★ سلسلة تمارين ★ محور العبارات الجبرية ★

المستوى : سنة أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا
المادّة : رياضيّات

التّمرين 1 :

◄ $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان جبريتان حيث :

$$\begin{cases} A(x) = -x^2 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} \\ B(x) = x^2 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{6} \end{cases}$$

❶ أنشر ثم بسط العبارة $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$.
❷ حلل العبارتين $A(x)$ و $B(x)$.
❸ أدرس إشارة $C(x)$ حيث : $C(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.
❹ استنتج حلول المتراجحة : $C(x) \leq 0$.

التّمرين 2 :

◄ ليكن $m \in \mathbb{R}$ ولنعتبر العبارة الجبرية $P_m(x)$ حيث :
$P_m(x) = (1 - m^2)x^2 + (m + 4)x - 3$

❶ أحسب $P_0(-2)$ ؛ $P_{-5}(-5)$.
❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P_2(x) = 0$.
❸ استنتج حلول المتراجحة $P_2(x) > 0$.

◄ نعرف في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P_m(x) = 0 \ldots (*)$.

⊡ عين قيم m في كل حالة من الحالات الآتية :
❶ $(*)$ معادلة من الدرجة الثانية .
❷ $(*)$ تقبل حلًّا وحيدًا .
❸ العدد 1 حل لـ $(*)$.
❹ $(*)$ تقبل حلّين متمايزين .
❺ $(*)$ ليس لها حل .
❻ $P_m(x) > 0$.

التّمرين 3 :

◄ ليكن $m \in \mathbb{R}^*$ ولنعتبر المعادلة :
$(m + |m|)x^2 + (m - |m|)x - 2m = 0 \ldots (**)$

⊡ عين قيم m في الحالات الآتية :
❶ $(**)$ معادلة من الدرجة الثانية .
❷ $(**)$ تقبل حلًّا وحيدًا .
❸ $(**)$ تقبل حلّين متمايزين .

التّمرين 4 :

❶ أنشر ثم بسط العبارة : $\left(1 - \sqrt{3}\right)^2$
❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $4x^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$.
❸ استنتج في المجال $\left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ حلول المعادلة :
$-4\sin^2 x - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x + 4 + \sqrt{3} = 0$

التّمرين 5 :

◄ لتكن a ، b و c أعدادًا حقيقيّةً مع $a \neq 0$ ، ولنعتبر المعادلة : $ax^2 - bx + c$ التي حلّاها x_1 و x_2 ، ولنضع :

$$\begin{cases} A = a\left((x_1)^{2021} + (x_2)^{2021}\right) \\ B = b\left((x_1)^{2020} + (x_2)^{2020}\right) - c\left((x_1)^{2019} + (x_2)^{2019}\right) \end{cases}$$

⊡ أثبت أنّ : $A = B$.

التّمرين 6 :

◄ ليكن a و b عددين حقيقين موجبين تمامًا .

⊡ جد بدلالة a و b حلّي المعادلة :

$$\frac{1}{a + b + x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

التّمرين 7 :

◄ لتكن a ، b و c أعدادًا حقيقيّةً مع $a \neq 0$ ، والمعادلة $ax^2 + bx + c \ldots (***)$ التي حلّاها x_1 و x_2 .

❶ أثبت أنّه يمكن كتابة المعادلة $(***)$ بالشّكل :
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0$
❷ أثبت أن $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ و $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.
❸ جد بدلالة a ، b و c معادلة من الدرجة الثانية حلّاها $(x_1)^2$ و $(x_2)^2$.

www.dzexams.com

★ الحل النموذجي لسلسلة تمارين ★ محور العبارات الجبرية ★

المستوى : سنة أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا — المادّة : رياضيّات

كتابة وتأليف : سرخاد عبدالباسط

حل التّمرين 1 :

❶ النشر والتبسيط :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)=2+3+2\sqrt{2\times 3}=5+2\sqrt{6}$$

❷ لتحليل العبارتين $A(x)$ و $B(x)$ نحل أوّلًا المعادلتين $A(x)=0$ و $B(x)=0$:

$$\begin{cases}\Delta_{A(x)}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-4(-1)\left(\sqrt{6}\right)=5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\\ \Delta_{B(x)}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-4(1)\left(-\sqrt{6}\right)=5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\end{cases}$$

⊡ مجموعة حلول المعادلة $A(x)=0$ هي :

$$S_{A(x)}=\left\{\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{2(-1)};\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{2(-1)}\right\}=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{2}\right\}$$

⊡ مجموعة حلول المعادلة $B(x)=0$ هي :

$$S_{B(x)}=\left\{\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{2(1)};\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{2(1)}\right\}=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$$

⊡ إذًا نستنتج :

$$\begin{cases}A(x)=-\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\\ B(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

❸ لدينا $C(x)=0$ تكافئ $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$ ومنه :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

❹ من جدول الإشارة نستنتج أنّ مجموعة حلول المتراجحة $C(x)\leq 0$ هي :

$$S=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$$

www.dzexams.com

حل التّمرين 2 :

❶ حساب $P_0(-2)$ و $P_{-5}(-5)$:

$$\begin{cases} P_0(-2) = (1-0^2)(-2)^2 + (0+4)(-2) - 3 = -7 \\ P_{-5}(-5) = \left(1-(-5)^2\right)(-5)^2 + (-5+4)(-5) - 3 = -598 \end{cases}$$

❷ $P_2(x) = 0$ تكافئ $-3x^2 + 6x - 3 = 0$ تكافئ $-3(x-1)^2 = 0$ تكافئ $x - 1 = 0$ تكافئ $x = 1$.

❸ إذًا نستنتج ممّا سبق أنّ مجموعة حلول المتراجحة $P_2(x) > 0$ هي : $S = \phi$.

◄ ليكن Δ_m مميز المعادلة $(*)$ فإنّ :

$$\Delta_m = (m+4)^2 - 4\left(1-m^2\right)(-3) = -11m^2 + 8m + 28 = 0 \ \ldots (1)$$

⊡ ليكن $\Delta_{(1)}$ مميز المعادلة (1) فإنّ :

$$\Delta_{(1)} = (8)^2 - 4(-11)(28) = 1296 = (36)^2$$

⊡ ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S = \left\{\frac{-8+\sqrt{(36)^2}}{2(-11)}; \frac{-8-\sqrt{(36)^2}}{2(-11)}\right\} = \left\{-\frac{14}{11}; 2\right\}$$

m	$-\infty$		$\frac{-14}{11}$		-1		1		2		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

⊡ لنُعيّن قيم m في كل حالة من الحالات الآتية :

❶ $(*)$ معادلة من الدرجة الثانية معناه $1 - m^2 \neq 0$ أي $(1-m)(1+m) \neq 0$ أي $m \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

❷ $(*)$ تقبل حلًّا وحيدًا معناه $(*)$ معادلة من الدرجة الأولى أو $\Delta_m = 0$ ومنه $m \in \left\{-\frac{14}{11}; -1; 1; 2\right\}$.

❸ العدد 1 حل لـ $(*)$ معناه $p_m(1) = 0$ أي $-m^2 + m + 2 = 0 \ \ldots (2)$ ومنه $\Delta_{(2)} = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9$.

⊡ إذًا مجموعة قيم m هي حلول المعادلة (2) أي :

$$m \in \left\{\frac{-1+\sqrt{9}}{2(-1)}; \frac{-1-\sqrt{9}}{2(-1)}\right\} = \{-1; 2\}$$

❹ $(*)$ تقبل حلّين متمايزين تكافئ $\Delta_m > 0$ و $\Delta_m \neq \pm 1$ أي $m \in \left]-\frac{14}{11}; -1\right[\cup]-1; 1[\cup]1; 2[$.

❺ $(*)$ ليس لها حل تكافئ $\Delta_m < 0$ أي $m \in \left]-\infty; -\frac{14}{11}\right[\cup]2; +\infty[$

❻ $P_m(x) > 0$ تكافئ $\Delta_m < 0$ و $1 - m^2 > 0$:

⊡ لدينا $1 - m^2 > 0$ تكافئ $m^2 < 1$ تكافئ $\sqrt{m^2} < 1$ تكافئ $|m| < 1$ تكافئ $-1 < m < 1$.

⊡ إذًا نستنتج أنّ $P_m(x) > 0$ تكافئ :

$$m \in \left(\left]-\infty; -\frac{14}{11}\right[\cup]2; +\infty[\right) \cap]-1; 1[= \phi$$

www.dzexams.com

حل التّمرين 3 :

◄ لدينا : $m+|m|=\begin{cases}2m & ; \quad m>0\\ 0 & ; \quad m<0\end{cases}$

⊡ إذا كان $m>0$ فإنّ $(**)$ تكافئ $2mx^2-2m=0$ تكافئ $2m\left(x^2-1\right)=0$ تكافئ $x^2-1=0$ تكافئ $x=\pm 1$.

⊡ إذا كان $m<0$ فإنّ $(**)$ تكافئ $2mx-2m=0$ تكافئ $2m\left(x-1\right)=0$ تكافئ $x-1=0$ تكافئ $x=1$.

⊡ لنعين قيم m في كل حالة :

❶ $(**)$ معادلة من الدرجة الثانية معناه $m+|m|\neq 0$ أي $m>0$ أي $m\in\left]0;+\infty\right[$.

❷ $(**)$ تقبل حلًّا وحيدًا معناه $m<0$ أي $m\in\left]-\infty;0\right[$.

❸ $(**)$ تقبل حلّين متمايزين معناه $m>0$ أي $m\in\left]0;+\infty\right[$.

حل لتّمرين 4 :

❶ النّشر والتّبسيط :

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^2=(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\,(1)\left(\sqrt{3}\right)=1+3-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

❷ لدينا :

$$\Delta=\left(-2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\,(4)\left(\sqrt{3}\right)=4\left(1+\sqrt{3}\right)^2-16\sqrt{3}=4\left(4-2\sqrt{3}\right)=4\left(1-\sqrt{3}\right)^2$$

⊡ إذًا مجموعة حلول المعادلة هي :

$$S=\left\{\frac{-\left(-2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)+\sqrt{4\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2\,(4)};\frac{-\left(-2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)-\sqrt{4\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2\,(4)}\right\}=\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

❸ لدينا :

$$\begin{aligned}-4\sin^2x-2\left(1+\sqrt{3}\right)x+4+\sqrt{3}&=-4\left(1-\cos^2x\right)-2\left(1+\sqrt{3}\right)x+4+\sqrt{3}\\&=-4+4\cos^2x-2\left(1+\sqrt{3}\right)x+4+\sqrt{3}\\&=4\cos^2x-2\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}\end{aligned}$$

⊡ إذًا نستنتج أنّ $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\cos x=\frac{1}{2}$ أي $x\in\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right\}$.

حل التّمرين 5 :

⊡ x_1 و x_2 حلّان للمعادلة $ax^2-bx+c=0$ معناه :

$$\begin{cases}a(x_1)^2-b\,(x_1)+c=0\ \ldots\ (1)\\ a(x_2)^2-b\,(x_2)+c=0\ \ldots\ (2)\end{cases}$$

⊡ بضرب المعادلة (1) في $(x_1)^{2019}$ والمعادلة (2) في $(x_2)^{2019}$ نجد :

$$\begin{cases}a(x_1)^{2021}-b(x_1)^{2020}+c(x_1)^{2019}=0\ \ldots\ (1)\\ a(x_2)^{2021}-b(x_2)^{2020}+c(x_2)^{2019}=0\ \ldots\ (2)\end{cases}$$

www.dzexams.com

⊡ بجمع المعادلتين المعادلة (1) و (2) نتحصّل على :

$$\underbrace{a\left((x_1)^{2021}+(x_2)^{2021}\right)}_{A}-\underbrace{\left[b\left((x_1)^{2020}+(x_2)^{2020}\right)-c\left((x_1)^{2019}+(x_2)^{2019}\right)\right]}_{B}=0$$

⊡ إذًا نستنتج أنّ $A=B$.

حل التّمرين 6 :

لدينا : $\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ تكافئ $\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab}$ تكافئ $\frac{1}{a+b+x}=\frac{a+b}{ab}$ تكافئ $-\frac{a+b}{(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$.

⊡ إذًا المقامان مستاويان أي : $-(a+b+x)=ab$ أي $x^2+ax+bx+ab=0$

⊡ ومنه : $x(x+a)+b(x+a)=0$

⊡ ومنه : $(x+a)(x+b)=0$

⊡ وبالتّالي $x+a=0$ أو $x+b=0$ أي $x=-a$ أو $x=-b$ ، وعليه مجموعة الحلول هي : $S=\{-a;-b\}$

حل التّمرين 7 :

❶ الإثبات :

$$ax^2+bx+x=a(x-x_1)(x+x_2)=ax^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

❷ إثبات أنّ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

❸ المعادلة المطلوبة تكون بالشّكل : $x^2-\left[(x_1)^2+(x_2)^2\right]x+(x_1)^2\times(x_2)^2=0$.

⊡ لدينا : $\begin{cases} (x_1)^2+(x_2)^2+2\left(\dfrac{c}{a}\right)=\dfrac{b^2}{a^2} \\ (x_1)^2\times(x_2)^2=\dfrac{c^2}{a^2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (x_1+x_2)^2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 \\ (x_1x_2)^2=\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 \end{cases}$

⊡ إذًا نستنتج أنّ $\begin{cases} (x_1)^2+(x_2)^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2} \\ (x_1)^2\times(x_2)^2=\dfrac{c^2}{a^2} \end{cases}$ ، ومنه :

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$$

www.dzexams.com