

نص التمرين

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}$

(1) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 3$

ج. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

د. استنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة.

(2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $9 - u_{n+1}^2 < 4(3 - u_n)$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$

ج. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

د. أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) لتكن المتتالية العددية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$S_n = \frac{u_0 - 4}{3 - u_0} + \frac{u_1 - 4}{3 - u_1} + \frac{u_2 - 4}{3 - u_2} + \dots + \frac{u_n - 4}{3 - u_n}$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n < -n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \right]$

ب. استنتج نهاية المتتالية (S_n) .

حل مقترح

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \end{cases}$$

(1) أ. نين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2u_n + 2 - 2}{\sqrt{u_n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2(u_n+1) - 2}{\sqrt{u_n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2(u_n+1) \times \sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1} \times \sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2(u_n+1) \times \sqrt{u_n+1}}{(u_n+1)} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} \end{aligned}$$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

(1) ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 3$:

لتكن الخاصية $p(n)$ التالية :

$$p(n) : 1 < u_n < 3$$

نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$:

لدينا : $u_0 = 2$ و $1 < 2 < 3$ وعليه : $1 < u_0 < 3$ ومنه : $p(0)$ صحيحة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كفي أي : $1 < u_n < 3$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي : $1 < u_{n+1} < 3$

لدينا من فرضية التراجع : $1 < u_n < 3$

فينتج :

$$1 < u_n < 3 \Leftrightarrow 2 < u_n + 1 < 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{u_n+1} < 2 \dots (*)$$

من (*) ينتج :

$$2\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n+1} < 4 \dots (1)$$

ومن (*) لدينا :

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_n+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{u_n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{2}} < \frac{-2}{\sqrt{u_n+1}} < -1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < \frac{-2}{\sqrt{u_n+1}} < -1 \dots (2)$$

بجمع المتراجحتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج :

$$1 < \sqrt{2} < 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} < 3$$

نجد : $1 < u_{n+1} < 3$ ومنه : $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 3$

(1) ج. نين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ حيث :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n \sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n+1})(2 + \sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(4 - u_n - 1)}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(3 - u_n)}{\sqrt{u_n+1}(2 + \sqrt{u_n+1})}$$

لدينا من (1) ب. : $1 < u_n < 3$

أي : $0 < 1 < u_n < 3$

ومنه : $u_n > 0$ و $3 - u_n > 0$ و $\sqrt{u_n+1} > 0$ و $2 + \sqrt{u_n+1} > 0$

$$\text{فينتج: } \frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}(2+\sqrt{u_n+1})} > 0 \text{ أي: } u_{n+1}-u_n > 0$$

ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

(1) د. استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن:

- المتتالية (u_n) متزايدة تماماً $(u_{n+1}-u_n > 0)$.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n < 3)$.

فستنتج أن:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية ℓ .

(2) أ. نين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9-u_{n+1}^2 < 4(3-u_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$9-u_{n+1}^2 = 9 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \right)^2$$

$$9-u_{n+1}^2 = 9 - \frac{4u_n^2}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{9(u_n+1)-4u_n^2}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{-4u_n^2+9u_n+9}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{-4\left(u_n+\frac{3}{4}\right)(u_n-3)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{(4u_n+3)(-u_n+3)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{4u_n+3}{u_n+1}(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2 = \frac{4(u_n+1)-1}{u_n+1}(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2 = \left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} \right)(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2 = \left(4 - \frac{1}{u_n+1} \right)(3-u_n)$$

$$\text{لاحظ أن: } 4 - \frac{1}{u_n+1} < 4 \text{ لأن: } \frac{1}{u_n+1} > 0$$

$$\text{فينتج: } \left(4 - \frac{1}{u_n+1} \right)(3-u_n) < 4(3-u_n) \text{ لأن: } 3-u_n > 0$$

ومنه:

$$9-u_{n+1}^2 < 4(3-u_n)$$

(2) ب. نين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_{n+1} < \frac{4}{5}(3-u_n)$

لدينا من (2) أ. : $9-u_{n+1}^2 < 4(3-u_n)$

فينتج: $(3-u_{n+1})(3+u_{n+1}) < 4(3-u_n)$

$$\text{ومنه: (3) } 3-u_{n+1} < \frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n) \text{ لأن: } 3+u_{n+1} > 0$$

ولدينا: المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

أي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} > u_n$

ومنه: $u_{n+1} > 2$

فينتج:

$$u_{n+1} > 2 \Leftrightarrow 3+u_{n+1} > 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+u_{n+1}} < \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}} < \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n) < \frac{4}{5}(3-u_n) \text{ ... (4)}$$

من (3) و (4) ينتج (بالتعدي):

$$3-u_{n+1} < \frac{4}{5}(3-u_n)$$

(2) ج. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

لدينا من (2) ب. : $3-u_{n+1} < \frac{4}{5}(3-u_n)$

فينتج:

$$\left\{ \begin{array}{l} n=0 \Leftrightarrow 3-u_1 < \frac{4}{5}(3-u_0) \\ n=1 \Leftrightarrow 3-u_2 < \frac{4}{5}(3-u_1) \\ n=2 \Leftrightarrow 3-u_3 < \frac{4}{5}(3-u_2) \\ \vdots \\ n-2 \Leftrightarrow 3-u_{n-1} < \frac{4}{5}(3-u_{n-2}) \\ n-1 \Leftrightarrow 3-u_n < \frac{4}{5}(3-u_{n-1}) \end{array} \right.$$

بضرب كل المتراجحات طرف في طرف (عمودياً) وبعد الاختزال ينتج:

$$3-u_n < (3-u_0) \left(\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5} \right)$$

$$3-u_n < (3-u_0) \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

$$3-u_n < (3-2) \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

$$3-u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

(2) د. نحسب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا من (2) ج. : $3-u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ولدينا: $3-u_n > 0$

فينتج:

$$0 < 3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

حيث: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ لأن: $1 < \frac{4}{5} < 1$ وعليه: $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) < 0$.

وحسب مبدأ النهايات بالحصص فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 0$.

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

(3) تكون المتتالية العددية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$S_n = \frac{u_0 - 4}{3 - u_0} + \frac{u_1 - 4}{3 - u_1} + \dots + \frac{u_n - 4}{3 - u_n}$$

(3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n < -n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$.

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = \frac{u_0 - 4}{3 - u_0} + \frac{u_1 - 4}{3 - u_1} + \dots + \frac{u_n - 4}{3 - u_n}$$

$$S_n = \frac{u_0 - 3 - 1}{3 - u_0} + \frac{u_1 - 3 - 1}{3 - u_1} + \dots + \frac{u_n - 3 - 1}{3 - u_n}$$

$$S_n = \frac{-(3 - u_0) - 1}{3 - u_0} + \frac{-(3 - u_1) - 1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-(3 - u_n) - 1}{3 - u_n}$$

$$S_n = \left(-1 + \frac{-1}{3 - u_0}\right) + \left(-1 + \frac{-1}{3 - u_1}\right) + \dots + \left(-1 + \frac{-1}{3 - u_n}\right)$$

$$S_n = -(1 + 1 + \dots + 1) + \left(\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n}\right)$$

$$S_n = -(n + 1) + \left(\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n}\right)$$

$$S_n = -n - 1 + \left(\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n}\right)$$

لدينا من (2) جـ: $3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ومنه:

$$3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n \Leftrightarrow \frac{1}{3 - u_n} > \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{3 - u_n} < -\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

فينتج:

$$n = 0 : \frac{-1}{3 - u_0} < -\left(\frac{5}{4}\right)^0$$

$$n = 1 : \frac{-1}{3 - u_1} < -\left(\frac{5}{4}\right)^1$$

.

.

.

$$n : \frac{-1}{3 - u_n} < -\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

بجمع المتراجحات طرف إلى طرف (عموديا) ينتج:

$$\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} < -\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0 + \left(\frac{5}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$

$$\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} < -\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0 \times \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{5}{4} - 1}\right]$$

$$\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} < -\left[1 \times \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4}}\right]$$

$$\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} < -4 \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n} < 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$-n - 1 + \left(\frac{-1}{3 - u_0} + \frac{-1}{3 - u_1} + \dots + \frac{-1}{3 - u_n}\right) < -n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n < -n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

(3) بـ. استنتاج نهاية المتتالية (S_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$ لأن: $\frac{5}{4} > 1$.

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right) = -\infty$$

فينتج:

$$\begin{cases} S_n < -n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right] \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-n - 1 + 4 \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right) = -\infty \end{cases}$$

وحسب مبدأ النهايات بالمقارنة فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

راجيا منكم صالح الدعاء

- حقوق النشر محفوظة -

الأستاذ عبد الحميد