

مجلة العبقري في الرياضيات (الإحتمالات)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية: تقني رياضي.

ملخص: حول الإحتمالات // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج; تر.

1 لغة الإحتمالات LE langage des Probabilités

مصطلحات الإحتمالات

المصطلح	التعريف
① التجربة العشوائية: L'expérience aléatoire	وهي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها، رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
② مجموعة الإمكانات: L'univers	وهي مجموعة النتائج الممكنة، ويُرمز إليها، غالباً بالرمز Ω وتُسمى: أيضاً بمجموعة المخارج؛ أو المجموعة الشاملة.
③ الحادثة: L'événement	وهي كل مجموعة جزئية من Ω .
④ الحادثة الأولية: L'événement élémentaire	وهي الحادثة التي تشمل على عنصر واحد.
⑤ الحادثة الأكيدة: L'événement certain	وهي مجموعة الإمكانات Ω .
⑥ الحادثة المستحيلة: L'événement impossible	وهي الحادثة التي لا يمكن لها أن تتحقق، ونرمز لها بالرمز $\emptyset$.
⑦ الحادثة العكسية: L'événement contraire	الحادثة العكسية لـ A ؛ والتي نرمز إليها بـ $\bar{A}$ وهي التي تشمل كل عناصر Ω ، ما عدا عناصر A .
⑧ الحادثة (A و B): L'événement (A et B)	وهي الحادثة التي تشتمل على العناصر المشتركة بين A و B ؛ ونرمز إليها بالرمز: $A \cap B$.
⑨ الحادثة (A أو B): L'événement (A ou B)	وهي الحادثة التي تشتمل على العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B (أي المشتركة وغير المشتركة)، ونرمز إليها بالرمز: $A \cup B$.
⑩ الحادثنان غير المتلائمان: Evénement incompatibles	وهما الحادثنان اللتان لا يمكن أن يتحققا في آن واحد، أي أن: $A \cap B = \emptyset$.

2 قانون الإحتمال La loi de probabilité

تعريف

لتكن مجموعة الإمكانات $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ ؛ نقول إننا زودنا Ω بقانون إحتمال P ، إذا أرفقنا بكل إمكانية من Ω عدداً حقيقياً موجبا P_i ، مع $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ بحيث يكون:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

ملاحظة: ① بمأن: $\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ ، فإن: $0 \leq P_i \leq 1$ ، $P_i \geq 0$

② يُمكن ملأ الجدول التالي كما يلي:

الإمكانات x_i	x_1	x_2	...	x_n
الإحتمال $P_i = P(x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

ونقول عندئذ: إننا عَرَفْنَا قانون الإحتمال.

3 تساوي الإحتمال L'équiprobabilité

تعريف

نقول عن تجربة عشوائية، أنَّها متساوية الإحتمال إذا كان لكل الحوادث الأولية نفس الإحتمال.
▪ نقول في هذه الحالة أنَّ قانون الإحتمال متساوي التوزيع.

ملاحظة هامة:

يُشار إلى تساوي الإحتمال من خلال عبارات يتضمنها نصّ وصف التجربة العشوائية، مثلاً:

- نرمي زهرة نرد غير مزيفة؛
- نسحب عشوائياً من كيس؛
- نرمي قطعة نقدية متوازنة؛
- أو كريات لا تُميز بينها عند اللّمس ... الخ.

نتيجة: في حالة تساوي الإحتمال، لدينا: (إحتمال حادثة)

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

4 خواص الإحتمالات Propriétés des Probabilités

الخواص

Ω مجموعة شاملة مزودة بقانون إحتمال P ، لدينا الخواص التالية:

ملحظة	الخاصية
الإحتمال عدد موجب ومحصور بين 0 و 1.	① من أجل كل حادثة A ، $0 \leq P(A) \leq 1$
	② $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$
	③ إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B = \emptyset$ $P(A \cap B) = 0$	④ إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين (منفصلتين)، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
	⑤ إذا كانت الحادثة A جزءاً من B (أي: $A \subset B$)، فإن: $P(A) \leq P(B)$
$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$	⑥ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ، حيث $\bar{A}$ حادثة عكسية للحادثة A .
نتيجة $\bar{B}$ و $\bar{A}$ مستقلتين B و A مستقلتين $\bar{B}$ و $\bar{A}$ مستقلتين	⑦ A و B حادثتان مستقلتان (Evénements indépendants)، معناه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (تحقق إحدى الحادثتان، لا يُغيّر إحتمال الحادثة الأخرى)

5 العدد Le dénombrement

1 القائمة La liste
2 الترتيب L'arrangement
3 التوفيق La combinaison

تعريف

E مجموعة منتهية ذات n عنصراً
 $(n \geq 0)$
 و p عدد طبيعي $(p \geq 0)$ ؛
 ■ نسمي توفيق ذات p عنصراً
 من E كل مجموعة جزئية من E
 ذات p عنصراً من عناصر E .

ملاحظة

تتميز عناصر التوفيق بعدم
 الترتيب وعدم التكرار.

عدد التوفيقات

عدد التوفيقات ذات p عنصراً من
 مجموعة ذات n عنصراً، والذي
 نرمز إليه بـ A_n^p يُحسب كما يلي

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$
 حيث: $p \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$.

نتائج

- ① $(p = n \text{ أو } p = 0)$ ، $C_n^0 = C_n^n = 1$
- ② $(p = 1)$ ، $C_n^1 = n$
- ③ إذا كان $p > n$ ، فإن: $C_n^0 = C_n^n = 1$
- ④ $(0 \leq p \leq n)$ ، $C_n^p = C_n^{n-p}$
- ⑤ $(1 \leq p \leq n)$ ، $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

تعريف

هي قائمة ليس فيها التكرار
 $(1 \leq p \leq n)$.

ملاحظة

تتميز عناصر الترتيب بأهمية
 الترتيب وعدم التكرار.

عدد الترتيبات

عدد ترتيبات ذات p عنصراً من مجموعة ذات n عنصراً،
 والذي نرمز إليه بـ A_n^p يُحسب كما يلي

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$
 ملاحظة: ① الجداء يحوي p عاملاً، حيث: $1 \leq p \leq n$.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad ②$$

نتيجة: $A_1^1 = A_1^0 = 1$

تعريف

E مجموعة منتهية ذات n عنصراً
 $(n \geq 1)$
 و p عدد طبيعي $(p \geq 1)$ ؛
 ■ نسمي قائمة ذات p عنصراً
 من E كل متتالية مرتبة من p
 عنصراً من عناصر E .

ملاحظة

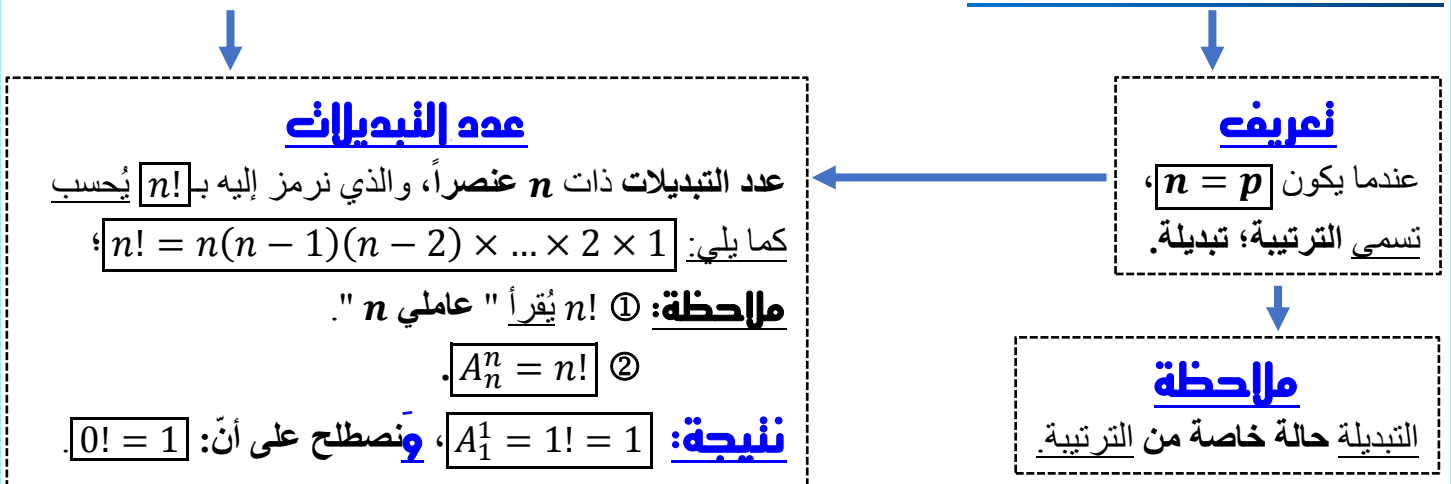
تتميز عناصر القائمة بأهمية
 الترتيب وإمكانية التكرار.

عدد القوائم

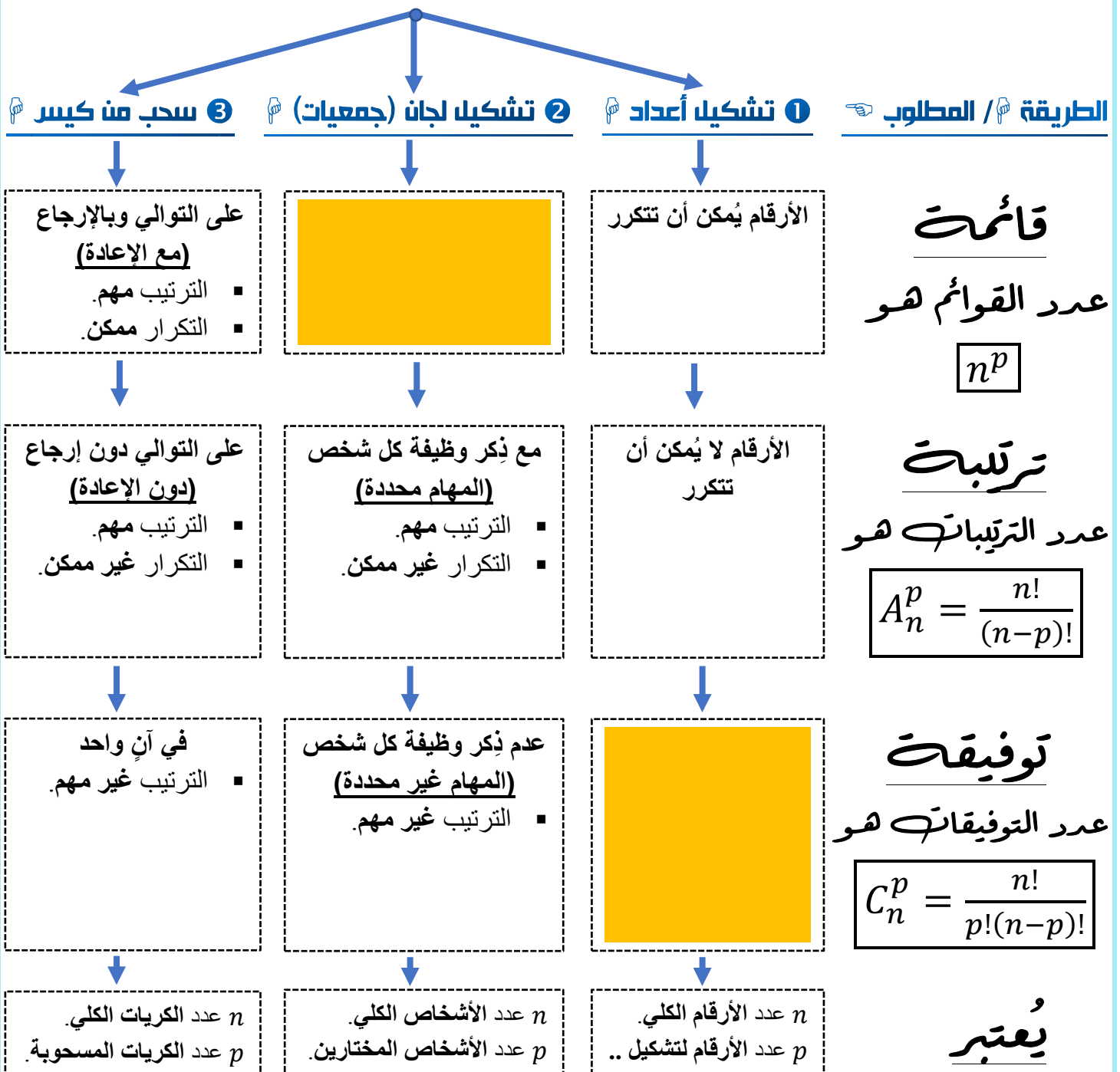
عدد القوائم ذات p عنصراً من
 مجموعة ذات n عنصراً يساوي

$$[n^p]$$
 حيث: $p \in \mathbb{N}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

4 التبديلة La permutaion



استخدام العد في:



لحساب عدد الحالات الملائمة لحادثة: ('و' تعني الضرب) ('أو' تعني الجمع).

المثلث العددي:

Le triangle numérique

P	0	1	2	3	4	5	6
n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

دسبور ثنائي الحد: La formule du binôme

a و b عدنان حقيقيان غير متعاكسين، و n عدد طبيعي.

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

6 المتغير العشوائي La variable aléatoire

تعريف

نسمي متغيراً عشوائياً X ، كل دالة عددية معرفة على المجموعة الشاملة Ω .

قانون الإحتمال لمتغير عشوائي

X متغير عشوائي معرف على Ω ، لتكن I مجموعة قيم X (أي: $I = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$)
 قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، هو دالة معرفة على I ، تُرفق بكل قيمة x_i من I ، العدد $P_i = P(X = x_i)$ والذي يُقرأ: "الإحتمال حتى يأخذ X القيمة x_i ".

ملاحظة: ① بمأن: $\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1 \end{cases}$ ، فإن: $0 \leq P_i \leq 1$

② نلخص قانون إحتمال X في جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	...	x_n
الإحتمال $P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

③ الانحراف المعياري

L'écart type

النبين لـ X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

② التباين

LA variance

النبين للمتغير X

$$V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot P_i$$

أو

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot P_i - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

① الأمل الرياضي

L'espérance mathématique

الامل الرياضي

X

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$$

7 الإحتمالات الشرطية Probabilités conditionnelles

تعريف (التقني رياضي غير معيّن بهذا العنصر)

نتائج من التعريف:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

ليكن P قانون إحتمال على Ω ، ولتكن A و B حادثتين، حيث $P(A) \neq 0$

احتمال الحادثة B ، علماً أنّ A مُحَقَّقة هو الإحتمال الذي نرمز إليه

$$P_A(B) \text{ أو } P(B/A) \text{ والمُعَرَّف كما يلي: } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

8 دستور الإحتمالات الكلية Formule des Probabilités Totales

لتكن $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ حوادث إحتمالاتها غير معدومة، وتُشكّل تجزئة للمجموعة الشاملة Ω ،

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

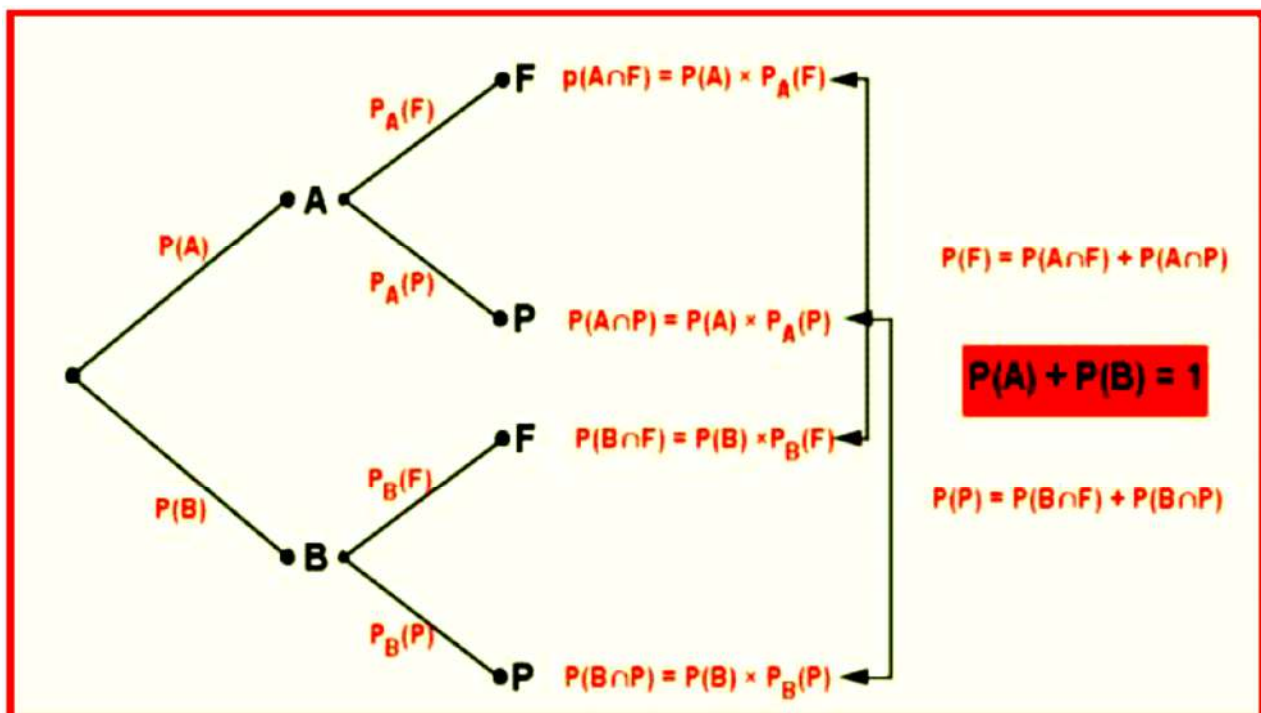
ملاحظة: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ تُشكّل تجزئة للمجموعة الشاملة Ω ؛ **معناه:**

ليس من بينها الحادثة المستحيلة، وأنها غير متلائمة متنى متنى، وأنّ إتحادها هو المجموعة الشاملة Ω .

8 شجرة الإحتمالات L'arbre de probabilité

تمهيد

في بعض الحالات، مثلاً؛ عند تكرار تجربة عشوائية، أو عند استخدام الاحتمالات الشرطية ... إلخ، يُنصح باستخدام شجرة الاحتمالات (طبعاً، إذا لم يكن عدد المخارج كبير جداً).



جمع وإعداد الأستاذ بوعزة مصطفى تيارت؛ الشكر موصول للأستاذ جبال محمد واد السوف.