستنتج طبيعته .

النمرين رقم 11 :

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : $A(2;1)$ ، $B(3;2)$ ،

$C(0;3)$.

(1) علم النقط A ، B و C .

(2) أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد طبيعته

مع التعليل .

(3) أحسب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم أكتب

معادلة له .

(4) نعتبر النقطة $F(-1; \alpha)$.

حدد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في

إستقامة .

(5) أرسم المستقيم (Γ) الذي معادلته : $y = 5x + 3$

(6) حدد نقطة تقاطع المستقيمين (Γ) و (AB) بيانيا .

II - نعتبر جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S) \begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - y = -3 \end{cases}$$

(1) تحقق أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا .

(2) حل الجملة (S) ثم فسر النتيجة هندسيا .

النمرين رقم 12 :

نريد حل جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S) \begin{cases} 2z^2 - t^2 = -1 \\ 3z^2 + t^2 = 21 \end{cases}$$

(1) أ- بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ أكتب جملة معادلتين

(S') تكافئ الجملة (S) .

ب- حل جملة المعادلتين (S') .

(2) إستنتج حلول الجملة (S) .

النمرين رقم 13 :

بمناسبة انتقاله إلى الثانوية نظم يوسف وليمة دعا إليها

تلاميذ قسمه . لاحظ أنه لو يجلس كل 5 تلاميذ حول

طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن للجلوس ، و لو

يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى

شاغرة .

ما هو عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف ؟ و ما هو عدد

الطاولات ؟

النمرين رقم 14 :

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر المستقيم (D_1) الذي معادلته : $y = x + 1$ و

المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y = -x + 3$

(1) أرسم المستقيمين (D_1) و (D_2) .

(2) ما هو معامل توجيه كل من (D_1) و (D_2) ؟

(3) هل (D_1) و (D_2) متوازيان ؟ علل .

(4) هل النقطتان $A(1;1)$ و $B(1;2)$ تنتميان إلى

المستقيم (D_1) ؟ و هل تنتميان إلى المستقيم (D_2) ؟

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} : \text{نعتبر الجملة } (S) \text{ التالية :}$$

بين لماذا تقبل الجملة (S) حلا وحيدا ، و عين مما سبق
حل هذه الجملة .

تمارين نماذج فروض و إختبارات سابقة

النمرين رقم 15 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس
 $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط : $A(2;1)$ ، $B(3;-1)$ ،
 $C(1;-4)$.

(1) أ- أحسب مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب- هل النقط A ، B و C في إستقامية ؟

(2) عين إحداثيي I منتصف القطعة $[AC]$.

(3) أ- أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C
و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له .

ب- هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ؟

(4) أوجد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل النقطة A
و يوازي محور الترتيب .

(5) أوجد معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل النقطة A
و يوازي محور الفواصل .

(6) عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته :

$$5x - 3y - 2 = 0$$

(7) نعتبر النقطة $E(2x;x)$ حيث x عدد حقيقي .

عين قيمة x التي من أجلها :

أ- تكون النقط A ، B و E في إستقامية .

ب- يكون المثلث EBA متساوي الساقين في E .

ج- يكون : $AE = \sqrt{5}$.

(8) عين إحداثيي النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$

(9) عين إحداثيي النقطة F حتى يكون الرباعي
 $ABCF$ متوازي أضلاع .

(10) هل المثلث ABC قائم ؟ علل .

النمرين رقم 16 :

(1) تحقق أن الجملة (S) التالية تقبل حلا ثم حل الجملة

$$(S) : \begin{cases} x - y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

(2) أكتب معادلة المستقيمين (D_1) و (D_2) حيث :

- المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و
 $B(2;5)$.

- المستقيم (D_2) يشمل النقطة $C\left(\frac{1}{3};0\right)$ و

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

(3) أ- أرسم بعناية المستقيمين (D_1) و (D_2) .

ب- من البيان عين نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) .

- ماذا تستنتج ؟

النمطين رقم 17 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) علم النقط $A(1;2)$ ، $B(3;0)$ ،

$C(-3;-4)$ ، $D(0;1)$.

(2) عين إحداثيي النقطة M حتى يكون الرباعي

$BMCA$ متوازي أضلاع .

(3) عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$

شعاع توجيه له .

(4) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل

محور الفواصل ، ثم مع حامل محور الترتيب .

(5) عين إحداثيي النقطة N بحيث B هي نظيرة A

بالنسبة لـ N .

(6) أحسب الأطوال AB ، AD ، DB ، ثم إستنتج

نوع المثلث ABD .

(7) عين E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD .

(8) إستنتج المسافة EN .

النمطين رقم 18 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

نعتبر النقط : $A(3;-1)$ ، $B(1;\alpha)$ ،

$C(-1;2)$ حيث α عدد حقيقي .

(1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون النقط A ، B ،

C في إستقامة .

(2) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$AOCD$ متوازي أضلاع .

- عين عندئذ طبيعة المثلث OCD .

(3) عين العدد الحقيقي α حتى يكون معامل توجيه

المستقيم (BC) هو 2 .

(4) عين العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (BC)

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$
 يوازي المستقيم الذي معادلته :

النمطين رقم 19 :

ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 8cm$ و

$AC = 4cm$.

(1) أنشئ النقط L و K حيث : $\overrightarrow{AL} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ و

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$$

(2) أحسب $\|\overrightarrow{AK}\|$ و $\|\overrightarrow{AL}\|$ ثم إستنتج $\|\overrightarrow{KL}\|$.

(3) نقطة M من المستوي تحقق العلاقة :

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم

أنشئ النقطة M .

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AL} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$$
 ب- إستنتج أن :

النمطين رقم 20 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

و لتكن (Δ_m) مجموعة النقط $M(x; y)$ من
المستوي التي تحقق :

$$mx + (m-1)y + 2 = 0 \text{ حيث } m \text{ عدد حقيقي .}$$

(1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي m فإن (Δ_m)
مستقيم .

(2) بين أن النقطة $A(-2; 2)$ تنتمي إلى المستقيم
 (Δ_m) من أجل كل عدد حقيقي m .

(3) عين قيمة العدد m حتى تكون النقطة $B(1; 1)$
تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

(4) نفرض أن $m \neq 1$: عين معامل توجيه المستقيم
 (Δ_m) .

(5) عين قيمة العدد m حتى يكون المستقيم (Δ_m)
يوازي المستقيم (d) ذو المعادلة :

$$10x + 8y + 5 = 0$$

(6) أرسم المستقيمات : (Δ_0) ، (Δ_1) ، (Δ_2) في
نفس المعلم .

يقول الشاعر :

ما كل ما يتمناه المرء يدركه

تجري الرياح بما لا تشتهي السفن

حل التمرين رقم 01 :

(1) حساب مركبتي كل شعاع :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(2) حساب مركبتي الشعاع : $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

$$\text{نضع } \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} : 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w} \text{ فنجد}$$

(3) تعيين العدد α حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

إذن حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا يكفي أن يتحقق : $-3(\alpha + 1) + 6 \times 2 = 0$ أي

$$-3\alpha + 9 = 0 \text{ و منه نجد : } \alpha = 3$$

حل التمرين رقم 02 :

(1) تعيين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف

$$[AC]$$

النقطة B منتصف $[AC]$ معناه :

$$\alpha = -1 \text{ و } x_B = \alpha = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-5 + 3}{2}$$

(2) تعيين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازيا للشعاع

$$\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \alpha + 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

من الشرط : $2(\alpha + 5) - 0 \times \frac{1}{2} = 0$ نجد :

$$\alpha = -5$$

(3) تعيين إحداثيي النقطة D بحيث :

$$2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

نضع : $D(x_D; y_D)$ و منه يكون :

$$2 \begin{pmatrix} -5 - x_D \\ 1 - y_D \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ و منه :}$$

$$\begin{cases} x_D = -\frac{1}{5} \\ y_D = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} -1 - 5x_D = 0 \\ 8 - 5y_D = 0 \end{cases}$$

$$\text{فنجد : } D \left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5} \right)$$

حل التمرين رقم 03 :

(1) كتابة معادلة للمستقيم (AC) :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} m - 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ إذن تكون نقطة}$$

$M(x; y)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا أي :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 3 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} m - 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ مرتبطين خطيا}$$

فنجد : $5(x - 2) - (m - 2)(y + 3) = 0$ أي :

$$I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) : \text{أي } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

إذن $M(x; y)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا و فقط

إذا كان الشعاعان $\vec{v}$ و $\overrightarrow{IM}$ مرتبطين خطيا أي :

$$\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ مرتبطين خطيا فنجد :}$$

$$5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$5x + 2y + \frac{1}{2} = 0$$

حل النمرين رقم 04 :

(1) تبيان أن : $B(-2; -1)$ و $C(-2; 5)$:

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ نكتب :

$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \begin{pmatrix} x_A - 0 \\ y_A - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و منه ينتج :}$$

$$\begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 1 \end{cases} \text{ أي } A(2; 1) \text{ . و من العلاقة الشعاعية}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ نكتب } \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j} \text{ أي}$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = -4 \\ y_B - y_A = -2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_B - 2 = -4 \\ y_B - 1 = -2 \end{cases} \text{ و منه ينتج}$$

$$B(-2; -1) \text{ . و لدينا : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ أي}$$

$$5x - (m-2)y - 3m - 4 = 0$$

(2) تعيين قيم m حتى تكون $B \in (AC)$:

$B \in (AC)$ معناه :

$$5x_B - (m-2)y_B - 3m - 4 = 0$$

$$-5 - \frac{3}{2}m + 3 - 3m - 4 = 0$$

$$-6 - \frac{9}{2}m = 0 \text{ و منه نجد : } m = -\frac{4}{3}$$

(3) تعيين قيم m بحيث يكون المستقيم (AC) يوازي

حامل محور الترتيب :

يكون المستقيم (AC) يوازي حامل محور الترتيب

من أجل : $m-2=0$ أي $m=2$ و في هذه الحالة

نجد : $5x - 3 \times 2 - 4 = 0$ أي : $x=2$.

(4) تعيين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم

(AC) يساوي 1 :

إنطلاقا من المعادلة الديكارتية

$$5x - (m-2)y - 3m - 4 = 0 \text{ نجد :}$$

$$y = \frac{5}{m-2}x - \frac{3m+4}{m-2} : m \neq 2$$

إذن معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1 معناه :

$$\frac{5}{m-2} = 1 \text{ أي } m-2=5 \text{ و منه } m=7$$

(5) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I

$$\text{منتصف } [AB] \text{ و يوازي الشعاع } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} :$$

$$\text{و منه نجد : } \begin{cases} x_I = \frac{2-2}{2} \\ y_I = \frac{1+5}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$$

$$I(0;3)$$

(4) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C
أ- تعيين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم كتابة معادلة له

: للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل $y = ax + b$

$$\text{حيث : } a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \text{ أي } a = \frac{5-1}{-2-2}$$

منه معامل توجيه المستقيم (Δ) هو : $a = -1$

بما أن $A \in (\Delta)$ فإن $y_A = -x_A + b$ أي

$$b = 3 \text{ و منه نجد : } b = 3$$

إذن المعادلة هي : $y = -x + 3$: (Δ)

ب- تعيين إحداثي M نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع
حامل محور الفواصل :

لما يتقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل فإن

$$y = 0 \text{ و منه ينتج } -x + 3 = 0 \text{ أي } x = 3$$

إذن نتحصل على : $M(3;0)$

حل التمرين رقم 05 :

(1) تعيين إحداثي النقطتين B و C ثم تعليم النقط A
و B و C :

من العلاقة الشعاعية $\vec{OA} = -\vec{i} - \vec{j}$ نكتب :

$$\begin{cases} x_C - 2 = -4 \\ y_C - 1 = 4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_C - x_A = -4 \\ y_C - y_A = 4 \end{cases} \text{ و منه ينتج } C(-2;5)$$

(2) برهان أن النقط O ، A ، B في إستقامة :

يكفي إثبات مثلا أن الشعاعين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ مرتبطان

$$\text{خطيا : } \vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \vec{OB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{و بما أن : } 2 \times (-1) - 1 \times (-2) = 0 \text{ فإن}$$

الشعاعين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ مرتبطان خطيا ؛ إذن النقط
 O ، A ، B في إستقامة .

(3) تعيين إحداثي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع ثم تعيين إحداثي مركزه I

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا

$$\text{كان } \vec{AB} = \vec{DC} \text{ حيث : } \vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ و}$$

$$\vec{DC} \begin{pmatrix} -2 - x_D \\ 5 - y_D \end{pmatrix} \text{ و منه بالمساواة نتحصل على :}$$

$$-2 - x_D = -4 \text{ و } 5 - y_D = -2 \text{ و منه نجد :}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases} D(2;7)$$

I مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ و منه I هي

نقطة تقاطع قطريه أي أن I هي منتصف $[AC]$ و

هي منتصف $[BD]$:

(3) حساب إحداثيي النقطة N منتصف $[BC]$:

$$\text{و منه : } \begin{cases} x_N = \frac{2+5}{2} \\ y_N = \frac{6-1}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} . N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

4- تعيين إحداثيي النقطة M المعرفة بالعلاقة :

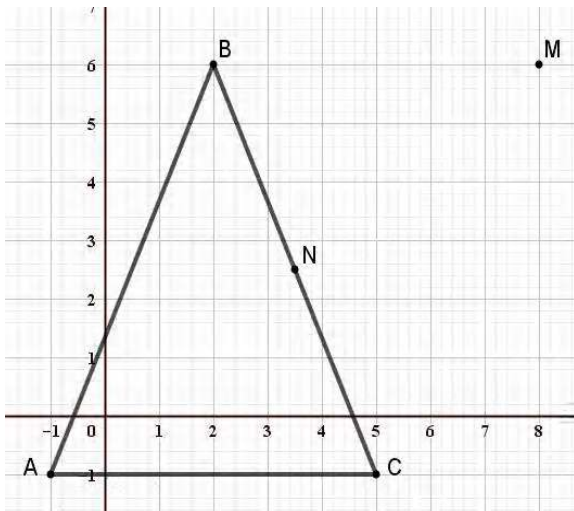
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{من العلاقة الشعاعية } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{OC}$$

نكتب :

$$\begin{pmatrix} x_M - 0 \\ y_M - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_B - x_N \\ y_B - y_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - 0 \\ y_C - 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} x_M = 5 + 1 + 2\left(2 - \frac{7}{2}\right) + 5 \\ y_M = -1 + 1 + 2\left(6 - \frac{5}{2}\right) - 1 \end{cases} . M(8;6)$$



$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ أي } \begin{pmatrix} x_A - 0 \\ y_A - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و منه ينتج :}$$

$$\begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = -1 \end{cases} \text{ أي } A(-1; -1) . \text{ و من العلاقة}$$

$$\text{الشعاعية } \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} \text{ نكتب } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ أي}$$

$$\begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 6 \end{cases} \text{ و منه ينتج } \begin{pmatrix} x_B - 0 \\ y_B - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ أي}$$

$$B(2;6) . \text{ و لدينا : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أي}$$

$$\begin{cases} x_C - x_A = 6 \\ y_C - y_A = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_C + 1 = 6 \\ y_C + 1 = 0 \end{cases} \text{ و منه ينتج}$$

$$\begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -1 \end{cases} \text{ أي } C(5; -1) .$$

(2) أ- حساب الأطوال AB ، AC و BC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ أي :}$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 7^2} \text{ أي } AB = \sqrt{58} .$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \text{ أي :}$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 0^2} \text{ أي } AC = 6 .$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \text{ أي :}$$

$$BC = \sqrt{9 + 49} \text{ أي } BC = \sqrt{58} .$$

ب- إستنتاج نوع المثلث ABC :

بما أن $AB = BC$ فإن المثلث ABC متساوي

الساقين في الرأس B .

حل التمرين رقم 06 :

(1) تعليم النقطة D بحيث : $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

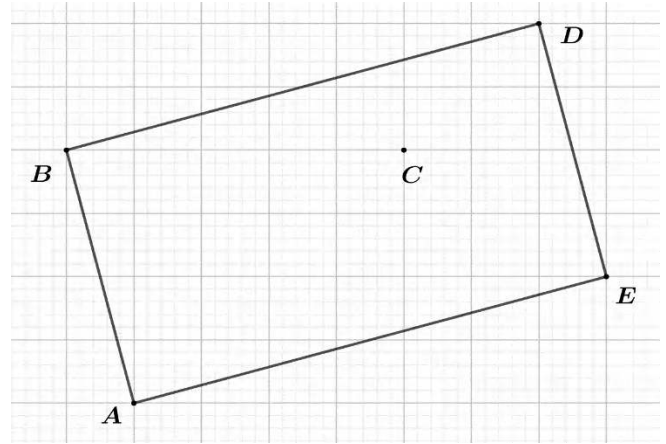
$\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ معناه $\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DC}$ أي أن

الشعاعين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ لهما نفس الإتجاه و نفس

المنحى بحيث $DA = 3DC$.

(2) تعليم النقطة E بحيث : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$

نعلم النقطة E بحيث يكون الرباعي $AEDB$ متوازي أضلاع .



(3) البرهان أن $AEDB$ متوازي أضلاع :

بما أن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$ و بكتابة

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$ (علاقة شال) نتحصل على :

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$ أي $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$

شعاعان متقابلان متساويان (و منه فالرباعي $AEDB$ متوازي أضلاع .

(4) البرهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا

: $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MD}$

باستخدام علاقة شال : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}$ و كذلك

: $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$ نجد :

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{DC}$$

أي $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DC}$

من السؤال (1) نعلم أن : $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ إذن نجد

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MD}$$

(5) ليكن O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AO}$$

بما أن $AEDB$ متوازي أضلاع فإن

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$$

الأضلاع $AEDB$ و منه النقطة O منتصف القطعة

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AO}$$

حل التمرين رقم 07 :

(1) تعيين α حتى تكون النقط A ، B ، O في

إستقامية :

تكون النقط A ، B ، O في إستقامية إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix}$$

من شرط الارتباط الخطي ينتج :

$$2 \times (-1) - 3\alpha = 0 \text{ و منه نجد : } \alpha = -\frac{2}{3}$$

(2) نعتبر أن : $\alpha = 2$

تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \text{ إذن}$$

$$\text{بالمساواة نجد : } \begin{cases} 3 - x_D = 0 \\ 2 - y_D = -4 \end{cases} \text{ أي } D(3;6)$$

$$(3) \text{ نعتبر النقطة } E \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

نبين أن النقطة E هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$:

يكفي أن نبين أن E هي نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ أي نبين أن E هي منتصف القطعتين $[AC]$ و $[BD]$:

نفرض I منتصف القطعة $[AC]$ إذن :

$$\text{أي } \begin{cases} x_I = \frac{2+3}{2} \\ y_I = \frac{3+2}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$$

$$I \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \text{ أي أن } I \text{ منطبقة على } E$$

نفرض J منتصف القطعة $[BD]$ إذن :

$$\text{أي } \begin{cases} x_J = \frac{2+3}{2} \\ y_J = \frac{-1+6}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_J = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_J = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

$$J \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \text{ أي أن } J \text{ منطبقة على } E$$

إذن ينتج أن E هي نقطة تقاطع القطرين و منه E هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

(4) أ- كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC) :

تكون النقطة $M(x; y) \in (\Delta)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا ($\overrightarrow{BC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)) بحيث :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

من شرط الارتباط الخطي نجد :

$$3(x-2) - 1(y-3) = 0$$

$$(\Delta): 3x - y - 3 = 0$$

طريقة 2 : نعلم أن المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ)

$$\text{تكون من الشكل : } ax + by + c = 0$$

$$\text{حيث : } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه لـ } (\Delta) ; \text{ لكن لدينا}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ و منه بالمطابقة نجد : } \begin{cases} -b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \text{ أي :}$$

$$a = 3 \text{ و } b = -1 \text{ و منه تصبح المعادلة الديكارتية}$$

من الشكل : $3x - y + c = 0$ و من الشرط

$A \in (\Delta)$ ينتج : $3x_A - y_A + c = 0$ أي

$$c = -3 \text{ و منه نجد : } 3 \times 2 - 3 + c = 0$$

نتيجة : $(\Delta): 3x - y - 3 = 0$

ب- تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) مع حامل

محور الفواصل :

لما يتقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل يكون

$$y = 0 \text{ و منه ينتج : } 3x - 0 - 3 = 0 \text{ أي } x = 1$$

نتيجة : نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل

هي : $N(1;0)$

ج- (Δ') المستقيم الذي معادلته : $y = x + 1$ ،

إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') :

$$y = x + 1 \text{ و منه } (\Delta'): x - y + 1 = 0$$

لما يتقاطع (Δ) و (Δ') يكون :

$$3x - y - 3 = x - y + 1 \text{ أي } 3x - x - 3 - 1 = 0$$

$$2x - 4 = 0 \text{ و منه نجد } x = 2$$

و بتعويض قيمة x في معادلة (Δ) أو

$$(\Delta') \text{ نتحصل على : } y = 3$$

نتيجة : نقطة تقاطع (Δ) مع (Δ') هي $G(2;3)$

حل التمرين رقم 08 :

(1) تعيين قيم α حتى تكون النقط A ، B و C في

إستقامية :

تكون النقط A ، B ، C في إستقامية إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

من شرط الارتباط الخطي ينتج :

$$3(\alpha - 2) + 2(\alpha^2 + 2) = 0 \text{ و منه نجد :}$$

$$2\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \text{ و بالملاحظة نجد :}$$

$$2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(\alpha + 2) = 0 \text{ إذن : } \alpha = -2 \text{ أو}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

(2) كتابة معادلة المستقيم (AB) :

طريقة 1 : المستقيم (AB) يشمل النقطتين A و B

إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

تكون النقطة $M(x; y) \in (AB)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \text{ ؛ و من شرط الارتباط الخطي نجد :}$$

$$-2(x + 1) - 3(y - 2) = 0 \text{ أي :}$$

$$(AB): -2x - 3y + 4 = 0$$

طريقه 2 : نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم

(AB) تكتب من الشكل : $y = ax + b$ حيث a

معامل التوجيه يحسب كما يلي :

$$a = -\frac{2}{3} \text{ أي } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{2 + 1}$$

فيكون إذن : $y = -\frac{2}{3}x + b$ ؛ و بما أن

$A \in (AB)$ فإن : $y_A = -\frac{2}{3}x_A + b$ أي :

$$b = \frac{4}{3} \text{ و منه نجد } 2 = -\frac{2}{3} \times (-1) + b$$

إذن : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ و هي المعادلة

المختصرة (المبسطة) للمستقيم (AB) .

(3) كتابة معادلة المستقيم (Δ) الذي معامل توجيهه 2

و يشمل النقطة $I(1;5)$:

معناه المعادلة المختصرة (المبسطة) للمستقيم (Δ)

هي من الشكل : $y = 2x + b$ ($a = 2$)

و بما أن $I(1;5) \in (\Delta)$ فإن : $y_I = 2x_I + b$

أي $5 = 2 \times 1 + b$ و منه نجد : $b = 3$

إذن : $y = 2x + 3$ (Δ)

(4) تعيين $(AB) \cap (\Delta)$:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y = 2x + 3 \end{cases} \text{ و منه عند التقاطع نجد :}$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 2x + 3 \text{ أي :}$$

$$-\frac{8}{3}x = \frac{5}{3} \text{ أي } -\frac{2}{3}x - 2x = 3 - \frac{4}{3}$$

منه $x = -\frac{5}{8}$ ؛ و بتعويض قيمة x في معادلة

$$(\Delta) \text{ مثلا نتحصل على : } y = \frac{7}{4}$$

إذن نقطة تقاطع (AB) و (Δ) هي $I\left(-\frac{5}{8}; \frac{7}{4}\right)$

حل التمرين رقم 09 :

(1) إيجاد أطوال أضلاع المثلث ABC :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 4 \end{cases}$$

إستنتاج نوعه : بما أن $AB = AC$ فإن المثلث

ABC متساوي الساقين ذو الرأس A ، و من جهة

أخرى : $AB^2 + AC^2 = 16 = BC^2$ و منه حسب

نظرية فيثاغورس فإن المثلث ABC قائم في A .

إذن ينتج أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين في

A .

(2) تعيين قيمة α حتى تكون النقط A ، B و

$D(\alpha; \alpha + 1)$ في إستقامة واحدة :

تكون النقط A ، B ، D في إستقامة إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$$

من شرط الارتباط الخطي ينتج :

$$2(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1) = 0 \text{ و منه نجد :}$$

$$4\alpha = 0 \text{ أي } \alpha = 0 \text{ فينتج : } D(0;1)$$

(3) نبين أن الرباعي $ABEC$ مربع :

نعلم أن كل مربع هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و
ضلعان متتاليان متقايسان :

$$\text{نبين أن } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} :$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix}$$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ (شعاعان متقابلان متساويان) و منه
الرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع .

و مما سبق نعلم أن المثلث ABC قائم و متساوي
الساقين في A ؛ إذن متوازي الأضلاع $ABCE$ فيه
زاوية قائمة و ضلعان متتاليان متقايسان فهو مربع .

(4) أ- إيجاد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل B و

يوازي (AC) :

الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) حيث :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

تكون النقطة $M(x; y) \in (\Delta_1)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} ; \text{ و من شرط الارتباط الخطي نجد :}$$

$$2(x-1) - 2y = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta_1): 2x - 2y - 2 = 0$$

ب- إيجاد إحداثيي نقطتي تقاطع (Δ_1) مع محوري
الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل (xx') :

$$\text{نضع } y = 0 : \text{ و منه نجد } 2x - 2 \times 0 - 2 = 0$$

$$\text{أي } x = 1 \text{ و منه نقطة التقاطع هي : } A(1;0)$$

مع حامل محور الترتيب (yy') :

$$\text{نضع } x = 0 : \text{ و منه نجد } 2 \times 0 - 2y - 2 = 0$$

$$\text{أي } y = -1 \text{ و منه نقطة التقاطع هي : } N(0;-1)$$

(5) كتابة معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يمر بالنقطة O و

$$\text{يوازي المستقيم ذو المعادلة : } 3x + 2y + 1 = 0$$

- المستقيم (Δ_2) يوازي المستقيم ذو المعادلة :

$$3x + 2y + 1 = 0 \text{ معناه شعاع توجيه للمستقيم ذو}$$

$$\text{المعادلة : } 3x + 2y + 1 = 0 \text{ هو أيضا شعاع توجيه}$$

$$\perp (\Delta_2) \text{ إذن : } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم}$$

$$(\Delta_2) ; \text{ و بما أن } O \in (\Delta_2) \text{ فإنه :}$$

تكون النقطة $M(x; y) \in (\Delta_2)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$$\text{أي } \begin{cases} x_c = -4 \\ y_c = 0 \end{cases} : \text{ إذن } \begin{cases} x_c - 2 = -6 \\ y_c + 2 = 2 \end{cases} . C(-4;0)$$

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} - 5\vec{j}$ ينتج

$$. B(-3;-5) \text{ و بالتالي } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(2) تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -4 - x_D \\ -y_D \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$$

$$\text{بالمساواة نجد : } \begin{cases} -4 - x_D = -5 \\ -y_D = -3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 3 \end{cases}$$

و منه نجد $D(1;3)$.

(3) لتكن M منتصف القطعة $[BC]$ و النقطة N

$$\text{التي تحقق العلاقة الشعاعية : } \overrightarrow{DM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DN}$$

أ- إستنتاج أن النقط D ، M و N في إستقامة :

$$\text{من العلاقة الشعاعية } \overrightarrow{DM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DN} \text{ ينتج أن}$$

الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{DN}$ مرتبطان خطيا لأنه يوجد

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \text{ و من شرط الارتباط الخطي نجد :}$$

$$(\Delta_2): 3x + 2y = 0 \text{ و هي المعادلة الديكارتية}$$

للمستقيم (Δ_2) (المعادلة المختصرة هي

$$(\Delta_2): y = -\frac{3}{2}x .$$

(6) إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) :

إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) هي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

و بجمع المعادلتين مثلاً نتحصل على : $5x = 2$

أي $x = \frac{2}{5}$ ؛ و بتعويض قيمة x في المعادلة -1-

مثلاً نجد : $2 \times \frac{2}{5} - 2y = 2$ أي $y = -\frac{3}{5}$

نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) هي $I(\frac{2}{5}; -\frac{3}{5})$.

حل التمرين رقم 10 :

(1) تعيين إحداثيي النقطة C ، ثم تعليم النقط A ، B و C :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_c - 2 \\ y_c + 2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_c - x_A \\ y_c - y_A \end{pmatrix}$$

و بالمساواة مع $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ نتحصل على :

$\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y+5 \end{pmatrix} ; \text{ و من شرط الارتباط الخطي نجد :}$$

$$2(x+3) + 6(y+5) = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta): 2x + 6y + 36 = 0$$

(5) لتكن النقطة $E(-2; -4)$. حساب أطوال أضلاع

المثلث ACE ثم إستنتاج طبيعته :

$$\begin{cases} AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{40} \\ AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{20} \\ EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} = \sqrt{20} \end{cases}$$

إستنتاج نوعه : بما أن $AE = EC$ فإن المثلث

ACE متساوي الساقين ذو الرأس E ، و من جهة

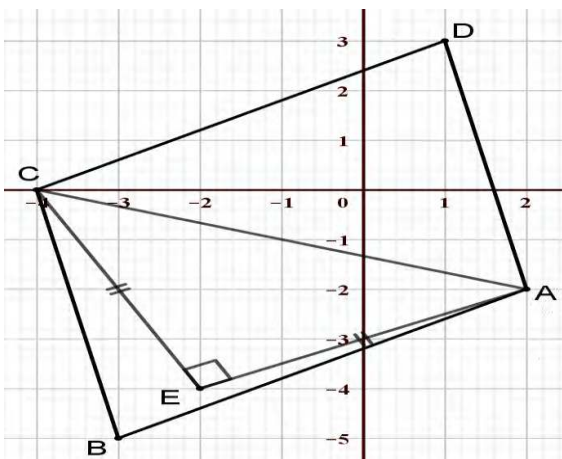
أخرى : $AE^2 + EC^2 = 40 = AC^2$ و منه

حسب نظرية فيثاغورس فإن المثلث ACE قائم في

E .

إذن ينتج أن المثلث ACE قائم و متساوي الساقين في

E .



عدد حقيقي $k = \frac{3}{2}$ بحيث $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DN}$ و منه

نستنتج أن النقط D ، M و N في إستقامة .

ب- تعيين إحداثيي النقطة N :

نعين أولاً إحداثيي M منتصف القطعة $[BC]$:

$$\text{أي } \begin{cases} x_M = \frac{-3-4}{2} \\ y_M = \frac{-5+0}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

$$M\left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

و من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$ ينتج أن :

$$\text{أي } \begin{cases} x_N = -2 \\ y_N = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -\frac{7}{2} - 1 = \frac{3}{2}(x_N - 1) \\ -\frac{5}{2} - 3 = \frac{3}{2}(y_N - 3) \end{cases}$$

$$N\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$$

(4) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و

يوازي للمستقيم (AC) :

بما أن $(\Delta) \parallel (AC)$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو شعاع

توجيه للمستقيم (Δ) حيث :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (معطى في التمرين)}$$

تكون النقطة $M(x; y) \in (\Delta)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاان $\overrightarrow{BM}$ (لأن (Δ) يشمل النقطة B) و

حل التمرين رقم 11 :

(1) تعليم النقط A ، B و C :

(2) حساب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم تحديد طبيعته :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{2} \\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{10} \end{cases}$$

بما أن $AB^2 + AC^2 = 10 = BC^2$ و منه حسب نظرية فيثاغورس فإن المثلث ABC قائم في A .

(3) حساب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم كتابة معادلة له :

بما أن $A \in (AB)$ و $B \in (AB)$ فإن المعادلة

المبسطة (المختصرة) للمستقيم (AB) التي من

الشكل : $y = ax + b$ حيث a معامل التوجيه يحسب كما يلي :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1 \text{ و منه تصبح المعادلة}$$

من الشكل : $y = x + b$ ؛ نعين b من الشرط

$A \in (AB)$ مثلا فنجد : $y_A = x_A + b$ أي

$1 = 2 + b$ و منه $b = -1$ ؛ إذن نتحصل على :

$y = x - 1$ و هي المعادلة المبسطة للمستقيم (AB)

(4) نعتبر النقطة $F(-1; \alpha)$.

تحديد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في إستقامة :

تكون النقط A ، B ، F في إستقامة إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$$1(\alpha - 1) - 1 \times (-3) = 0 \text{ أي } \alpha + 2 = 0 \text{ و}$$

منه نجد : $\alpha = -2$

فينتج إذن : $F(-1; -2)$

(5) رسم المستقيم (Γ) الذي معادلته : $y = 5x + 3$

عادة نستعمل جدولا مساعدا :

x	0	-1
y	3	-2

(6) تحديد نقطة تقاطع المستقيمين (Γ) و (AB) بيانيا

من خلال الشكل نجد : $I(-1; -2)$

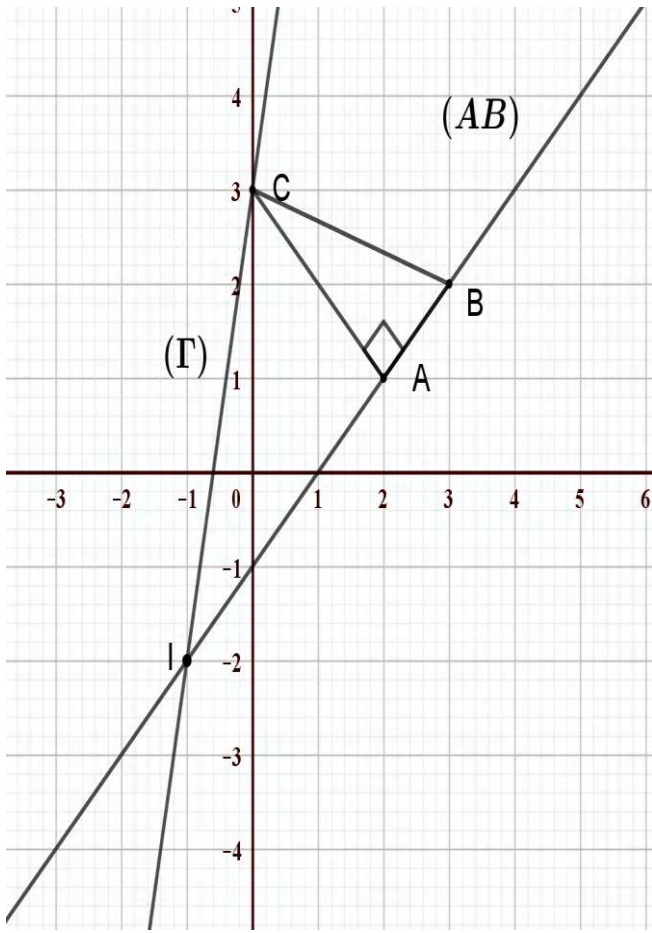
II - نعتبر جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S) \begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - y = -3 \end{cases}$$

(1) التحقق أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ فنجد :}$$

إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا .



حل التمرين رقم 12 :

نريد حل جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S) \begin{cases} 2z^2 - t^2 = -1 \\ 3z^2 + t^2 = 21 \end{cases}$$

1 أ- بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ ، كتابة جملة

معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) :

$$(S') \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases} \text{ نتحصل على :}$$

ب- حل جملة المعادلتين (S') :

طريقة التعويض :

من المعادلة الأولى نستخرج y فنجد : $y = 2x + 1$

(2) حل الجملة (S) :

نستعمل طريقة الجمع :

نضرب المعادلة الأولى في -1 ثم نجمع مع المعادلة الثانية لنجد : $-x + 5x = -1 - 3$ أي $4x = -4$ و منه $x = -1$ ؛ لإيجاد قيمة y يكفي أن نعوض قيمة x في المعادلة الأولى : $-1 - y = 1$ أي $y = -2$

إذن للجملة (S) حل وحيد هو :

$$(\alpha; \beta) = (-1; -2)$$

التفسير الهندسي :

نكتب الجملة $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - y = -3 \end{cases}$ من الشكل :

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 5x - y + 3 = 0 \end{cases} \text{ و هي نفسها المعادلتين}$$

الديكارتيتين للمستقيمين (AB) و (Γ) ؛ إذن حل

الجملة (S) يمثل بيانيا إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين

(AB) و (Γ) أي إحداثيي النقطة $I(-1; -2)$.

الإنشاء الهندسي :

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$3x + (2x + 1) = 21 \text{ أي } 5x = 20 \text{ و منه ينتج :}$$

$x = 4$ ؛ و لإيجاد قيمة y يكفي تعويض قيمة x في

$$y = 9 \text{ المعادلة الأولى لنجد : } 3 \times 4 + y = 21 \text{ أي } y = 9$$

إذن الجملة (S') تقبل حلا وحيدا هو

$$(x_0; y_0) = (4; 9)$$

(2) إستنتاج حلول الجملة (S) :

$$\text{نعلم أن : } \begin{cases} z^2 = x \\ t^2 = y \end{cases} \text{ و من السؤال السابق وجدنا أن}$$

$$\text{حل الجملة } \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases} (S') \text{ هو } (4; 9) ؛$$

إذن لإيجاد حلول الجملة (S) يكفي أن نضع :

$$\begin{cases} z^2 = 4 \\ t^2 = 9 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} \sqrt{z^2} = \sqrt{4} \\ \sqrt{t^2} = \sqrt{9} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} |z| = 2 \\ |t| = 3 \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\text{نتحصل على : } \begin{cases} z = 2 \vee z = -2 \\ t = 3 \vee t = -3 \end{cases} \text{ و منه الجملة}$$

(S) لها 4 حلول هي الثنائيات :

$$S = \{(2; 3), (2; -3), (-2; 3), (-2; -3)\}$$

حل التمرين رقم 13 :

❖ إيجاد عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف و إيجاد عدد

الطاولات :

نترجم الوضعية إلى معطيات رياضية أو مشكلة رياضية

و ذلك بوضع : x يمثل عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف .

y يمثل عدد الطاولات .

لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد

لهم أماكن للجلوس إذن : $5y + 3 = x$

لو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى

شاغرة إذن : $6y - 4 = x$

إذن نتحصل على جملة معادلتين لمجهولين :

$$(S) \begin{cases} x - 6y = -4 \\ x - 5y = 3 \end{cases}$$

نتحقق أولا أن الجملة (S) تملك حلا وحيدا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ ؛ إذن } (S) \text{ تملك حلا وحيدا}$$

نعين هذا الحل بطريقة التعويض مثلا :

من المعادلة الأولى نستخرج x فنجد : $x = 6y - 4$

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$6y - 4 - 5y = 3 \text{ و منه ينتج :}$$

$y = 7$ ؛ و لإيجاد قيمة x يكفي تعويض قيمة y في

المعادلة الأولى لنجد : $x - 6 \times 7 = -4$ أي

$x = 38$ ؛ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو :

$$(x; y) = (38; 7) \text{ ؛ فيكون عدد التلاميذ الذي دعاهم}$$

يوسف هو 38 تلميذ و عدد الطاولات هو 7 طاولات .

حل التمرين رقم 14 :

نعتبر المستقيم (D_1) الذي معادلته : $y = x + 1$ و

المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y = -x + 3$

1) رسم المستقيمين (D_1) و (D_2) :

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_1) :

x	0	1
y	1	2

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_2) :

x	0	1
y	3	2

2) تعيين معامل توجيه كل من (D_1) و (D_2) :

نسمي a_1 معامل توجيه المستقيم (D_1) و من المعادلة

$$\text{المبسطة } y = x + 1 \text{ ينتج : } a_1 = 1$$

نسمي a_2 معامل توجيه المستقيم (D_2) و من المعادلة

$$\text{المبسطة } y = -x + 3 \text{ ينتج : } a_2 = -1$$

3) المستقيمان (D_1) و (D_2) غير متوازيين لأن

$$\text{معاملي توجيههما مختلفين : } a_1 \neq a_2 .$$

4) هل النقطتان $A(1;1)$ و $B(1;2)$ تنتميان إلى

المستقيم (D_1) ؟

النقطة $A(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D_1) إذا و فقط

$$\text{إذا كان } y_A = x_A + 1 \text{ ؛ لكن بالتعويض : } 1 \neq 1 + 1$$

$$\text{إذن } A \notin (D_1) .$$

النقطة $B(1;2)$ تنتمي إلى المستقيم (D_1) إذا و فقط

$$\text{إذا كان } y_B = x_B + 1 \text{ ؛ و بالتعويض : } 2 = 1 + 1$$

$$\text{إذن } B \in (D_1) .$$

هل تنتميان إلى المستقيم (D_2) ؟

النقطة $A(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D_2) إذا و فقط

$$\text{إذا كان } y_A = -x_A + 3 \text{ ؛ لكن بالتعويض :}$$

$$1 \neq -1 + 3 \text{ ؛ إذن } A \notin (D_2) .$$

النقطة $B(1;2)$ تنتمي إلى المستقيم (D_2) إذا و فقط

$$\text{إذا كان } y_B = -x_B + 3 \text{ ؛ و بالتعويض :}$$

$$2 = -1 + 3 \text{ ؛ إذن } B \in (D_2) .$$

$$(5) \text{ نعتبر الجملة } (S) \text{ التالية : } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

الجملة (S) حلا وحيدا لأن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ ؛ إذن } (S) \text{ تملك حلا وحيدا}$$

تعيين مما سبق حل هذه الجملة :

بدون الخوض في الحل الحسابي و بالرجوع لنمط

السؤال (عين مما سبق ..) نلاحظ أن المعادلة

$$x - y + 1 = 0 \text{ تكافئ } y = x + 1 \text{ و هي المعادلة}$$

المبسطة للمستقيم (D_1) و نفس الشيء بالنسبة للمعادلة

$$x + y - 3 = 0 \text{ فهي تكافئ } y = -x + 3 \text{ و هي}$$

المعادلة المبسطة للمستقيم (D_2) ؛ إذن حل الجملة

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ هو إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين}$$

$$(D_1) \text{ و } (D_2) \text{ ؛ لكن مما سبق نعلم أن } B \in (D_1)$$

$$\text{و } B \in (D_2) \text{ ؛ إذن ينتج : } (D_1) \cap (D_2) = \{B\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_I = \frac{2+1}{2} \\ y_I = \frac{1-4}{2} \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \end{array} \right. \text{ و منه } I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

(3) أ- إيجاد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له :

تكون النقطة $M(x; y) \in (\Delta)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{CM}$ (لأن (Δ) يشمل النقطة C) و

$\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix} \text{ ؛ و من شرط}$$

الإرتباط الخطي نجد :

$$-2(x-1) - 1(y+4) = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta): -2x - y - 2 = 0$$

ب- هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ؟

النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا و فقط

إذا كان $-2x_D - y_D - 2 = 0$ ؛ لكن بالتعويض :

$$-2 \times 0 - 1 - 2 = -3 \neq 0 \text{ إذن } D \notin (\Delta)$$

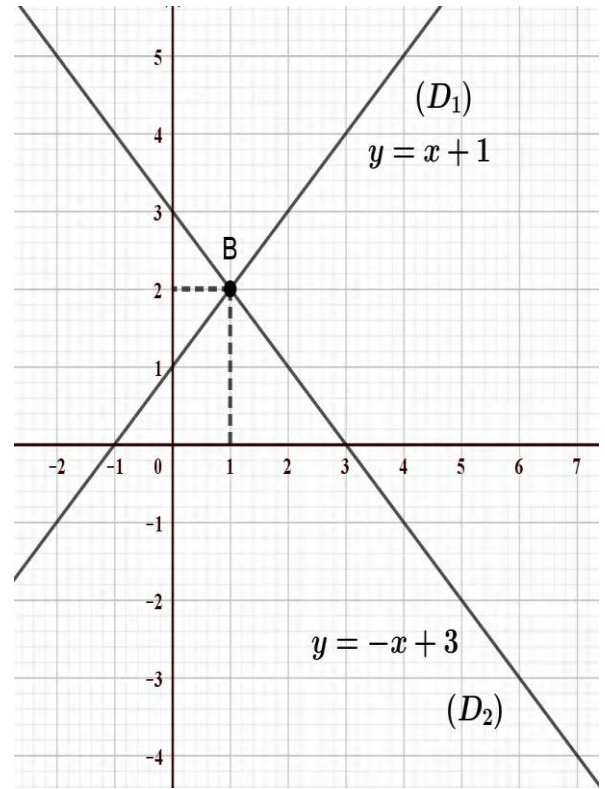
(4) إيجاد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل النقطة A

و يوازي محور الترتيب :

نعلم أن كل مستقيم يوازي محور الترتيب له معادلة من

الشكل : $x = a$ حيث a عدد حقيقي معطى .

و منه : $(x_0; y_0) = (1; 2)$ هو حل الجملة (S) .



تمارين من فروض و إختبارات سابقة :

حل التمرين رقم 15 :

(1) أ- حساب مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

ب- بما أن $1 \times (-5) + 2 \times (-1) = -7 \neq 0$ فإن

الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي

النقط A ، B و C ليست في إستقامة .

(2) تعيين إحداثيي I منتصف القطعة $[AC]$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2x-2 \\ x-1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$$

و من شرط الارتباط الخطي نجد :

$$5x - 5 = 0 : \text{ أي } 1(x-1) + 2(2x-2) = 0$$

و منه نجد $x = 1$.

ب- يكون المثلث EBA متساوي الساقين في E .

معناه يكون : $EA = EB$ بحيث :

$$\text{أي } \begin{cases} EA = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} \\ EB = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2} \end{cases}$$

$$\text{و منه ينتج } \begin{cases} EA = \sqrt{(2-2x)^2 + (1-x)^2} \\ EB = \sqrt{(3-2x)^2 + (-1-x)^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{(2-2x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{(3-2x)^2 + (-1-x)^2}$$

و بتربيع الطرفين نجد :

$$(2-2x)^2 + (1-x)^2 = (3-2x)^2 + (-1-x)^2$$

ثم بالنشر و التبسيط نجد : $5 = 10$ و هذا مستحيل ...

إذن لا توجد أي قيمة للعدد x بحيث يكون المثلث

EBA متساوي الساقين في E .

ج- يكون : $AE = \sqrt{5}$.

$AE = \sqrt{5}$ معناه :

$$\sqrt{(2x-2)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{5} \text{ و بالتربيع نجد}$$

بما أن المستقيم (Δ_1) يشمل النقطة A و يوازي محور الترتيب فإن معادلة (Δ_1) هي : $x = 2$ (2 يمثل فاصلة النقطة A) .

(5) إيجاد معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل النقطة A و يوازي محور الفواصل :

نعلم أن كل مستقيم يوازي محور الفواصل له معادلة من الشكل : $y = b$ حيث b عدد حقيقي معطى .

بما أن المستقيم (Δ_2) يشمل النقطة A و يوازي

محور الفواصل فإن معادلة (Δ_2) هي : $y = 1$ (1 يمثل ترتيب النقطة A) .

(6) تعيين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته :

$$5x - 3y - 2 = 0$$

قصد تعيين معامل التوجيه ننقل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة المبسطة (المختصرة) كما يلي :

$$5x - 3y - 2 = 0 \text{ معناه } -3y = -5x + 2 \text{ و}$$

$$\text{منه } y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} \text{ و هي المعادلة المبسطة لهذا}$$

المستقيم ؛ إذن معامل توجيهه هو : $a = \frac{5}{3}$.

(7) نعتبر النقطة $E(2x; x)$ حيث x عدد حقيقي .

تعيين قيمة x التي من أجلها :

أ- تكون النقط A ، B و E في إستقامية .

تكون النقط A ، B و E في إستقامية إذا و فقط إذا

كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا حيث :

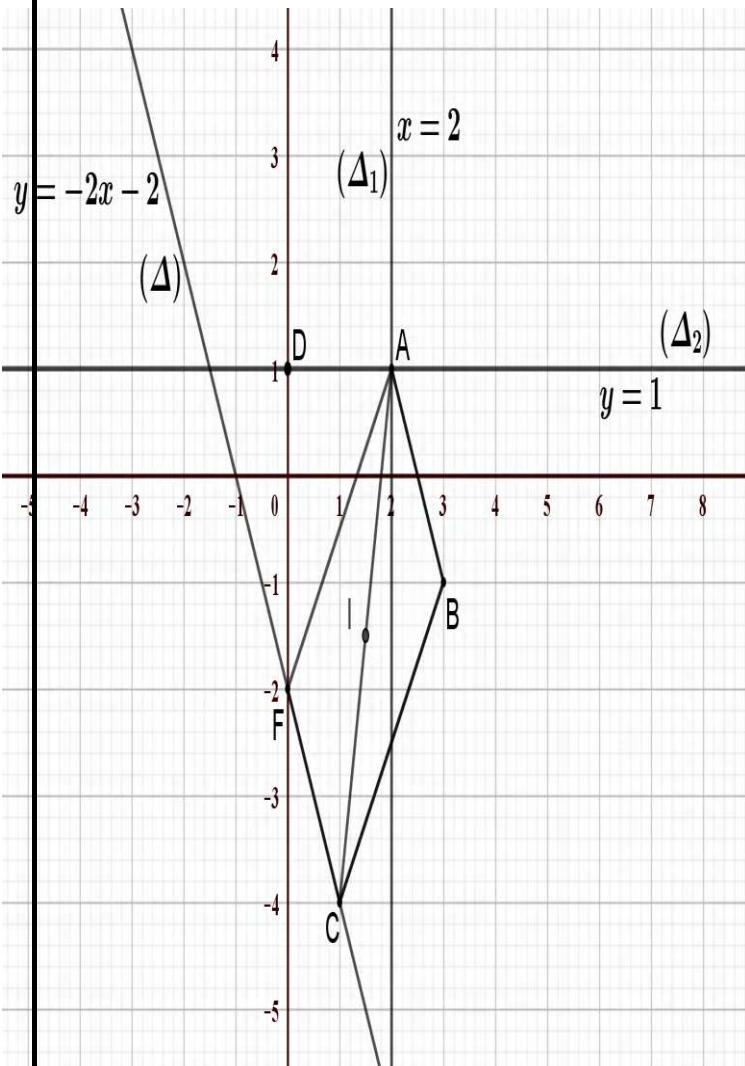
$$F(0; -2) \text{ و منه نجد } \begin{cases} 1 - x_F = 1 \\ -4 - y_F = -2 \end{cases}$$

(10) لمعرفة هل المثلث ABC قائم نحسب أطوال أضلاعه كما يلي :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5} \\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{26} \\ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 \neq BC^2 \\ AC^2 + BC^2 \neq AB^2 \\ AB^2 + BC^2 \neq AC^2 \end{cases} \text{ نلاحظ أن :}$$

إذن المثلث ABC ليس قائما .



$$(2x - 2)^2 + (x - 1)^2 = 5$$

$$\text{نجد } 5x^2 - 10x = 0 \text{ أي } x(5x - 10) = 0 \text{ و}$$

$$\text{منه : } x = 0 \text{ أو } x = 2$$

إذن توجد قيمتان للعدد x هما 0 و 2 بحيث يكون

$$AE = \sqrt{5}$$

(8) تعيين إحداثيي النقطة M بحيث :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M - 2 \\ y_M - 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$$

$$\text{و كذلك } 3\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3(3 - x_M) \\ 3(-1 - y_M) \end{pmatrix} \text{ ؛ إذن بالمساواة :}$$

$$\begin{cases} x_M = 11/4 \\ y_M = -1/2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_M - 2 = 9 - 3x_M \\ y_M - 1 = -3 - 3y_M \end{cases}$$

$$\text{و منه } M(11/4; -1/2)$$

(9) تعيين إحداثيي النقطة F حتى يكون الرباعي

$ABCF$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا

كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} 1 - x_F \\ -4 - y_F \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} x_C - x_F \\ y_C - y_F \end{pmatrix}$$

بالمساواة نجد :

حل النمرين رقم 16 :

(1) التحقق أن الجملة (S) التالية تقبل حلا ثم حل

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \quad \text{الجملة (S) :}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{؛ إذن (S) تملك حلا}$$

وحيدا .

نستعمل طريقة الجمع مثلا :

بجمع المعادلتين نتحصل على :

$$x - 3x - y + y = -3 - 1 \quad \text{أي } -2x = -4$$

منه نجد $x = 2$ ؛ و لإيجاد قيمة y نعوض قيمة x

في المعادلة الأولى مثلا لنجد : $2 - y = -3$ و منه

ينتج $y = 5$ ؛ إذن حل الجملة (S) هو الثنائية

(2;5) .

(2) كتابة معادلة المستقيمين (D_1) و (D_2) حيث :

- المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و

$B(2;5)$.

طريقة 1 : البحث عن المعادلة المختصرة (المبسطة)

المستقيم (D_1) معرف بنقطتين ؛ معامل توجيهه a

يحسب كما يلي :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{2 + 2} = 1 \quad \text{؛ إذن المعادلة}$$

المختصرة تصبح من الشكل : $y = x + b$ حيث b

ثابت يطلب تعيينه ؛ بما أن $A \in (D_1)$ فإن :

$$y_A = x_A + b \quad \text{أي } 1 = -2 + b \quad \text{و منه } b = 3$$

إذن : $(D_1) : y = x + 3$.

طريقة 2 : البحث عن المعادلة الديكارتية

بما أن المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و

$B(2;5)$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيهه لـ

(D_1) حيث : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ؛ تكون نقطة

$M(x; y) \in (D_1)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان

$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا حيث

و من شرط الارتباط الخطي نجد :

$$4(x + 2) - 4(y - 1) = 0 \quad \text{أي :}$$

$$4x - 4y + 12 = 0 \quad \text{و بقسمة الطرفين على 4 ينتج}$$

$$(D_1) : x - y + 3 = 0 .$$

- المستقيم (D_2) يشمل النقطة $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ و

$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيهه له .

تكون نقطة $M(x; y) \in (D_2)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا حيث :

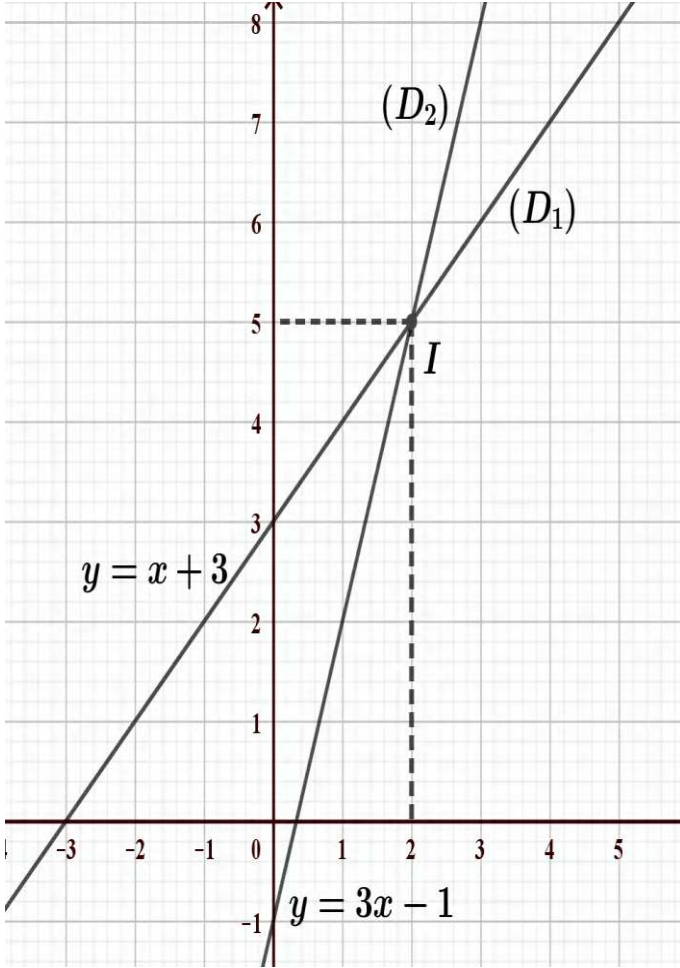
$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ y \end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الارتباط الخطي نجد :

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right) - y = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \quad -1 \text{ لنتحصل على :}$$

و هي نفسها الجملة (S) .

إذن الجملة (S) تملك حلا وحيدا هو الثنائية $(2;5)$



حل التمرين رقم 17 :

(1) تعليم النقط $A(1;2)$ ، $B(3;0)$ ،

$C(-3;-4)$ ، $D(0;1)$:

(2) تعيين إحداثيي النقطة M حتى يكون الرباعي

$BMCA$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $BMCA$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا

كان $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ بحيث :

$(D_2): 3x - y - 1 = 0$ و هي المعادلة الديكارتية .

(3) أ- رسم بعناية المستقيمين (D_1) و (D_2) :

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_1) :

x	0	-1
y	3	2

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_2) :

x	0	1
y	-1	2

(2) تعيين معامل توجيه كل من (D_1) و (D_2) :

من المعادلة المختصرة $(D_1): y = x + 3$ فإن

معامل توجيه المستقيم (D_1) هو $a_1 = 1$.

من المعادلة الديكارتية $(D_2): 3x - y - 1 = 0$

نكتب $(D_2): y = 3x - 1$ ؛ إذن معامل توجيه

المستقيم (D_2) هو $a_2 = 3$.

ب- من البيان تعيين نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) :

نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) هي :

$I(2;5)$.

الاستنتاج : إحداثيي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) هي

$$\text{حل جملة المعادلتين : } \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ أي :}$$

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \text{ ؛ و يكفي ضرب المعادلة الثانية في}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix}$$

بالمساواة بين المركبات نتحصل على :

$$\begin{cases} x_M - 3 = -4 \\ y_M = -6 \end{cases} \text{ و منه ينتج : } M(-1; -6)$$

(3) تعيين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل A و BC

شعاع توجيه له :

تكون نقطة $M(x; y) \in (\Delta)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا بحيث

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} ; \text{ إذن من شرط}$$

الإرتباط الخطي نجد :

$$-4(x+2) + 6(y-1) = 0 \text{ أي :}$$

$$-4x + 6y - 14 = 0 \text{ و بقسمة الطرفين على 2}$$

$$\text{ينتج : } (\Delta) : -2x + 3y - 7 = 0$$

(4) تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل

محور الفواصل ، ثم مع حامل محور الترتيب :

مع حامل محور الفواصل (xx') :

نضع $y = 0$ و نبحت عن قيمة x :

$$-2x + 3 \times 0 - 7 = 0 \text{ و منه } -2x - 7 = 0 \text{ أي}$$

$$x = -\frac{7}{2} ; \text{ إذن المستقيم } (\Delta) \text{ يقطع محور}$$

الفواصل في النقطة $E(-\frac{7}{2}; 0)$.

مع حامل محور الترتيب (yy') :

نضع $x = 0$ و نبحت عن قيمة y :

$$-2 \times 0 + 3y - 7 = 0 \text{ و منه } 3y - 7 = 0 \text{ أي}$$

$$y = \frac{7}{3} ; \text{ إذن المستقيم } (\Delta) \text{ يقطع محور الترتيب}$$

في النقطة $F(0; \frac{7}{3})$.

(5) تعيين إحداثيي النقطة N بحيث B هي نظيرة A

بالنسبة لـ N :

نعلم أن التناظر المركزي يحفظ المسافات و بالتالي فإن

المسافة AN تساوي المسافة BN أي أن النقطة N

هي منتصف القطعة $[AB]$ ؛ إذن يكون :

$$\begin{cases} x_N = \frac{1+3}{2} \\ y_N = \frac{2+0}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_N = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \text{ و منه}$$

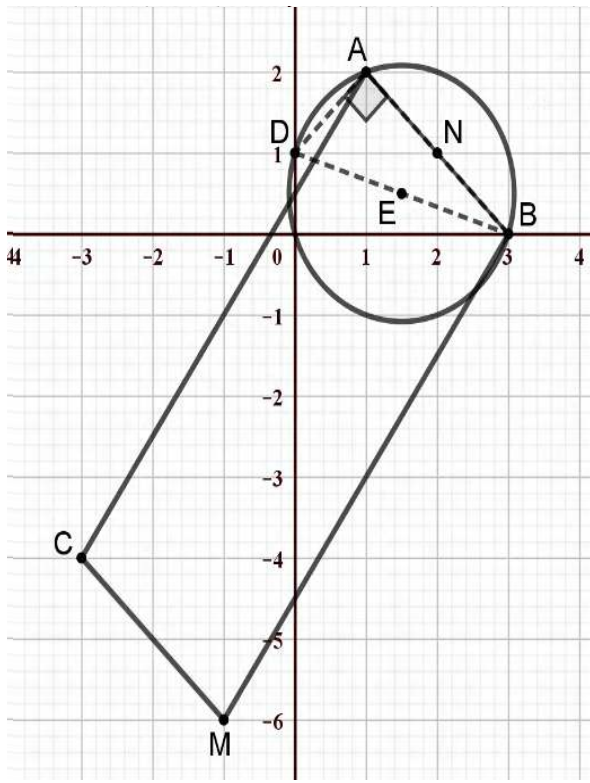
$$N(2; 1)$$

(6) حساب الأطوال AB ، AD ، DB ، ثم إستنتاج

نوع المثلث ABD :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{2} \\ DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{10} \end{cases}$$

نلاحظ جليا أن : $AB^2 + AD^2 = 10 = DB^2$ ؛



حل التمرين رقم 18 :

نعتبر النقط : $A(3; -1)$ ، $B(1; \alpha)$ ،

$C(-1; 2)$ حيث α عدد حقيقي .

(1) تعيين العدد الحقيقي α حتى تكون النقط A ، B ، C في إستقامة :

تكون النقط A ، B ، C في إستقامة إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$$-2 + 4\alpha = 0 \text{ أي } -2 \times 3 + 4(\alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ : منه نجد}$$

إذن حسب فيثاغورس فإن المثلث ABD قائم في A .

(7) تعيين E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD :

من مكتسبات السنة الرابعة متوسط في الهندسة نعلم أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هو نقطة منتصف وتره ؛ إذن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD هو

E منتصف القطعة $[DB]$ بحيث :

$$\text{و منه } \begin{cases} x_E = \frac{0+3}{2} \\ y_E = \frac{1+0}{2} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_E = \frac{x_D + x_B}{2} \\ y_E = \frac{y_D + y_B}{2} \end{cases}$$

$$E\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

(8) إستنتاج المسافة EN :

بما أن النقطة N هي منتصف القطعة $[AB]$ و E

هي منتصف القطعة $[DB]$ فإنه من تساوي النسب نجد

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{EN}{\sqrt{2}} \text{ أي } \frac{BN}{BA} = \frac{BE}{BD} = \frac{EN}{DA}$$

$$\text{ينتج : } EN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

التحقق باستخدام الإحداثيات :

بما أن $E\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ و $N(2; 1)$ فإن :

$$EN = \sqrt{(x_N - x_E)^2 + (y_N - y_E)^2}$$

$$EN = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الإنشاء الهندسي :

(2) تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$AOCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $AOCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط

إذا كان $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DC}$ بحيث :

$$\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} x_o - x_A \\ y_o - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -1 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_c - x_D \\ y_c - y_D \end{pmatrix} \text{ إذن}$$

بالمساواة بين المركبات نتحصل على :

$$D(2;1) \text{ و منه ينتج : } \begin{cases} -1 - x_D = -3 \\ 2 - y_D = 1 \end{cases}$$

- تعيين عندئذ طبيعة المثلث OCD :

لتعيين طبيعة (نوع) المثلث OCD نحسب أولاً

أطوال أضلاعه كما يلي :

$$\begin{cases} OC = \sqrt{(x_c - x_o)^2 + (y_c - y_o)^2} = \sqrt{5} \\ OD = \sqrt{(x_D - x_o)^2 + (y_D - y_o)^2} = \sqrt{5} \\ DC = \sqrt{(x_c - x_D)^2 + (y_c - y_D)^2} = \sqrt{10} \end{cases}$$

بما أن $OC = OD$ فإن المثلث OCD متساوي

الساقين ذو الرأس O ؛ و من جهة أخرى :

$$OC^2 + OD^2 = 10 = DC^2 \text{ إذن حسب}$$

فيثاغورس فإن المثلث OCD قائم في O .

إذن نستنتج أن المثلث OCD قائم و متساوي الساقين

ذو الرأس O .

(3) تعيين العدد الحقيقي α حتى يكون معامل توجيه

المستقيم (BC) هو 2 :

بما أن المستقيم (BC) يشمل النقطتين B و C فإن

معامل توجيهه λ يحسب كما يلي :

$$\lambda = \frac{y_c - y_B}{x_c - x_B} \text{ و منه ينتج } 2 = \frac{2 - \alpha}{-1 - 1} \text{ أي :}$$

$$2 - \alpha = -4 \text{ و منه نجد } \alpha = 6 .$$

(4) تعيين العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (BC)

$$\text{يوازي المستقيم الذي معادلته : } y = \frac{1}{2}x - 3$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \text{ هي المعادلة المبسطة لهذا المستقيم ، و}$$

معامل توجيهه هو $\mu = \frac{1}{2}$ ؛ إذن يكون المستقيم

(BC) يوازي المستقيم الذي معادلته :

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \text{ إذا و فقط إذا كان لهما نفس معامل}$$

$$\frac{2 - \alpha}{-1 - 1} = \frac{1}{2} \text{ التوجيه أي : } \lambda = \mu \text{ و منه ينتج}$$

$$\text{أي } 2(2 - \alpha) = -2 \text{ و منه } 2 - \alpha = -1 \text{ أي}$$

$$\alpha = 3 .$$

حل النمرين رقم 19 :

ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 8cm$ و

$$AC = 4cm .$$

(1) إنشاء النقط L و K حيث : $\overrightarrow{AL} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ و

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} :$$

لإنشاء النقطة L نقسم القطعة $[AB]$ إلى أربع أجزاء

متساوية الطول ثم نحسب خمسة أجزاء إنطلاقاً من النقطة A لأن الشعاعين $\overrightarrow{AL}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الإتجاه .

ننشئ النقطة K إنطلاقاً من النقطة A بحيث يكون طول الشعاع $\overrightarrow{AK}$ هو ضعفين ونصف أي $\frac{5}{2}$ من

طول الشعاع $\overrightarrow{AC}$ لأن الشعاعين $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما إتجاهين متعاكسين .

(2) حساب $\|\overrightarrow{AK}\|$ و $\|\overrightarrow{AL}\|$ ثم إستنتاج $\|\overrightarrow{KL}\|$:

$$\text{من العلاقة } \overrightarrow{AK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \text{ ينتج}$$

$$\|\overrightarrow{AK}\| = \frac{5}{2}\|\overrightarrow{AC}\| \text{ و منه } \|\overrightarrow{AK}\| = \frac{5}{2} \times 4 = 10 \text{ أي}$$

$$\|\overrightarrow{AK}\| = 10 \text{ cm}$$

$$\text{من العلاقة } \overrightarrow{AL} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \text{ ينتج } \|\overrightarrow{AL}\| = \frac{5}{4}\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\text{و منه } \|\overrightarrow{AL}\| = \frac{5}{4} \times 8 = 10 \text{ أي } \|\overrightarrow{AL}\| = 10 \text{ cm}$$

بما أن المثلث AKL قائم في A فإنه حسب نظرية فيثاغورس نجد :

$$\|\overrightarrow{AK}\|^2 + \|\overrightarrow{AL}\|^2 = \|\overrightarrow{KL}\|^2 \text{ أي}$$

$$\|\overrightarrow{KL}\|^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \text{ و منه ينتج :}$$

$$\|\overrightarrow{KL}\| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

(3) M نقطة من المستوي تحقق العلاقة :

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

أ- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم إنشاء النقطة M :

يكفي فقط إستخدام علاقة شال في المساواة الشعاعية $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ نتحصل على :

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ أي}$$

$$-2\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ أي}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ و هو المطلوب .}$$

إنشاء النقطة M : إنطلاقاً من نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أي من النقطة B نرسم الشعاع $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ فتكون نهاية هذا الشعاع هي النقطة M (تطبيق لعلاقة شال) .

$$\text{ب- إستنتاج أن : } \overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AL} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$$

$$\text{من السؤال السابق : } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{معطيات التمرين نعلم أن : } \overrightarrow{AL} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \text{ و}$$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \text{ ؛ معناه : } \overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AL} \text{ و}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AK} \text{ و بالتالي نجد :}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AL} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\overrightarrow{AK} \text{ أي}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AL} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AK} \text{ و هو المطلوب .}$$

الإنشاء الهندسي :

آن واحد أي تحقق $(a;b) = (0;0)$ و منه المعادلة :

$$mx + (m-1)y + 2 = 0 \text{ حيث } m \text{ عدد حقيقي}$$

هي معادلة مستقيم من أجل كل عدد حقيقي m .

(2) تبيان أن النقطة $A(-2;2)$ تنتمي إلى المستقيم

(Δ_m) من أجل كل عدد حقيقي m :

يكفي التعويض بالإحداثيات في المعادلة :

$$m(-2) + (m-1) \times 2 + 2 = 0 \text{ و منه فالنقطة}$$

$A(-2;2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) من أجل كل

عدد حقيقي m .

(3) تعيين قيمة العدد m حتى تكون النقطة $B(1;1)$

تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) :

تكون النقطة $B(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) إذا و

فقط إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة (Δ_m) أي :

$$m \times 1 + (m-1) \times 1 + 2 = 0 \text{ و منه}$$

$$2m + 1 = 0 \text{ أي } m = -\frac{1}{2}$$

(4) نفرض أن $m \neq 1$: تعيين معامل توجيه المستقيم

(Δ_m) .

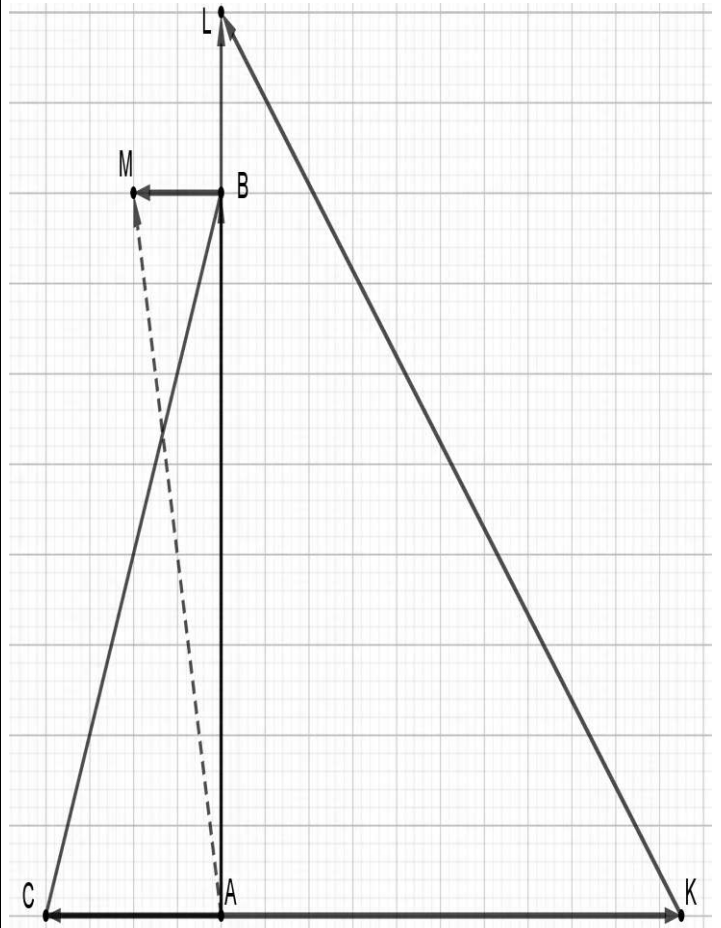
لتعيين معامل توجيه المستقيم (Δ_m) ننتقل من المعادلة

الديكارتية إلى المعادلة المختصرة (المبسطة) كما يلي :

$$mx + (m-1)y + 2 = 0 \text{ و منه نجد}$$

$$(m-1)y = -mx - 2 \text{ و بما أن } m \neq 1 \text{ فإن}$$

$$m-1 \neq 0 \text{ ؛ إذن بقسمة الطرفين على } m-1 \text{ نجد}$$



حل النمرين رقم 20 و الأخير :

(Δ_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي

تحقق :

$$mx + (m-1)y + 2 = 0 \text{ حيث } m \text{ عدد حقيقي .}$$

(1) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي m فإن (Δ_m)

مستقيم :

نعلم أن لكل مستقيم معادلة ديكارتية من الشكل :

$$ax + by + c = 0 \text{ حيث } (a;b) \neq (0;0)$$

$$\begin{cases} a = m = 0 \dots (*) \\ b = m-1 = 0 \dots (**) \end{cases} \text{ إذن لو نفرض أن :}$$

نجد من $(*)$ أن : $m = 0$ و من $(**)$ أن $m = 1$

إذن لا توجد أية قيمة للعدد m تعدم العددين a و b في

حامل محور الفواصل .

(Δ_1) يوافق القيمة $m = 1$: إذن المعادلة الديكارتية

للمستقيم (Δ_1) تعين من الشكل :

$$(\Delta_1): 1 \times x + (1-1)y + 2 = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta_1): x = -2 \text{ و منه المستقيم } (\Delta_1) \text{ عمودي}$$

يوازي حامل محور الترتيب .

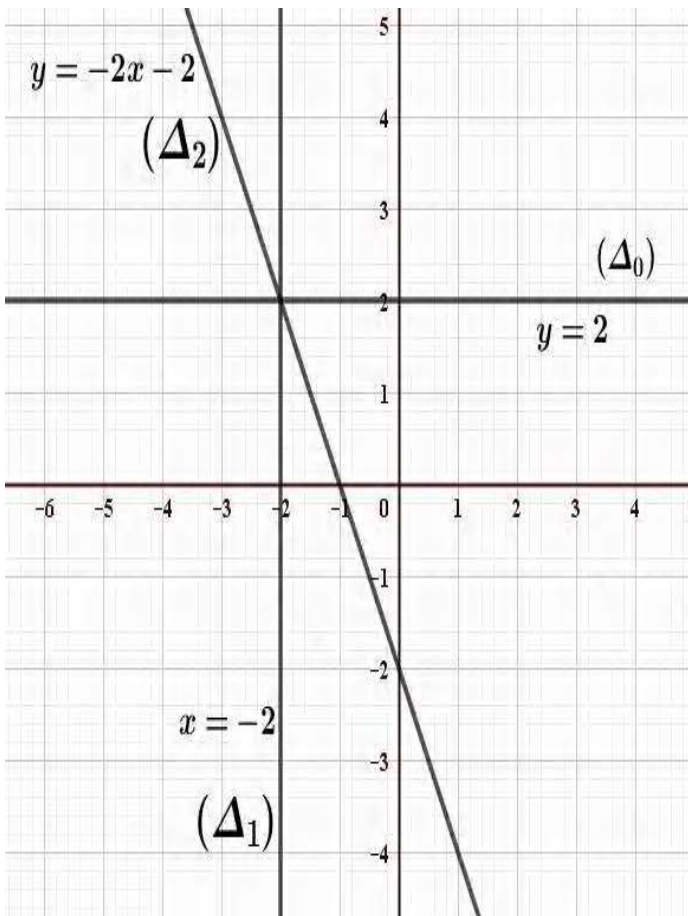
(Δ_2) يوافق القيمة $m = 2$: إذن المعادلة الديكارتية

للمستقيم (Δ_2) تعين من الشكل :

$$(\Delta_2): 2x + (2-1)y + 2 = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta_2): y = -2x - 2 \text{ و منه فالمستقيم } (\Delta_2) \text{ مائل}$$

الإنشاء الهندسي :



$$y = -\frac{m}{m-1}x - \frac{2}{m-1} \text{ و منه معامل توجيه}$$

$$\text{المستقيم } (\Delta_m) \text{ هو } a = -\frac{m}{m-1} .$$

(5) تعيين قيمة العدد m حتى يكون المستقيم (Δ_m)

يوازي المستقيم (d) ذو المعادلة :

$$10x + 8y + 5 = 0$$

يكون المستقيم (Δ_m) يوازي المستقيم (d) ذو

المعادلة : $10x + 8y + 5 = 0$ إذا و فقط إذا كان

لهما نفس معامل التوجيه بحيث معامل توجيه المستقيم ذو

المعادلة $10x + 8y + 5 = 0$ نعيه كما يلي :

$$10x + 8y + 5 = 0 \text{ أي } 8y = -10x - 5 \text{ و منه}$$

$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{5}{8} \text{ (المعادلة المبسطة) و بالتالي}$$

$$\text{معامل توجيهه هو } a' = -\frac{5}{4} \text{ ؛ إذن بوضع } a = a'$$

نتحصل على المعادلة ذات المجهول m التالية :

$$-\frac{m}{m-1} = -\frac{5}{4} \text{ أي } 4m = 5(m-1) \text{ أي}$$

$$4m = 5m - 5 \text{ و منه نجد } m = 5 .$$

(6) رسم المستقيمات : (Δ_0) ، (Δ_1) ، (Δ_2) في

نفس المعلم .

(Δ_0) يوافق القيمة $m = 0$: إذن المعادلة الديكارتية

للمستقيم (Δ_0) تعين من الشكل :

$$(\Delta_0): 0 \times x + (0-1)y + 2 = 0 \text{ أي :}$$

$$(\Delta_0): y = 2 \text{ و منه المستقيم } (\Delta_0) \text{ أفقي يوازي}$$