

(I) نعتبر P كثير الحدود في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعروف كما يلي : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32$

- 1 - أثبت أنه إذا كان z حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\bar{z}$ حل لها أيضا .
- 2 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلين تخيليين صرفين مترافقين .

(II)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{u}; \vec{v})$ ، النقطة A, B, C, D التي لاحقاتها z_A, z_B, z_C, z_D على الترتيب حيث :

$$z_D = 2 - 2i \text{ و } z_C = -2i, z_B = 2i, z_A = 2 + 2i$$

- 1 - أكتب z_A, z_B, z_C, z_D على الشكل المثلثي ثم الأسّي .

$$2 - \text{بين أن العدد } \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} \text{ حقيقي موجب .}$$

- 3 - جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب :

• $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيلياً صرفاً جزؤه التخيلي سالباً ، • $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقياً سالبا ، • $(z_A)^n$ عددا حقيقياً موجبا ، • $(z_B)^n$ عددا تخيلياً صرفاً .

- 4 - أ - عين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ثم بين أن النقطة A, B, F في استقامة .

- ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث AFC .

- ج - عين لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يحول النقطة F إلى النقطة A .

- د - عين لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{FB}$.

- 5 - أ - جد لاحقة النقطة J حتى يكون الرباعي $BJCI$ معين .

- ب - بين أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان . هل (IC) و (DF) متعامدان ؟ برر إجابتك .

- ج - بين أن المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان . هل (IB) و (DF) متوازيان ؟ برر إجابتك .

- د - عين عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_B}{z_J}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OBJ .

- 6 - أ - تحقق من أن النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD) ثم عين لاحقة النقطة G مرشح الجملة $\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.

- ب - عين (E_1) و (E_2) مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$(E_1) : \left\| \vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \vec{MA} + \vec{MD} \right\|$$

$$(E_2) : (\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MD}) = 0$$

- 7 - S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة O إلى النقطة D ، عين نسبة وزاوية S .

- 8 - لتكن (Γ) الدائرة التي تشمل النقط A, D و F .

- أ - عين مركز الدائرة (Γ) ونصف قطرها ، ثم احسب مساحتها .

- ب - جد (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S ، ثم استنتج مساحة الدائرة (Γ') .

- 9 - أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_I}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم المثلثي ، استنتج طبيعة الرباعي $OIAB$.

- 10 - اكتب الصيغة المركبة للتحويل f المعروف كمايلي : $f = t \circ h \circ s$.

- 11 - أ - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ مع $\theta \in [0, 2\pi[$.

- ب - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ ($z \neq 2i$) .

- ج - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي .

- د - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي من أجلها يكون $L = \frac{z - 2i}{z - 2 + 2i}$ عدداً حقيقياً سالباً .

- 12 - نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z \neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{-6i(z - 2 + 2i)}{z - 2i}$.

- أ - تحقق من أن : $OM' = 6 \times \frac{DM}{BM}$.

- ب - استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) فإن M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة .

- ج - بين أن $\left(\vec{u}; \vec{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\vec{BM}; \vec{DM}\right) + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ و $z' \neq z_O$.

د - استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ماعدا النقطتين B و D فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة .

الصحيح المفصل للتمرين الشامل في الأعداد المركبة

الجزء الأول

1 إثبات أنه إذا كان z حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\bar{z}$ حل لها أيضا

لدينا :

$$P(\bar{z}) = \bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 12\bar{z}^2 - 16\bar{z} + 32 = \overline{z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$$

بما أن $P(z) = 0$ فإن $\overline{P(z)} = 0$ أي $\overline{P(z)} = 0$ وعليه $P(\bar{z}) = 0$ وهو المطلوب .

2 حل في C المعادلة $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلين تخيليين صنفين مترافقين

بما أن المعادلة تقبل حلين تخيليين صنفين فإنه يوجد عددين مركبين من الشكل iy (حيث $y \in \mathbb{R}$) يحققان :

$$(iy)^4 - 4(iy)^3 + 12(iy)^2 - 16(iy) + 32 = 0 \quad \text{أي} \quad y^4 + 4iy^3 - 12y^2 - 16iy + 32 = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} y^4 - 12y^2 + 32 = 0 & \dots\dots\dots (1) \\ 4y^3 - 16y = 0 & \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{ومنه قيم } y \text{ هي حل الجملة : } (y^4 - 12y^2 + 32) + i(4y^3 - 16y) = 0$$

نحل المعادلة السهلة الحل أو التي يمكننا حلها ونأخذ القيم التي المعادلة الأخرى سنختار حل المعادلة (2) لأنها أسهل في الحل ومنه : $4y^3 - 16y = 0$ يكافئ $y(4y^2 - 16) = 0$ ومنه هذه الأخيرة تقبل ثلاث حلول هي : 0 ، 2 و -2 . الحلان 2 و -2 يحققان المعادلة (1) أما 0 فلا يحققها ومنه حلي المعادلة التخيليان الصنفان هما $\{-2i, 2i\}$.

إيجاد بقية الحلول :

المعادلة (E) تكافئ $(z - 2i)(z + 2i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = 0$ تكافئ $(z^2 + 4)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = 0$ باستعمال القسمة الإقليدية أو النشر والمطابقة نستنتج عبارة كثير الحدود $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ حيث نجد : $\alpha = 1$ ، $\beta = -4$ ، $\gamma = 8$. وعليه بقية حلول المعادلة (E) هي حلا المعادلة $z^2 - 4z + 8 = 0$ وعليه لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(8) = -16 = (4i)^2$ ومنه :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{(4i)^2}}{2(1)} = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i \\ z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{(4i)^2}}{2(1)} = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي : $S = \{-2i, 2i, 2 - 2i, 2 + 2i\}$.

الجزء الثاني

1 كتابة z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل المثلثي ثم الأسّي

لدينا :

$$\begin{aligned} |z_A| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ |z_B| &= \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \\ |z_C| &= \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \\ |z_D| &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

لتكن θ_D ، θ_C ، θ_B ، θ_A عمد الأعداد المركبة z_D ، z_C ، z_B ، z_A على الترتيب .

إيجاد θ_D ، θ_C ، θ_B ، θ_A :

$$\begin{cases} \cos(\theta_A) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_A) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \theta_A = \frac{\pi}{4} \quad \cdot \quad \begin{cases} \cos(\theta_B) = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin(\theta_B) = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} ; \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta_C) = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin(\theta_C) = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} ; \theta_C = -\frac{\pi}{2} \quad \cdot \quad \begin{cases} \cos(\theta_D) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_D) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \theta_D = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه الشكل المثلثي هو :

$$\begin{aligned} z_A &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) ; & z_B &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ z_C &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) ; & z_D &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

والشكل الأسّي هو :

$$z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} ; z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}} ; z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} ; z_D = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2  تبين أن العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$ حقيقي موجب

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} &= \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1997} + \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2020} + \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{2020} + \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1997} = e^{i\frac{1997\pi}{4}} + e^{i1010\pi} + e^{-i1010\pi} + e^{-i\frac{1997\pi}{4}} \\ &= e^{i\left(\frac{1996\pi+\pi}{4}\right)} + 1 + 1 + e^{i\left(\frac{-1996\pi-\pi}{4}\right)} = e^{i\left(499\pi+\frac{\pi}{4}\right)} + 2 + e^{i\left(-499\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i499\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} + 2 + e^{-i499\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= -e^{i\frac{\pi}{4}} + 2 - e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

لدينا : $(2 - \sqrt{2}) \in \mathbb{R}_+$ ومنه العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$ حقيقي موجب .

3  إيجاد قيم العدد الطبيعي n

• $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيليّ سالبا .

لدينا :

$$\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

نعلم أنّ $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيليا صرفا جزؤه التخيليّ سالبا معناه $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n\right] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$ أي $n \cdot \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$ أي أنّ $n \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$ يكافئ $\frac{n}{2} = -\frac{1}{2} + 2k/k \in \mathbb{N}^*$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n = 4k - 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

• $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

لدينا :

$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)}\right)^n = \left(e^{i\pi}\right)^n$$

نعلم أنّ $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه $\arg\left[\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي $n \cdot \arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي أنّ $n \cdot \pi = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي .

• $(z_A)^n$ عددا حقيقيا موجبا .

لدينا :

$$(z_A)^n = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

نعلم أنّ $(z_A)^n$ حقيقيا موجبا معناه $\arg[(z_A)^n] = +2k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي $n \cdot \arg(z_A) = 2k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي أنّ $n \cdot \frac{\pi}{4} = 2k\pi/k \in \mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n = 8k$ حيث k عدد طبيعي .

• $(z_B)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

لدينا :

$$(z_B)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

نعلم أنّ $(z_B)^n$ تخيليا صرفا معناه $\arg[(z_B)^n] = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي $n \cdot \arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}$ أي أنّ $n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي .

4  تعيين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ثم تبين أنّ النقط A ، B و F في استقامة

لدينا : $z_F - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$ أي $z_F = i(2 + 2i)$ ومنه $z_F = -2 + 2i$ ولدينا كذلك : $\frac{z_A - z_F}{z_B - z_F} = \frac{2 + 2i - (-2 + 2i)}{2i - (-2 + 2i)} = \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2i + 2 - 2i} = \frac{4}{2} = 2$ ومنه النقط A ، B و F في استقامة .

 كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم استنتاج طبيعة المثلث AFC

لدينا : $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} = \frac{2 + 2i - (-2i)}{-2 + 2i - (-2i)} = \frac{2 + 2i + 2i}{-2 + 2i + 4i} = \frac{2 + 4i}{-2 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

لدينا : $\left|\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}\right| = \left|\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$ ومنه $\frac{AC}{FC} = 1$ إذن $AC = FC$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}\right) = \theta$ حيث : $\tan(\theta) = -\frac{4}{3}$

ومنّه : $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} = e^{i\theta}$ وبالتالي المثلث AFC متقايس السابقين .

٥. تعيين لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $\frac{1}{3}$ والذي يُحوّل النقطة F إلى النقطة A

من العبارة المركبة للتحاكي لدينا: $z_A - z_H = -\frac{1}{3}(z_F - z_H)$ بعد الحساب نجد $z_H = \frac{3}{4}z_A + \frac{1}{4}z_F$ وعليه: $z_H = 1 + 2i$.

٦. تعيين لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{FB}$

لدينا: $z_B - z_F = \beta$ بالتعويض في العبارة العامة للتحويلات النقطية نجد: $z_I = z_O + (z_B - z_F)$ أي $z_I = z_B - z_F$ بالتعويض نجد $z_I = 2$.

٧. إيجاد لاحقة النقطة J حتى يكون الرباعي $BJCI$ معين

حتى يكون الرباعي $BJCI$ معين يجب أن يكون: $\vec{BJ} = \vec{BI}$ و $\vec{BJ} = \vec{IC}$.
لدينا: $\vec{BJ} = \vec{IC}$ معناه $z_J - z_B = z_C - z_I + z_B$ ومنه $z_J = z_C - z_I + z_B$ ومنه بعد التعويض نجد: $z_J = -2$ الآن نتحقق من أن: $BJ = BI$ وللتحقق لدينا: $BJ = \sqrt{8}$ و $BI = \sqrt{8}$ إذن لاحقة النقطة J هي: $z_J = -2$.

٨. تبين أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان. هل (IC) و (DF) متعامدان؟ مع تبرير الإجابة

لإثبات أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أن شعاعي توجيههما متعامدان أي أثبات أن $\vec{BJ} \perp \vec{DF}$.
لدينا: $\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - (2 - 2i)} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} = \frac{-2 - 2i}{-4 + 4i} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} = \frac{-(1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} = \frac{1}{2}i$
واضح أن $\arg\left(\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D}\right) = \frac{\pi}{2}$ وعليه $(\vec{DF}; \vec{BJ}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $\vec{BJ} \perp \vec{DF}$ وهو المطلوب.
إنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان. التبرير: هنا نغير قليلا ونستعمل الجداء السلمي أي لإثبات أن المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أن $\vec{IC} \perp \vec{DF}$ أي نبيّن أن $\vec{IC} \cdot \vec{DF} = 0$.
لدينا: $\vec{IC}(-2; -2)$ و $\vec{DF}(-4; 4)$ إذن: $\vec{IC} \cdot \vec{DF} = -2(-4) - 2(4) = 8 - 8 = 0$ وبالتالي: $\vec{IC} \perp \vec{DF}$ و...م.
يمكنك استعمال الخاصية التي تقول "كل مستقيمان متوازيان هما عموديان على نفس المستقيم" وذلك باستعمال أن الرباعي $BJCI$ معين.

٩. تبين أن المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان. هل (IB) و (DF) متوازيان؟ مع تبرير الإجابة

لإثبات أن المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان يكفي إثبات أن شعاعي توجيههما مرتبطان خطيًا.
لدينا: $\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D} = \frac{-2 - (-2i)}{-2 + 2i - (2 - 2i)} = \frac{-2 + 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} = \frac{-2 + 2i}{-4 + 4i} = \frac{-1 + i}{-2 + 2i} = \frac{(-1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} = \frac{1}{2}$
إنّ: $\arg\left(\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D}\right) = 0$ وعليه $(\vec{DF}; \vec{CJ}) = 0$ ومنه الشعاعان $\vec{DF}$ و $\vec{CJ}$ مرتبطان خطيًا و...م.
إنّ المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان. التبرير: هنا نغير قليلا. لدينا $\vec{CJ} = \vec{IB}$ لأنّ الرباعي $BJCI$ معين معناه الشعاعان $\vec{CJ}$ و $\vec{IB}$ مرتبطان خطيًا وكذلك مما سبق وجدنا أن الشعاعان $\vec{DF}$ و $\vec{CJ}$ مرتبطان خطيًا إذن بالتعدي نجد $\vec{DF}$ و $\vec{IB}$ مرتبطان خطيًا ومنه المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان.

١٠. تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_B}{z_J}$ ثم استنتاج طبيعة المثلث OBJ

لدينا: $\frac{z_B}{z_J} = \frac{2i}{-2} = -i$ وعليه $\arg\left(\frac{z_B}{z_J}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_B}{z_J}\right| = 1$ هذا معناه أن $\angle(OJ; OB) = -\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث OBJ قائم في O ومتقايس الساقين.

١١. التّحقّق من أنّ النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD) ثمّ تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$

لدينا $\frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2} = 2 = z_I$ ومنه I منتصف قطعة المستقيم (AD) .

وكذلك $z_G = \frac{z_A + 2z_B - 2z_C}{1 + 2 - 2} = \frac{2 + 2i + 2(2i) - 2(-2i)}{1} = 2 + 10i$

١٢. تعيين (E_1) و (E_2) مجموعة النقط M من المستوي

لدينا: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC}\| = \frac{1}{2}\|\vec{MA} + \vec{MD}\|$ يكافئ $\|\vec{MG}\| = \frac{1}{2}\|\vec{2MI}\|$ يكافئ $MG = MI$ ومنه المجموعة (E_1) هي محور قطعة المستقيم (GI) .

لدينا $(\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MD}) = 0$ يكافئ $\vec{MG} \cdot 2\vec{MI} = 0$ يكافئ $\vec{MG} \cdot \vec{MI} = 0$ ومنه (E_2) هي الدائرة التي قطرها $[GI]$.
- يمكنك استعمال الشكل التحليلي حتى تجد $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

١٣. تعيين نسبة زواوية S

لدينا: $\left\{ \begin{array}{l} z_D = \alpha z_O + \beta \dots\dots\dots (1) \\ z_A = \alpha z_A + \beta \dots\dots\dots (2) \end{array} \right.$ بطرح (2) من (1) نجد $\alpha = \frac{z_D - z_A}{z_O - z_A}$ بالتعويض نجد $\alpha = 1 + i$ وعليه نسبة S هي $k = |\alpha| = \sqrt{2}$ و $\theta = \arg(\alpha) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

🔗 **تعيين مركز الدائرة (Γ) ونصف قطرها ، ثم حساب مساحتها**

لدينا : $\overrightarrow{AF}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{AD}(0;-4)$ و $\overrightarrow{DF}(-4;4)$ بالمرور للطويلة نجد : $AD = 4$ ، $AF = 4$ و $DF = \sqrt{32}$. وعليه : $AF^2 = 16$ و $AD^2 = 16$ و $DF^2 = 32$ وعليه حسب نظرية فيثاغورس العكسية فإن المثلث AFD قائم في النقطة A . بما أن الدائرة (Γ) تشمل النقط A ، D و F فإنها تكون محيطة بالمثلث القائم AFD ويكون وتره DF هو قطر الدائرة (Γ) . نعتبر أن T هي مركز الدائرة (Γ) وعليه $r = \frac{DF}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ وطول نصف قطرها هو $z_T = \frac{z_D + z_F}{2} = \frac{2 - 2i - 2 + 2i}{2} = 0 = z_O$ ومساحتها هي : $S_\Gamma = \pi r^2 = \pi (2\sqrt{2})^2 = 8\pi cm^2$.

🔗 **إيجاد (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S ، ثم استنتاج مساحة الدائرة (Γ')**

لدينا العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1+i)z + 2 - 2i$ ومنه $z'_A = (1+i)z_A + 2 - 2i$ ولدينا $r' = 4$ أي $r' = kr = \sqrt{2}(2\sqrt{2})$ ولدينا $z'_D = 2 + 2i$ ومنه (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها هو r' ومساحتها هي : $S_{\Gamma'} = k^2 S_\Gamma = (\sqrt{2})^2 \times 8\pi = 16\pi cm^2$.

🔗 **كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_I}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم المثلي ، استنتاج طبيعة الرباعي OIAB**

لدينا : $\frac{z_B - z_I}{z_A} = i$ ومنه $\frac{z_B - z_I}{z_A} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
لدينا $1 = \left| \frac{z_B - z_I}{z_A} \right| = \left| \frac{z_B - z_I}{z_A - z_O} \right| = \left| \frac{z_B - z_I}{z_A - z_O} \right|$ وبالتالي : $|z_B - z_I| = |z_A - z_O|$ معناه $IB = OA$ ولدينا كذلك $\frac{z_A + z_O}{2} = \frac{z_I + z_B}{2} = 1 + i$ من هنا نؤكد أن قطرا الرباعي OIAB متناصفان ومتعامدان ومتساويان مما يوحي أن OIAB مربع .

🔗 **كتابة الصيغة المركبة للتحويل f للمعرف كاليلي : $f = t \circ h \circ s$**

العبارة المركبة للانسحاب t هي : $z' = z + 2$.
العبارة المركبة للتعاكس h هي : $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$.
العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z' = (1+i)z + 2 - 2i$.
نعرف الآن التركيب ونستعمل نفس الفكرة في تركيب الدوال فنجد :
العبارة المركبة للتحويل $t \circ h$ كاليلي : $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{10}{3} + \frac{8}{3}i$ وعليه العبارة المركبة للتحويل f هي : $z' = -\left(\frac{1+i}{3}\right)z + \frac{8}{3} + \frac{10}{3}i$.
واضح أن f يمثل تشابه مباشر نسبته هي $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $k_f = \left| -\left(\frac{1+i}{3}\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ وزاويته هي : $\theta_f = \pi + \frac{\pi}{4}$ ولاحقة مركزه هي : $z_\Omega = \frac{42}{17} + \frac{32}{17}i$.

🔗 **تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ مع $\theta \in [0, 2\pi[$**

لدينا $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ يكافئ $z - (2 - 2i) = -9e^{i\theta}$ يكافئ $z - z_D = -9e^{i\theta}$ بالمرور إلى الطويلة نجد : $|z - z_D| = 9$ يكافئ $DM = 9$ ومنه مجموعة النقط M من المستوي في هذه الحالة هي الدائرة التي مركزها النقطة D وطول نصف قطرها هو r حيث $r = 9$.

🔗 **تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ ($z \neq 2i$)**

لدينا $\arg(z - 2i) = \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ يكافئ $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ ومنه مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه B وبشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل في الاتجاه المباشر ، باستثناء النقطة B (لأن عمدة الصفر غير معينة) .

🔗 **تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي**

نعلم أن $\arg(\overline{z - z_A}) = -\arg(z - z_A)$ ومنه :

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) = \arg(z - z_A) - \arg(\overline{z - z_A}) = \arg(z - z_A) - (-\arg(z - z_A)) = 2\arg(z - z_A)$$

لدينا : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) = 2k\pi$ أي $2\arg(z - z_A) = 2k\pi$ معناه $\arg(z - z_A) = k\pi$ إذن $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = k\pi$ وبالتالي مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A (لأن عمدة الصفر غير معينة) .

تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي من أجلها يكون $L = \frac{z-2i}{z-2+2i}$ ($z \neq 2-2i$) عدداً حقيقياً سالباً

لدينا $L = \frac{z-2i}{z-2+2i} = \frac{z-z_B}{z-z_D}$ ، نعلم أن L حقيقي سالب معناه $\arg(L) = (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ ، $z \neq z_D$ ، $z \neq z_B$ ، $L = 0$ ، $z = z_B$ ، $z \neq z_D$ ، وعليه الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطياً وفي إتجاهين متعاكسين ويمكن لـ M أن تنطبق على B ولا تنطبق على D . ومنه نستنتج مباشرة أن مجموعة النقطة M من المستوي في هذه الحالة هي قطعة المستقيم (DB) باستثناء النقطة D .

12

التحقق من أن : $OM' = 6 \times \frac{DM}{BM}$

لدينا $z' - z_O = -6i \left(\frac{z-z_D}{z-z_B} \right)$ يكافئ $z' = \frac{-6i(z-2+2i)}{z-2i} = \frac{-6i(z-(2-2i))}{z-2i}$ ، $z' - z_O = -6i \left(\frac{z-z_D}{z-z_B} \right)$ بالمرور إلى الطويلة نجد $|z' - z_O| = 6 \left| \frac{z-z_D}{z-z_B} \right|$ ، $OM' = 6 \times \frac{DM}{BM}$ يكافئ وهو المطلوب .

استنتاج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) فإن M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة

M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) معناه $DM = BM$ ومنه $OM' = 6$ إذن M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها هو r حيث $r = 6$ وهو المطلوب .

تبين أن $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ و $z' \neq z_O$

لدينا $z' - z_O = -6i \left(\frac{z-z_D}{z-z_B} \right)$ بالمرور إلى العمدة نجد $\arg(z' - z_O) = \arg(-6i \left(\frac{z-z_D}{z-z_B} \right))$ يكافئ $\arg(z' - z_O) = \arg(-6i) + \arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_B}\right)$ ، $k \in \mathbb{Z}$ حيث $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ يكافئ $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi$ ، ومنه $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = 3k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، و $M' \neq O$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطين خطياً ومنه M' تنتمي إلى حامل محور القواصل باستثناء النقطة O .

استنتاج أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ماعدا النقطتين B و D فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة

M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ماعدا النقطتين B و D معناه $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. ومنه $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi$ ، $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = 3k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، و $M' \neq O$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطين خطياً ومنه M' تنتمي إلى حامل محور القواصل باستثناء النقطة O .

إنتهى

بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

قال العلامة عبد الرحمن ناصر السعدي رحمه الله تعالى :

نَحْضُ إِلَى الْعِلْمِ فِي جِدِّ بِلَا كَسَلٍ *** نَحْوُ عَبْدِ الْكَلْبِ الْفِيْرَاتِ يَنْتَدِرُ
وَأَصْبِرْ عَلَى تَيْلٍ صَبْرٍ الْمَجْدُ لَهُ *** فَلَيْسَ يَذْرُكُهُ مَنْ لَيْسَ يَضْطَبِرُ
يَكْفِيكَ بِالْعِلْمِ فَضْلًا أَنْ صَاحِبَهُ *** بِالْعَزِّ نَالَ الْعُلَا وَالْخَيْرَ يَنْتَظِرُ
وَأَهْلًا لَهُ رَجُلًا فَرَدًّا مُحَاسِنُهُ *** بِالْحَزْمِ وَالْعَزْمِ هَانَ الصَّغْبُ وَالْعَسِرُ