

الدالة الأسية

تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق
 $f(0) = 1$ [2] $f' = f$ [1]
 ونكتب $f(x) = e^x$ و $f(x) = \exp(x)$

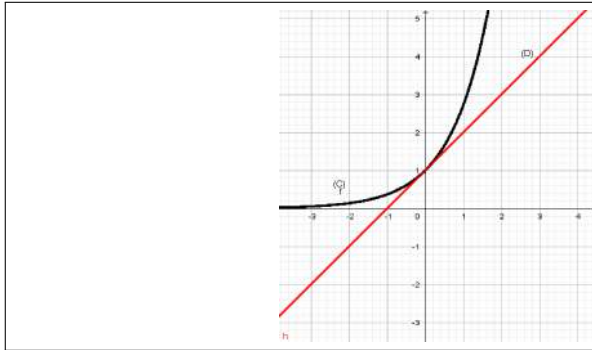
خواص

$e^{x+y} = e^x \times e^y$ [5] ، $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ [4] ، $e^x \neq 0$ [3] ، $e^1 = e \approx 2.71$ [2] ، $e^0 = 1$ [1]
 $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ [10] ، $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ [9] ، $(e^x)' = e^x$ [8] ، $(e^x)^n = e^{nx}$ [7] ، $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ [6]

الدالة المشتقة :

$f(x) = e^x$ فإن $f'(x) = e^x$ فهي دالة متزايدة على $\mathbb{R}$ ومنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y
 $x = \ln(y)$ معناه $e^x = y$ [3] $x < y$ معناه $e^x < e^y$ [2] $x = y$ معناه $e^x = e^y$ [1]

جدول تغيرات و التمثيل البياني للدالة الأسية :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	1	$+\infty$

مشتقة دالة أسية :

نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عديدة .
 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I وبالتالي : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

النهايات الشهيرة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad [3] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad [2] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad [7] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad [6] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad [5] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad [4]$$

المعادلات التفاضلية :

[1] حل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو من الشكل : $y = Ce^{ax}$ (C عدد حقيقي ثابت كفي)
 [2] حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو من الشكل : $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ (C عدد حقيقي ثابت كفي)

الدالة اللوغارتمية النيبيرية

تعريف الدالة اللوغارتمية

نسمي الدالة اللوغارتمية النيبيرية الدالة التي نرمز لها بـ $\ln$ هو التي ترفق كل x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ ونكتب $f(x) = \ln(x)$

خواص

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad [4] \quad , \quad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \quad [3] \quad , \quad \ln e = 1 \quad [2] \quad , \quad \ln 1 = 0 \quad [1]$$

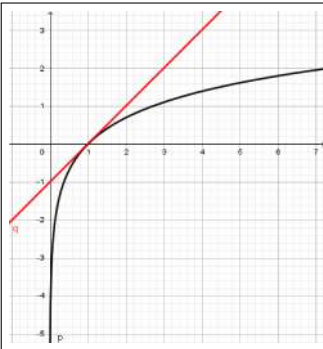
$$, \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad [7] \quad , \quad \ln(a)^n = n \ln(a) \quad [6] \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad [5]$$

$$a < b \quad \text{معناه} \quad \ln(a) < \ln(b) \quad [9] \quad \quad a = b \quad \text{معناه} \quad \ln(a) = \ln(b) \quad [8]$$

الدالة المشتقة :

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{فإن} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{فهي دالة متزايدة على} \quad]0; +\infty[$$

جدول تغيرات و التمثيل البياني للدالة اللوغارتمية :



x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

مشتقة دالة لوغارتمية :

نضع $f(x) = \ln(u(x))$ حيث u دالة عددية و $u \neq 0$.

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I و بالتالي : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

ملاحظة : إذا كانت $f(x) = \ln |u(x)|$ فإن $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

النهايات الشهيرة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + 1}{x} = 1 \quad [4] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \quad [3] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad [2] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad [8] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad [7] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad [6] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad [5]$$

دالة اللوغارتم العشري :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \text{نسمي دالة اللوغارتم العشري الدالة التي نرمز لها بـ} \quad \log \quad \text{و المعرفة بـ}$$

✓ التمرين 01

♠ بسط العبارات التالية :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \diamond [5] \quad \frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} \diamond [4] \quad (e^3 - 2)^2 - (e^3 + 2)^2 \diamond [3] \quad (e^x)^3 \cdot e^{-5x} \diamond [2] \quad (e^2)^3 \cdot (e^{-5} \cdot e^{-1}) \cdot e^{-5} \cdot e^4 \diamond [1]$$

✓ التمرين 02

♠ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x مايلي :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \diamond [1] \quad x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} \diamond [4] \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \diamond [3] \quad \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1} \diamond [2]$$

✓ التمرين 03

♠ عين الأعداد الحقيقية a, b, c في كل حالة من الحالات التالية :

$$\frac{e^{2x} - 3e^x + 5}{e^x + 2} = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 2} \diamond [3] \quad \frac{e^{2x}}{e^x + 2} = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 2} \diamond [2] \quad \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = a + \frac{b}{e^x + 1} \diamond [1]$$

✓ التمرين 04

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$e^{x^2+3x-3} = e^{2x-1} \diamond [5] \quad e^{|x-1|} - e^2 = 0 \diamond [4] \quad e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \diamond [3] \quad 2e^x + 6 = 0 \diamond [2] \quad e^{2x} = 1 \diamond [1] \\ \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}} \diamond [9] \quad e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \diamond [8] \quad e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \diamond [7] \quad (2e^{-x} - 6) \cdot (-e^x + 2) = 0 \diamond [6]$$

✓ التمرين 05

♠ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\frac{e^x - 1}{2 - e^x} > 0 \diamond [5] \quad (e^{-x} - 2) \cdot (e^x - 1) \geq 0 \diamond [4] \quad (-e^x + 3) \cdot (e^x - e^2) \geq 0 \diamond [3] \quad e^x + 6 > 0 \diamond [2] \quad e^{3x} \leq 1 \diamond [1] \\ 2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0 \diamond [7] \quad e^{2x} - 5e^x + 6 < 0 \diamond [6]$$

✓ التمرين 06

♠ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $(2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$

♠ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$

✓ التمرين 07

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية التالية :

$$3y' - 2y + 1 = 0 \diamond [4] \quad y' + 3y = 2 \diamond [3] \quad 2y' - y = 0 \diamond [2] \quad y' = 2y \diamond [1]$$

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية المرفقة بالشرط الابتدائي :

$$f(0) = 2 \text{ و } y' + 3y = 2 \diamond [3] \quad f(\ln 4) = 1 \text{ و } 2y' + y = 0 \diamond [2] \quad f(0) = 3 \text{ و } y' - 3y = 0 \diamond [1]$$

✓ التمرين 08

♠ أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة التعريف D_f في كل حالة من الحالات التالية :

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = e^x - ex - 1 \diamond [2] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = 3x - 2 + e^x \diamond [1]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (2 - x)e^x - 1 \diamond [4] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (x - 1)e^x \diamond [3]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3 \diamond [6] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (x + 1)e^{-x} \diamond [5]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x} \diamond [8] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = 2 + (x - 1)e^{-x} \diamond [7]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = 2 - x^2 e^{1-x} \diamond [10] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x} \diamond [9]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} \diamond [12] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (1 - x)e^{-x+1} + 1 \diamond [11]$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (1 - 2x - e^{2x-2}) \diamond [14] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1 \diamond [13]$$

$$; f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1} \diamond [17] \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} ; f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \diamond [16] \quad D_f = \mathbb{R} ; f(x) = e^{2x} - 5e^x + 3x + 1 \diamond [15]$$

$$D_f =] - \infty ; 1[; f(x) = \frac{x}{x - 1} \cdot e^{-x} \diamond [19] \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} ; f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{1 - e^x} \diamond [18] \quad D_f = \mathbb{R}$$

✓ التمرين 09

♠ بسط العبارات التالية :

$$\begin{aligned} & \frac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}} \diamond [6] \quad (\ln \frac{1}{e})^2 + (\ln \frac{1}{e})^2 \diamond [5] \quad \frac{e^{\ln 8}}{e^{3 \ln 2}} \diamond [4] \quad \ln e + \ln \frac{1}{e} \diamond [3] \quad \ln e \sqrt{e} \diamond [2] \quad \ln e^2 + \ln \sqrt{e} \diamond [1] \\ & 2 \ln(2 + \sqrt{5}) + \ln(9 - 4\sqrt{5}) \diamond [10] \quad e^{\ln 3} + e^{-\ln 5} \diamond [9] \quad \ln \sqrt{e^5} \diamond [8] \quad \frac{e^{2+\ln 3}}{e^{1-2 \ln 3}} \diamond [7] \\ & \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{5}{6} + \ln \frac{6}{7} \diamond [11] \end{aligned}$$

✓ التمرين 10

$$\begin{aligned} & [1] \quad \diamond \text{ بين أن من أجل كل عدد حقيقي } x > 1 \quad e^{\ln(x-1)+\ln x} = x^2 - x \\ & [2] \quad \diamond \text{ بين أن من أجل كل عدد حقيقي } x \quad \ln(e^x + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-2x}) \quad \text{و} \quad \ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x}) \\ & [3] \quad \diamond \text{ بين أن من أجل كل عدد حقيقي } x > 0 \quad \ln(1 + x) = \ln x + \ln(1 + \frac{1}{x}) \end{aligned}$$

✓ التمرين 11

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} & (\ln x)^2 = 1 \diamond [5] \quad \ln x^2 = 1 \diamond [4] \quad 2 \ln x - 1 = 0 \diamond [3] \quad \ln x = -3 \diamond [2] \quad \ln x = 2 \diamond [1] \\ & \ln(x+3)(x+2) = \ln(x+11) \diamond [8] \quad \ln|x+3| = 0 \diamond [7] \quad \ln(x^2 - 1) = 0 \diamond [6] \\ & \ln(x+2) - \ln 5 = 2 \ln 2 - \ln(x-2) \diamond [10] \quad \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \diamond [9] \\ & (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \diamond [11] \end{aligned}$$

✓ التمرين 12

♠ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\begin{aligned} & 2 \ln(x+5) \geq \ln(x+7) \diamond [3] \quad \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2 \ln 2 \diamond [2] \quad \ln(2x^2 - 3x - 2) \leq 2 \ln 2 \diamond [1] \\ & (-2 + \ln x) \cdot (1 - 2 \ln x) \geq 0 \diamond [6] \quad x \ln x - \ln x = 0 \diamond [5] \quad \ln(-x^2 + x) > \ln 2x \diamond [4] \\ & (\ln x)^2 - \ln x - 2 \geq 0 \diamond [7] \end{aligned}$$

✓ التمرين 13

♠ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

$$\begin{aligned} & \log(x) < 10 \diamond [4] \quad \log(x) = 0.01 \diamond [3] \quad \log(x) = -3 \diamond [2] \quad \log(x) = 4 \diamond [1] \\ & \log(\frac{x+3}{x-4}) - 1 < 0 \diamond [6] \quad \log(x) < \log(1-x) \diamond [5] \end{aligned}$$

✓ التمرين 14

♠ أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة التعريف D_f في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} & D_f =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x - 1 + \frac{\ln(x+1)}{1+x} \diamond [2] \quad D_f =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1) \diamond [1] \\ & D_f =]1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln \frac{x-1}{x+1} \diamond [4] \quad D_f =]\frac{1}{2}; +\infty[\quad ; \quad f(x) = 1 + \ln(2x-1) \diamond [3] \\ & D_f =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^2 + 2x + 4 - 2 \ln(x+1) \diamond [6] \quad D_f =]-\infty; 0[\quad ; \quad f(x) = x + 5 + 6 \ln(\frac{x}{x-1}) \diamond [5] \\ & D_f =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x} \diamond [8] \quad D_f =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x - (\frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1}) \diamond [7] \\ & D_f =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1 \diamond [10] \quad D_f =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^2 + 1 - \ln x \diamond [9] \\ & D_f =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{e}{x+1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} + x - 1 \diamond [12] \quad f(x) = -1 + (x+1)e + 2 \ln(x+1) \diamond [11] \\ & D_f =]-\frac{1}{2}; +\infty[\quad ; \quad f(x) = 2[-x + \ln(2x+1)] \diamond [14] \quad D_f =]-\frac{1}{2}; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{1 + 2 \ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \diamond [13] \\ & D_f =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \diamond [16] \quad D_f =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1 \diamond [15] \end{aligned}$$

تمارين الدالة الأسية و اللوغارتمية

✓ التمرين 01

- ♠ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. حيث a و b عدنان حقيقيان.
- [1] عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.
- [2] أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

✓ التمرين 02

- ♠ الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - e^x$.
- [1] أدرس تغيرات الدالة f .
- [2] بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α . ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.
- [3] باستعمال جدول القيم جد حصرا للعدد α .
- | | | | | | |
|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| x | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
| $f(x)$ | 0.281 | 0.095 | -0.120 | -0.369 | -0.655 |

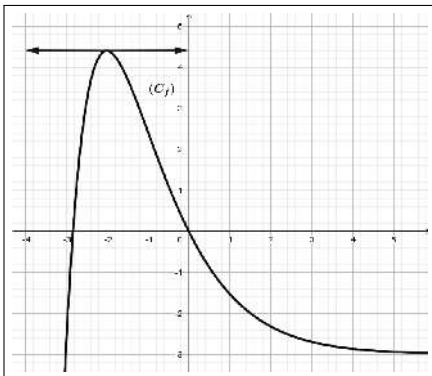
✓ التمرين 03

- ♠ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2 - x)e^x - 2$.
- [1] أدرس تغيرات الدالة f .
- [2] بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1.59 < \alpha < 1.60$.
- [3] عين حسب قيم x إشارة $f(x)$.
- ♠ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$.
- [4] احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.
- [5] عين إشارة $g'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

✓ التمرين 04

- ♠ نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] أثبت أن النقطة $w(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- [2] بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما $y = x$ و $y = x + 1$.
- [3] ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ') .

✓ التمرين 05



- ♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x + a)e^{-x} + b$.
- و a و b عدنان حقيقيان. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] براءة بيانية للمنحنى (C_f) .
- أ) عين $f(-2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$.
- ب) عين حسب قيم x إشارة $f(x)$.
- [2] بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$.
- [3] شكل جدول تغيرات الدالة f .

✓ التمرين 06

- ♠ نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 + a + b \ln(x)$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. حيث a و b عدنان حقيقيان.
- [1] ♦ عيّن a و b بحيث (C_f) يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4
- [2] ♦ أدرس تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
- [3] ♦ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$

✓ التمرين 07 BAC2019 علوم تجريبية

- ♠ f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.
- ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- [2] ♦ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ و شكل جدول تغيراتها.
- [3] ♦ نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغارتمية النبرية "ln" في المعلم السابق.
- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .
- [4] ♦ أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .
- [5] ♦ g الدالة المعرفة على $] -1; 0[\cup] -1; -\infty[$ بـ: $g(x) = f(-2x)$.
دون حساب عبارة $g(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

✓ التمرين 08

- ♠ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أحسب $f(-x) + f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي ثم استنتج أن النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)
- [2] ♦ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- [3] ♦ أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
- ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- [4] ♦ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1.7 < \alpha < -1.6$.
- ب) من أجل أي قيمة للعدد k ، يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.
- [5] ♦ ارسم (C_f) ومستقيمي المقاربين.

✓ التمرين 09 BAC2010 علوم تجريبية

- ♠ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، و فسر هندسيا النتيجة.

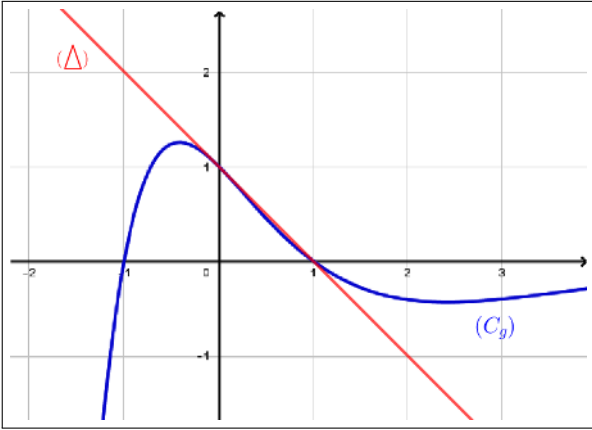
- [2] ♦ ادرس تغيرات الدالة f على كل المجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .
- [3] ♦ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما $y = x$ و $y = x + 1$
- ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيمين (Δ) و (Δ') .
- [4] ♦ أثبت أن النقطة $w(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- [5] ♦ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.
- ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
- ج) ارسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f) .
- د) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

✓ التمرين 10 BAC2009 علوم تجريبية

- ♦ h دالة عددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.
- [1] ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$
- [2] ♦ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$
- واستنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها .
- [3] ♦ أحسب $h(0)$ واستنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم x
- ♦ لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$
- نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بياننا .
- ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$
- ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)
- هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .
- [2] ♦ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- [3] ♦ بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4
- [4] ♦ أرسم (C_f) .

✓ التمرين 11

- ♦ g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (1+ax^2)e^{bx}$
- (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. حيث a و b عدنان حقيقيان .
- (Δ) المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0
- بقراءة بيانية :
- [1] ♦ أ) عيّن $g'(0)$ ، $g'(-1)$ و $g(0)$
- ب) أكتب معادلة لـ (Δ) .
- [2] ♦ باستخدام المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = (1-x^2)e^{-x}$



- ♠ لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
[1] ♦ أ) ♠ أحسب $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ وبين أن $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$
(نقبل أن $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0$)
ب) ♠ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$
ج) ♠ أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
د) ♠ عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسياً.
هـ) ♠ أكتب معادلة (d) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
[2] ♦ أ) ♠ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = f(x^2)$.
♦ دون حساب عبارة $h(x)$ أحسب $h'(x)$ وشكل جدول تغيراتها.

✓ التمرين 12 BAC2013 علوم تجريبية

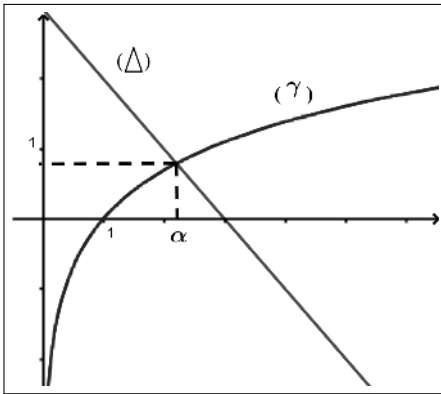
- ♠ الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - \ln(x+1)$.
[1] ♦ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
[2] ♦ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $g'(x) > 0$.
♠ الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
[1] ♦ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.
[2] ♦ أ) ♠ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ حيث f' هي مشتقة الدالة f .
ب) ♠ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
ج) ♠ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0.5$.
[3] ♦ أ) ♠ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ب) ♠ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
[4] ♦ نقبل المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .
أ) ♠ أحسب x_0 .
ب) ♠ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .
ج) ♠ عين بياناً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

✓ التمرين 13

- ♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (a - 2x)e^{x+1} + b$.
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. حيث a و b عدداً حقيقيين.
[1] ♦ عين a و b حيث يحققان الشرطان التاليان:
♦ g هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - y = -2e^{x+1} - 2$
♦ المنحنى (C_g) يقبل مماساً معامل توجيئه 1 عند النقطة ذات الفاصلة -1.
[2] ♦ نقبل الآن: $a = 1$ و $b = 2$.

- أ) أكتب عبارة $g(x)$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة g (حساب النهايات مطلوب نقبل أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)
- ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0.68; 0.69[$
- ♠ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)
- ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$
- ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- [2] بين أن: $f(\alpha) = 4\alpha - 1$ ، ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$
- [3] أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (4x - 3) = \frac{(-2 - 4x)e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}$
- ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (4x - 3)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
- [4] أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 4x - 3$.
- [5] أرسم المنحنى (C_f) و مستقيماته المقاربة في نفس المعلم.

✓ التمرين 14 BAC2015 علوم تجريبية



- المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [I] التمثيل البياني للدالة $x \rightarrow \ln x$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .
- [1] بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$
- [2] الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$
- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- [3] تحقق أن: $2.2 < \alpha < 2.3$

- [II] الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.
- [1] أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- [2] بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- [3] بين أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$
- [4] أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

✓ التمرين 15 BAC2015 علوم تجريبية

- [I] الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$
- [1] ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$
- [2] بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0.36 < \alpha < 0.37$
- [3] استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

- [II] ♦ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$
- ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.
- [2] ♦ أحسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- [3] ♦ أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- [4] ♦ أدرس وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.
- [5] ♦ أنشئ (Δ) و (C_g) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$. نأخذ $f(-\alpha) \approx 0.1$

✓ التمرين 16 ▶ BAC2012 علوم تجريبية

- ♦ لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- [2] ♦ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$
- استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- [3] ♦ أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 5$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$
- ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).
- [4] ♦ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-3.4 < \alpha < -3.5$ و $-1 < \beta < -1.1$.
- [5] ♦ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).
- [6] ♦ أ) نعتبر النقطتين $A(-1; 3 + 6 \ln(\frac{3}{4}))$ و $B(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln(\frac{3}{4}))$
- بين أن: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .
- ب) بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

✓ التمرين 17

- ♦ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$
- (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- [1] ♦ أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$
- [2] ♦ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)^2$
- ج) استنتج إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- [1] ♦ بين دون حساب $g''(x)$ أن للمنحنى (C_g) نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
- [4] ♦ أثبت أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتها.
- أدرس وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

- [5] بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2 < \alpha < -1$
[6] أرسم المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ') . ثم المنحنى (C_f) .
[7] ناقش بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

✓ التمرين 18 ▶ BAC 2014 رياضيات

- [1] f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- أ) أدرس تغيرات الدالة f
ب) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري)
ج) عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أرسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$
[2] g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$: $g(x) = 1 - \ln x$
 (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- أ) أدرس تغيرات الدالة g
ب) عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم أرسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$

✓ التمرين 19

- [I] g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

- [1] بين أن : $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$
[2] ادرس اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

- [II] f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = -2x + 2 + \frac{e^x}{1 - e^x}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- [1] بين أن : $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{1 - e^x}$

- [1] أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

- ج) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(1 - e^x)^2}$

- د) استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

- [3] أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتيهما $y = -2x + 2$ و $y = -2x + 1$.
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

- [4] أثبت أن النقطة $A(0; \frac{3}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

- [5] أرسم المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ') . ثم المنحنى (C_f) .

- [6] ناقش بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$.

✓ التمرين 20 ▶ BAC 2012 رياضيات

- [I] g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 - xe^x$

- [1] ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

[2] بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0.8 < \alpha < 0.9$

[II] f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

[2] أ $\spadesuit$ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب $\spadesuit$ بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

[3] أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') . حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

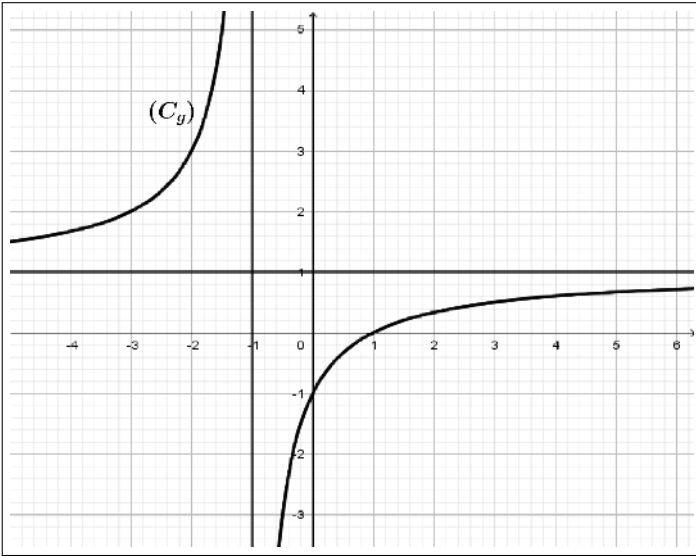
[4] أ $\spadesuit$ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب $\spadesuit$ بين أن : $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

[5] أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

[6] ناقش بياناً قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

✓ التمرين 09 BAC2011 علوم تجريبية



[I] $\spadesuit$ تعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب :

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل المقابل .

✚ بقراءة بيانية ✚

أ $\spadesuit$ شكل جدول تغيرات الدالة g

ب $\spadesuit$ حل بيانياً المتراجحة $g(x) \geq 0$

ج $\spadesuit$ عين بيانياً قيم x التي من أجلها $0 < g(x) < 1$

[II] $\spadesuit$ لتكن الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] $\spadesuit$ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجةن هندسيا .

[2] أ $\spadesuit$ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ب $\spadesuit$ أحسب $f'(x)$ و ادرس اشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

[3] $\spadesuit$ باستعمال الجزء [I] السؤال ج) ، عين اشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$

سلسلة المتفوق في الرياضيات

Bac 2022

تمارين ومسائل في الدوال الأسية

-مبرهنة القيم المتوسطة (الدوال المساعدة)

التزايد المقارن (حساب النهايات)

حصر العدد $f(\alpha)$

-التفسير الهندسي للعدد المشتق -معادلة المماس

-المستقيمات المقاربة

مركز ومحور التناظر

-انشاء منحنيات دوال تحوي رمز القيمة مطلقة

-بعض المناقشات البيانية

$$f(x) = f(m)$$

$$f(x) = e^m$$

$$f(x) = \ln m$$

$$f(x) = mx + b$$

BY LALAOUNA ALI MOUNIR

تمرين 1

- I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^-$: $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$.
 نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$ ،
 ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
 2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.
 4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
 5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .
 6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
 7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
 $(E) : f(x) = x + m$

تمرين 2

- لنكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^-$: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
 حيث a, b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس
 1- عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معلم توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.
 2- نضع $a = 1, b = 0, c = -3$.
 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 3- أكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
 4- أرسم (T) و (C_f) .
 5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
 6- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$.
 7- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

تمرين 3

- (I) g دالة معرفة على $\mathbb{R} \rightarrow$: $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$
 (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
 (2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
 (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$
 (C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1 cm).
 (1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.
 ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .
 (2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 (3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$
 ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.
 ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d) .
 (4) ارسم (d) , (T) و (C_f) .
 (5) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$
 (6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.
 ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.

تمرين 4

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \rightarrow$: $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس
 1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$
 ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
 ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)
 2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$
 ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
 ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')
 3. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها
 4. ارسم (D) و (D') و (C)
 5. نضع : $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$
 1- فسر هندسيا العدد I
 2- بين أنه من أجل كل x من $[0, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$
 3- أستنتج أن $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ واعط حصرًا للعدد I سعته 0.02

تمرين 5

1) $g(x) = x^2 e^x$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب) استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.
2) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)
أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.
ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

3) أ) بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث : $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .
ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابته معادلته .

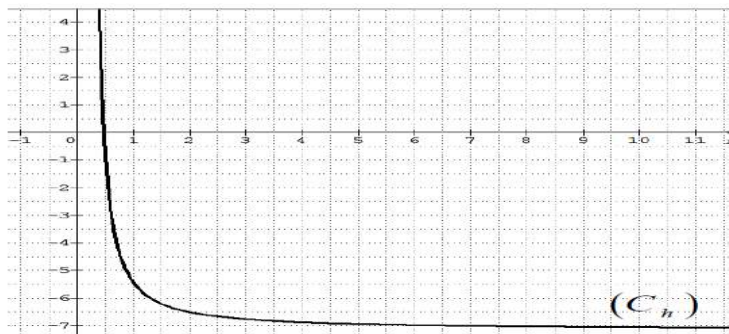
4) أ) أرسم (T) و (C_f) . (الملحق يعاد مع ورقة الإجابة)

ب) m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين :
 $(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$

5) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$.
ب) ليكن العدد λ من المجال $]0; 1[$ ،

$A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتهما :
 $x = 1$ و $x = \lambda$.
* استنتج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$.

الملحق :



الاسم :
اللقب :
القسم :

تمرين 6

(I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2x e^{2x}$

(1) أ) عين نهايتي الدالة g

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f دالة العددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - x e^{2x}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

(2) بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها α و β حيث $-3 < \alpha < -3,5$ و $0,5 < \beta < 1$

(5) ارسم (Δ) و (C_f)

(6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين الدالة الأصلية للدالة $x \rightarrow x e^{2x}$ التي تتقدم من أجل $x = 0$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$

(III) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

تمرين 7

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 + 4x e^{2x}$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O

5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

6. أنشئ المستقيمين (T) و (Δ) و المنحنى (C_f)

7. ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$(2x - 1)e^{2x} + x = x + m + 1$$

8. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx$

ب. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذوي المعادلتين :

$$x = 0 \text{ و } x = 1$$

تمرين 8

- f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(-x) + f(x) = 2$ ، فسّر هذه النتيجة بيانياً.
 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
 - احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - جد معادلة ديكرتية للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.
 - لتكن الدالة العددية u للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $u(x) = f(x) - (x + 1)$
- أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $u'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$
- ب / استنتج تغيرات الدالة u ثم حدد إشارتها. (احسب $u(0)$)
- ج / استنتج مما سبق الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .
6. أنشئ (C_f) ومقاربيه والمستقيم (Δ) .
7. ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3 - m)e^x - m - 1 = 0$.

تمرين 9

- I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} + x - 1$
- أدرس تغيرات الدالة g .
 - احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 / أ / بين أن: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$
- ب / احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 2 / أ / بين أن: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.
- ب / أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
- 3 / أ / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة O .
- ب / تحقق من أن: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ لكل x من $\mathbb{R}$. ثم استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ) .
- 4 / أنشئ (Δ) و (C_f) ، (نأخذ $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$)

تمرين 10

- المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و بين ان $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$. وادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول التغيرات
3. بين ان العدد $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right)$ هو قيمة حدية صغرى للدالة g
4. استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$
- II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$
- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm; \|\vec{j}\| = 2cm$
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ب- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
2. أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$
- ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$
- ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
4. أ. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .
- ب. بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$. وترتيبها $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{e}\right)$
- ج. احسب $f(0)$ ما ذا تستنتج
- د. ثم انشئ (T) و (Δ) والمنحنى (C_f) .

1

تمرين 11

- I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$
- ولكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 2cm$
- 1) تحقق من أن $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ لكل x من $\mathbb{R}$
- ب) استنتج أن الدالة f فردية ثم احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$
- ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- ج) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ فان : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$
- 3) ا. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x \right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
- ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته
- 4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ثم أنشئ المنحنى (C_f)
- 5) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما
- أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$
- ب) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين :
- $x = 0$ و $x = \lambda$ ، ثم احسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$

تمرين 12

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{x}{2} - 1 + 2e^{\frac{x}{2}}$

أ- ادرس تغيرات الدالة g بـ شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحداً α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 - xe^{-\frac{x}{2}}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب للمنحنى (C) .

ج- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} g(x)$

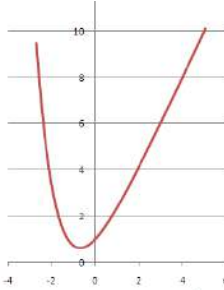
ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2.

3) أنشئ (T) ، (Δ) و (C) . (تؤخذ $f(\alpha) \approx -1,4$)

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

تمرين 13



نقبل أن التمثيل البياني المرفق هو للدالة: $h: x \mapsto 2x + \frac{1}{e^x}$ على $\mathbb{R}$ ، ونعتبر الدالة: $f: x \mapsto x^2 - \frac{1}{e^x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. حيث يدل الرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري.

1/ أنشر وبسط العبارة: $\frac{1}{e^x} \left(4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - 1 \right)$ ، ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2/ ادرس اتجاه تغير f ، وشكل جدول تغيراتها.

3/ جد إحداثيتي نقطة الانعطاف لـ (C) .

4/ ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ (C) .

5/ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، وهو يحقق: $0,5 < \alpha < 0,8$ ، ثم بين أن:

$$h(\alpha) = \alpha(2 + \alpha)$$

6/ هات أحسن تقريب تآلفي لـ f بجوار الـ 0.

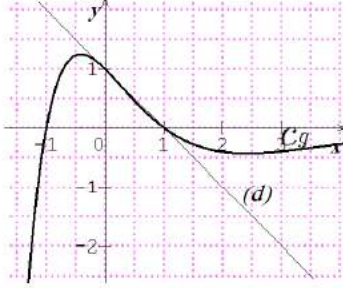
7/ أنشئ (C) ، و (Δ) مماسه عند النقطة $A(0, -1)$.

8/ أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) ومحوري المعلم والمستقيم المعرف بالمعادلة: $x = -2$.

$$(e^{-0,5} = 0,6, \quad e^{-0,8} = 0,45 \text{ يُعطى:})$$

تمرين 14

I- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1 + \alpha x^2)e^{bx}$ حيث a و b عدنان حقيقيان ، C_g تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و (d) مماس C_g في النقطة فاصلتها 0 ، (أنظر الشكل المقابل)



1- بقراءة بيانية احسب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.

2- أكتب معادلة للمماس (d) .

3- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 + x)^2 e^{-x}$ C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) أكتب معادلة لـ : (Δ) مماس C_f عند النقطة فاصلتها 0.

4- أ) أنشئ C_f و (Δ) .

ب) عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة : $f(x) = m$ حل سالب.

5- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2) - 1$

- دون كتابة عبارة الدالة h احسب $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

تمرين 15

I) تعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^{2x} + 4e^x - 6$

1/ أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x) = 0$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x - \frac{1}{2})e^{2x} + 4(x - 1)e^x - 3x^2$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1/ بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $f'(x) = xg(x)$

2/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3/ أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4/ إستنتج وجود نقطة إنعطاف I للمنحنى (C) يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند I

5/ برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$

6/ أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C)

تمرين 16

- (I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x + 1 - e^x$.
 (أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
 (ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \leq 0$.
 (II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-2x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
 (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (ب) بملاحظة أن : $f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2 e^{-x}$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
 (ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (2x^2 - 3x - 2)e^{-x}$ ، عين إشارة $f'(x)$.
 (د) شكل جدول تغيرات الدالة f .
 (3) (أ) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0
 (ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (1 - 2x) = (1 - 2x) \times g(x) \times e^{-x}$
 (ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .
 (4) (أ) ادرس تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الفواصل
 (ب) ارسم (C_f) و (T) على المجال $[-1; +\infty[$.
 (5) F الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
 عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 17

- I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = e^x + x + 1$
 (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 (2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 (3) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ و تحقق أن : $-1.27 < \alpha < -1.28$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
 II - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$
 و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 (1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \times g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 (3) بين أن : $f(\alpha) = \alpha + 1$. ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2}) .
 (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.
 (5) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
 (6) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

تمرين 18

- (I) - g دالة عددية معرفة على R بـ: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$
1. أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
 3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38; -0.37[$.
 4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .
- (II) - f دالة عددية معرفة على R بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
- و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.
1. - أ- أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
 - ب- بين أن: $\hat{f}(x) = g(x)$ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 2. - أ- بين أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
 - ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .
 3. بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$
 4. أرسم (d) و (C_f) نأخذ $\alpha = -0.37$.
 5. أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = 2x + 1$ ، $x = 0$ و $x = 2$.
- (III) - (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي.
1. عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحني (C_f) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
 2. أكتب معادلة للمماس (Δ_m) في هذه الحالة.
 3. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة:
- $$1 - \frac{x}{e^x} - m = 0$$

تمرين 19

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.
- (1) g دالة معرفة على المجال $]-\infty, +\infty[$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$
- أ- أدرس تغيرات الدالة g .
 - ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث $-1.28 < \alpha < -1.27$. استنتج إشارة $g(x)$.
- (2) f دالة معرفة على المجال $]-\infty, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$. نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f .
- أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - ب- بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $+\infty$ معادلته $y = x$. حدد وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) .
 - ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، عين إشارة $f'(x)$. شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - د- بين أن: $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$. أنشئ (Δ) ، (C) .

تمرين 20

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1- احسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g

2- شكل جدول تغيرات g ثم علل وجود عدد حقيقي α حيث $-0.36 < \alpha < -0.38$ يحقق $g(\alpha) = 0$

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 - ا- بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

ب- بين ان $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- بين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

4 - ا- بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x + 1$ بجوار $+\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ)

ج- أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-1.5; +\infty[$ يعطى $f(-1.5) = 4.72$

5- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = f(x^2 e^x)$

باستعمال مشتق دالة مركبة . استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

6- لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $k(x) = (ax + b)e^{-x}$

ا- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة k دالة أصلية للدالة $x \rightarrow -xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 21

I- الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة العددية g والمعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	...	...	...

$$g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$$

(أ) احسب $g(2)$ ، ثم أتمم النهايات المنقوصة في جدول التغيرات

(ب) علل وجود عدد حقيقي وحيد α بحيث: $-0.36 < \alpha < -0.38$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4- أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته: $y = 2x + 1$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d)

ج- أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-1.5; +\infty[$ (تعطى $f(-1.5) = 4.72$)

(5) لتكن الدالة h والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = f(x^2 e^x)$.

باستعمال مشتق دالة مركبة، استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

(6) لتكن الدالة k والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $k(x) = (ax + b)e^{-x}$.

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون k دالة أصلية للدالة $x \mapsto -xe^{-x}$

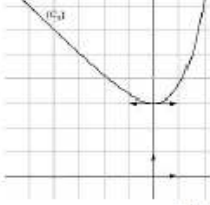
ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين 22

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

الجزء الأول

في الشكل المقابل (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$: $g(x) = ae^x + b - x$ حيث a و b عدنان حقيقيان



بقراءة بيانية

- (1) عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم عين $g(0)$ و $g'(0)$
- (2) عين إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها و إستنتج إشارة $g(x)$
- (3) أحسب $g'(x)$ بدلالة a و b حيث g' هي الدالة المشتقة للدالة g .
- (4) بإستعمال المعطيات السابقة بين أن $g(x) = e^x + 2 - x$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$
 - (3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ و إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (4) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم أدرس الأوضاع النسبية لهما.
 - (5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
 - (6) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم (Δ) .
 - (7) أرسم $(\Delta) \cap (T)$ و (C_f)
 - (8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $\frac{x-1}{e^x} = m$ (E) ←
 - (9) لتكن A_λ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تامة من 1.
- بإستعمال المتكامل بالتجزئة احسب $\int_1^\lambda (x-1)e^{-x} dx$ و إستنتج بدلالة λ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$

تمرين 23

الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $\begin{cases} g(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} , x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) بين أن الدالة g زوجية.
- (2) أدرس إستمرارية و قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 مفسراً قابلية الاشتقاق هندسياً.
- (3) أدرس تغيرات الدالة g .

الجزء الثاني :

لتكن الدالة h المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ : $h(x) = x^2 - 1$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم.

- (1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - h(x)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً.
- (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t فإن $e^t \geq t + 1$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_h) .
- (3) أرسم (C_g) و (C_h) .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \int_{e^{4n}}^{e^{4n+4}} g\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right) dx$

أ - أعط تفسير هندسي للعدد 0 ثم أكتب بدلالة u_n

ب - أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

تمرين 24

- I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + x + e^x$
1. ادرس تغيرات الدالة g .
 2. برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α .
 3. تحقق أن α من المجال $[-1.2; -1.3]$.
 3. حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.
- II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x e^x}{1 + e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها.
1. (ا) ادرس تغيرات الدالة f (تلاحظ أن $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة).
- برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$
- برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) حيث $y = x$ معادلة له.
- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم.
- ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T) .
 2. H نقطة فاصلتها x وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x) = \overline{MN}$
(ا) بين أن $\varphi(x) = \frac{x}{1 + e^x}$
(ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\varphi(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \cdot g(-x)$
استنتج أن $\overline{MN}$ يكون أكبر ما يمكن عند $(-\alpha)$
(ج) برهن أن $f(-\alpha) = 1$
(د) برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .
(هـ) ارسم في المعلم المتعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) و (T) (تؤخذ 5cm كوحدة)
 3. (ا) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا: $\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$
(ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = -\alpha$ و $x = 1$ و $y = 0$

تمرين 25

- I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = -4(e^x - 4)\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$
- II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{(4x + 9)e^x - 4x}{9(1 - e^x)}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1 - e^x}$.
 2. عين العددين الحقيقيين a, b بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{1}{1 - e^x}$.
 3. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها.
 4. (ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $f'(x) = \frac{g(x)}{9(1 - e^x)^2}$
(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$. ماذا تستنتج؟
 6. (أ) بين أن (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربين للمنحنى (C_f) معادلتهم على الترتيب: $y = -\frac{4}{9}x$ و $y = -\frac{4}{9}x - 1$.
(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
 7. أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) .
 8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{1 - e^x} = m$

تمرين 26

- I) $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :
- أ - احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g .
ج - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4 \leq \alpha < \ln 6$.
د - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
 2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$.
أ - بين أن $u_n < \alpha$ ، $1 \leq u_n$.
ب - تحقق أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
ج - بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- II) $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :
1. وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا .
ب - تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$.
 2. بين أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ بـ : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$ ، $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 3. أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha = 1.5$) .

تمرين 28

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 1 + e^{-x}$.
1. نرسم بـ : (c_g) لمنحنى الدالة g و بـ : $(c_{\ln})$ لمنحنى الدالة " اللوغاريتم النيبيري " $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
أستنتج إشارة $f(x)$.
 2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.
أ) ادرس تغيرات الدالة g .
ب) - بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x) + x) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
- بين أن : $g(x) + x < 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.
- بين أن : $0 < g(x) - \ln x \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، ثم
أستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \ln x)$ ، فسر النتيجة بيانيا .
- ليكن (Δ) مماس (c_g) في النقطة ذات الفاصلة : -2 ، أكتب معادلة لـ (Δ) .
- أنشئ (c_g) و $(c_{\ln})$ و (Δ) في نفس المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x + 1 + e^{-x} (1 - e^m) = 0$.
 3. نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' + y = x + 2$ ، تأكد أن الدالة f حلا خاصا لهذه المعادلة التفاضلية

تمرين 29

المستوي منسوب إلى معلم متعاود و متجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) علل وجود عدد حقيقي وحيد α بحيث $-0,36 < \alpha < -0,38$ والذي يحقق $g(\alpha) = 0$

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

4- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y = 2x + 1$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

ب- أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-1,5; +\infty[$ (تعطى $f(-1,5) = 4,72$)

(5) لتكن الدالة h والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = f(x^2 \cdot e^x)$

بالستعمال مشتق دالة مركبة، استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

(6) لتكن الدالة k والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $k(x) = (ax + b)e^{-x}$

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون k دالة أصلية للدالة $x \mapsto -xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{مع } (n \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{مع } (n \in \mathbb{N}) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (5)$$

سلسلة المتفوق في الرياضيات

Bac 2022

تمارين ومسائل في الدوال اللوغاريتمية

-الجزء الأول-

ملخص هام

حل معادلات و متراجحات ودراسة اشارة مقدار

التدرب على حساب مشتقة

التزايد المقارن (حساب النهايات)

حل مسائل بسيطة

-

BY LALAOUNA ALI MOUNIR

حل معادلات

ملاحظة يجب ايجاد مجموعة تعريف قبل الحل في المعادلات والمتراجحات

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : (1) $e^x = 8$ ، (2) $\ln x = 1 + \ln 3$

$$\ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x) \quad (4) \quad , \quad 2\ln^2 x - 3\ln x - 2 = 0 \quad (3)$$

$$\ln(4x-10) + \ln(2x-2)^2 - 2\ln(4x-4) = 0 \quad (5)$$

$$2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 3(\ln x) = 0 \quad (6)$$

تمرين 2

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5 \quad (1)$$

$$\ln(x^2-5) - \ln(4-x) = 2\ln 2 \quad (2)$$

$$\ln|x-4| + \ln(7-3x) = \ln 2 \quad (3)$$

$$\ln x^2 - \ln\sqrt{x} - 6 = 0 \quad (4)$$

$$(\ln x)^2 - \frac{5}{2}\ln x + 1 = 0 \quad (5)$$

$$(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0 \quad (6)$$

$$(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4 = 0 \quad (7)$$

$$\ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (8)$$

$e^2, \sqrt{e}$	e^4	2	3, -7	4
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, [2\pi]$	e, e^2	e^3, e, e^{-1}, e^{-3}		

حل متراجحات

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : (1) $\ln x < 1$ ، (2) $\ln 2x > -1$

$$2\ln(x-1) + 3 \geq 0 \quad (6) \quad , \quad \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) \leq 0 \quad (5) \quad , \quad \ln(x-2)^2 \geq 0 \quad (4) \quad , \quad \ln(2x+3) < 4 \quad (3)$$

ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية :

$$(\ln x - 1)\ln x \quad (3) \quad , \quad \ln^2 x - \ln x - 6 < 0 \quad (2) \quad , \quad 2\ln x - 1 \quad (1)$$

$$2\ln(x-1) + 3 \quad (7) \quad , \quad 2x \ln(1-x) \quad (6) \quad , \quad 3 + 2\ln x \quad (5) \quad , \quad \frac{2 - \ln x}{1 + \ln x} \quad (4)$$

حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \sqrt{3} - 2 \ln 2 \\ 2(x + y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \quad (2) \quad , \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 15 \end{cases} \quad (4) \quad , \quad \begin{cases} x \cdot y = 4 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2} (\ln 2)^2 \end{cases} \quad (3)$$

حل في $\mathbb{R}$ جمل المعادلات التالية:

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 10 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ln(x+1) + 2 \ln(y-2) = 4 \\ 3 \ln(x+1) - \ln(y-2) = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \frac{3}{\ln x} - \frac{2}{\ln y} = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$(e^2 - 1; e + 2)$	$(5; 2)$	$(2; 5)$
$(\sqrt{e}; \sqrt{e})$	$(e^3; e^{-2})$	

- من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ أثبت ما يلي :

$$\ln(2 + x^2) = 2 \ln x + \ln\left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \quad /2 \quad \ln(x+2) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \quad /1$$

$$\ln(x^4 + 2x^3 - x + 7) = 4 \ln x + \ln\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right) \quad /4 \quad \ln\left(\frac{x^2 + x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1 + \frac{1}{x}}\right) \quad /3$$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\ln(6x - \sqrt{35}) = \ln \sqrt{6 - \sqrt{35}} + \ln \sqrt{6 + \sqrt{35}} \quad /5 \quad \ln(x+2) - 2 \ln 3 = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad /1$$

$$\ln^2 x + \ln x - 6 = 0 \quad /6 \quad \ln(x^2 - 2 + x) - \ln 4 = 0 \quad /2$$

$$\ln^2(x-1) + \frac{5}{2} \ln(x-1)^2 + 4 = 0 \quad /7 \quad \ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad /3$$

$$\ln^4 x - \ln^2 x - 2 = 0 \quad /8 \quad \ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \quad /4$$

- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\ln(x-1) + \ln(4-x) > \ln(x+4) \quad /5 \quad 2 \ln(x-3) < 1 \quad /1$$

$$-\ln\left(\frac{1}{x-3}\right) + \ln(x-2) \geq \ln(x^2 + 1) \quad /6 \quad \ln(2x^2 - x - 1) \geq 0 \quad /2$$

$$\ln^2(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 1) - 2 > 0 \quad /7 \quad |\ln x + 2| \leq e \quad /3$$

$$\frac{-\ln x + 2}{3 - \ln 3x} < 0 \quad /4$$

التدرب على حساب المشتقة

تمرين 1

عَيِّن الدالة المشتقة للدالة f في المجموعة التي تكون فيها قابلة للاشتقاق:

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x - 1 + \ln|2x - 1| \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(-x) + \ln\sqrt{2x + 3} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x + 1} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x^2}{x + 1} \quad (5)$$

$$f(x) = x \ln x - \ln(\ln x) \quad (6)$$

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{2x - 1}{2x + 1}\right) \quad (7)$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x} + (\ln x)^2 \quad (8)$$

تمرين 2

اوجد الدالة المشتقة في كل حالة

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1} + \ln|x + 1| \quad /3 \quad , \quad f(x) = \ln x + (\ln x)^2 \quad /2 \quad , \quad f(x) = \ln(x - 2)^2 \quad /1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln|x| \quad /6 \quad , \quad f(x) = \frac{x + 3 + 2\ln(x + 1)}{x + 1} \quad /5 \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) \quad /4$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) \quad /8 \quad , \quad f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{2}\ln|2x + 3| \quad /7$$

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \quad /11 \quad , \quad f(x) = -2x + \ln\left(\frac{x}{x + 1}\right) \quad /10 \quad , \quad f(x) = \ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| \quad /9$$

$$f(x) = \ln\frac{1}{2}(e^x - 2)^2 \quad /13 \quad , \quad f(x) = x^2 - 2x - \ln(x - 1)^2 \quad /12$$

التدرب على حساب النهايات

تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(2x+3) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + x - 2) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \quad (4)$$

$$(X = -x) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 + \ln(-x) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x^2-4} \right| \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x^2 - x \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x - \sqrt{x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) \quad (19)$$

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln x} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln x \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} + 5 \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - \ln(x+1)^2] \quad (8) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x} \quad (7)$$

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2}{x \ln x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2 \ln x}{x + \ln x} \quad (1)$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

حل مسائل بسيطة

تمرين 1

- f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$
- ولیکن C_f منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة f
 - (2) اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى C_f
 - (3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$
 - (4) ارسم المنحنى C_f .

تمرين 2

- f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:
- $$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2$$
- ولیکن C_f منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة f
 - (2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع المحورين الإحداثيين .
 - (3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f
 - (4) ارسم المنحنى C_f .

تمرين 3

- f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ
- $$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
- أثبت أن الدالة f فردية .

تمرين 4

f الدالة العددية : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|$

وليكن C_f منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحنى C_f
- (2) برهن أنه توجد نقطتا انعطاف للمنحنى C_f يطلب تعيين إحداثيي كل منهما.
- (3) جد معادلة كل من المماسين للمنحنى C_f عند نقطتي الانعطاف
- (4) أنشئ هذين المماسين ثم أنشئ المنحنى C_f .

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
ب- عين الدالة المشتقة للدالة f .
- ج- ادرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيرات f .
2. أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.
ب- ارسم المستقيم D والمنحنى (C).
3. k عدد حقيقي موجب تماما
ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$
(أ) بالحساب. (ب) باستعمال تغيرات الدالة f .

....يتبع بالجزء الثاني والخاص بالمسائل

BY LALAOUNA ALI MOUNIR