



ثانوية : 18 فيفري - الحمادية -  
 ثانوية : بلعروسي بن يحي - الرابطة -  
 دورة : ماي 2019  
 المدة : 04 سا و 30 د

مديرية التربية لولاية البرج  
 امتحان تجريبي لباكوريا التعليم الثانوي  
 الشعبة : 3 رياضيات + تقني رياضي  
 اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- (I) 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $3^n$  على 10 .  
 2) استنتج باقي قسمة العدد  $A$  على 10 حيث :  $A = 2019^{2018} - 2017^{1440}$  .  
 3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $[10] \mid 3n \times 1439^n + 1037^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}$  .  
 4) استنتج قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون :  $[10] \mid 3n \times 1439^n + 1037^{2n+1} \equiv 0$  .  
 (II) 1) أحسب :  $PGCD(225; 180)$  .  
 2) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة :  $225x - 180y = 90$  .  
 3) نعتبر العددين الطبيعيين  $a$  و  $b$  حيث :  $a = 52^\alpha = 44^\beta$  ،  $b = 252^\alpha = 206^\beta$  ، عيّن  $\alpha$  ،  $\beta$  ثم  $a$  و  $b$  .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- 1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $Z$  :  
 $(E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$  ،  $\bar{z}$  هو مرافق العدد المركب  $Z$  .  
 أ) بيّن أنّ المعادلة  $(E)$  تكافئ المعادلة :  $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$  .  
 ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  .  
 2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  لواحقها  
 على الترتيب :  $z_A = -1$  ،  $z_B = 2 + i\sqrt{3}$  ،  $z_C = \bar{z}_B$  ،  $z_D = 3$  .  
 أ) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $(z_B - z_A)^n$  عددا حقيقيا سالبا .  
 ب) عيّن طبيعة المثلث  $ABC$  .  
 3) أ) أكتب العدد  $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$  على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقطة  $A$  صورة  $D$  بتحويل نقطي يطلب تعيينه .  
 ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ACD$  .  
 4)  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي لاحتقتها  $Z$  تحقق :  $z + 1 = 2\sqrt{3} \cdot k e^{i\frac{\pi}{6}}$  حيث  $k$  يمسح المجال  $[0; +\infty[$  .  
 - عين قياسا للزاوية الموجهة  $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$  ، ثم استنتج مجموعة النقط  $(\Gamma)$  .  
 5) أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث يكون :  $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$  .  
 ب) عيّن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث :  $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$  .  
 ج) استنتج مجموعة نقط تقاطع  $(E)$  و  $(\Gamma)$  .

### التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس

(1) نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا و في آن واحد .

- أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة كلها حمراء " .

B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .

C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .

D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

(2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها  $n$  كرة سوداء حيث :  $(n \geq 2)$  ثم نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

- نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي  $(-10)$  نقطة ، و سحب كرة سوداء يساوي  $(+5)$  نقطة .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .

(أ) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  ، ثم أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري .

(ب) عيّن قيمة  $n$  حتى تكون اللعبة مربحة .

### التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  مع  $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن :  $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$  .

(ب) أثبت أن الدالة  $f$  فردية ، ثم أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $f'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  .

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  فإن :  $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$  .

(3) (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - 1 + \frac{1}{2}x \right]$  ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

(ب) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  عند  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته .

(4) أرسم المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = 1 - \frac{1}{2}x$  و المستقيم  $(\Delta)$  ، ثم أنشئ المنحنى  $(C_f)$  .

(5) ليكن  $\lambda$  عددا حقيقيا موجبا تماما

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون :  $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

(ب) أحسب بالـ  $cm^2$  مساحة الحيز المستوي  $A(\lambda)$  المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(d)$  والمستقيمين ذو المعادلتين :

$x = \lambda$  و  $x = 0$  ، ثم أحسب  $A(\lambda)$  لما  $\lambda$  يؤول إلى  $+\infty$  .

(II) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بحدّها الأول  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$  .

(1) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n > 0$

(2) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$  .

(ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

(3) بيّن أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}$  فإن :  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

$$\left( \alpha \geq 2 \text{ عدد حقيقي} \right) \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\alpha} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n \end{cases} : n \in \mathbb{N}^*$$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

- (1) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $u_n > 0$ .
- (2) أ- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $n+1 - \alpha n \leq 0$ .
- ب- استنتج أن المتتالية  $u_n$  متناقصة. هل  $u_n$  متقاربة. علل.

$$(3) \text{ لتكن } v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كما يلي:}$$

- أ- برهن أن من أجل كل طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $v_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}$ .
- ب- أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ثم برهن أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$ .

$$(4) \text{ نعتبر المتتالية } s_n \text{ المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كما يلي: } s_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}u_k$$

- أ- أكتب  $s_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$ .

$$\text{ب- أوجد } \alpha \text{ علما أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n) = \frac{1}{2018}$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  من الفضاء ، نعتبر النقط  $A(1; -2; 2)$  ،  $B(1; 0; 1)$

و لتكن  $(s)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$  (s)

(1) برهن أن  $(s)$  سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) ليكن  $(P)$  المستوي الذي يعامد  $(AB)$  ويشمل النقطة  $E(1; 1; -1)$

أ- برهن أن معادلة المستوي  $(P)$  هي :  $2y - z - 3 = 0$ .

ب- برهن أن  $(P)$  يمر  $(s)$  في نقطة  $H$  يطلب تعيين إحداثياتها.

(3) ليكن  $(Q)$  المستوي الذي يمر  $(s)$  في النقطة  $B$

أ- برهن أن معادلة المستوي  $(Q)$  من الشكل :  $-2x + z + 1 = 0$ .

ب- برهن أن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يطلب إعطاء تمثيل وسيطي له.

(4) ليكن  $(Q_m)$  مستوي حيث :  $-2x + z + m = 0$  (Q<sub>m</sub>)

أ- عين حسب قيم  $m$  طبيعة المجموعة  $(s) \cap (Q_m)$ .

ب- برهن أن  $(Q_0)$  يقطع  $(s)$  وفق دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

$$(1) \text{ ليكن العددا المركبان } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث : } z_1 = \sqrt{2}(1-i) \text{ و } z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - z_1}$$

أ - أكتب العدد  $z_1$  على الشكل المثلثي و الشكل الاسي و  $z_2$  على الشكل الجبري.

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ،  $M$  و  $M'$  نقطتان لاحقتهما  $z$  و  $z'$  على الترتيب ؛ نضع  $z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  . نعتبر التحويل النقطي  $S$  الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ، النقطة  $M'$

$$\text{حيث : } \begin{cases} x' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$$

أ - بين أن العبارة المركبة للتحويل  $S$  هي من الشكل :  $z' = \sqrt{2}(1-i)z + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$  .

ب - استنتج الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل  $S$  .

ج -  $\Delta$  المستقيم ذو المعادلة  $x + y + 1 = 0$  ، أكتب معادلة لصورة المستقيم  $\Delta$  بالتحويل  $S$

(3) أ - أكتب العبارة المركبة للتحويل  $S \circ S$  . واستنتج طبيعته وعناصره المميزة.

ب - قارن بين العناصر المميزة للتحويلين  $S$  و  $S \circ S$  .

### التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I)  $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي :  $g(x) = x^2 + 2x - \ln(x + 1)^2$

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  واستنتج إشارة  $g(x)$  .

(II) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  حيث :  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln|x+1|}{x+1}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

أ - عين العددين الحقيقيين  $a; b$  بحيث يكون من أجل كل  $x \neq -1$  :  $f(x) = ax + \frac{b\ln|x+1|}{x+1}$

ب - بين أنه من أجل كل  $x \neq -1$  :  $f'(x) = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$

ت - أدرس تغيرات الدالة  $f$  .

ث - بين أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(D)$  يطلب تعيينه . ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$  .

(III) أ - برهن على وجود مماسين  $(T); (T')$  لـ  $(C_f)$  يوازيان  $(D)$  اكتب معادلتيهما .

ب - برهن أن النقطة  $\Omega(-1; -1)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .

ت - أنشئ :  $(D)$  ،  $(T); (T')$  ،  $(C_f)$  (الوحدة 2cm) .

ث - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمت :  $y = x$  ;  $x = 2$  ;  $x = \frac{-2}{3}$

ج - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  والمستقيمت  $(D_m)$  التي معادلاتها

$$y = x + m$$