

01-النهايات

جميع الشعب العلمية للسنة الثالثة ثانوي

3AS

Meziane
Maths

الأستاذ: مزيان محمد

f / Meziane Maths

12/10/2020

قائمة المحتويات

2	1	السلوك التقاربي لدالة
2	1	نهاية منتهية عند عدد حقيقي
2	2	نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي
3	3	نهاية منتهية عند مالا نهاية
3	4	نهاية غير منتهية عند مالا نهاية
4	2	المستقيمات المقاربة
4	1	المستقيم المقارب المائل
4	2	البحث عن المستقيم المقارب المائل
5	3	الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل
5	3	العمليات على النهايات
6	1	مبرهنات أولية على النهايات
6	2	نهاية مجموع دالتين
6	3	نهاية جداء دالتين
7	4	نهاية حاصل قسمة دالتين
9	4	نهاية دالة مركبة والنهايات بالمقارنة
9	1	نهاية دالة مركبة
10	2	حساب النهايات بالمقارنة
11	5	إزالة حالة عدم التعيين
11	1	باستعمال الإختزال
12	2	باستعمال التحليل
12	3	باستعمال المرافق
12	4	باستعمال العدد المشتق
15	6	تمارين محلولة

مستأذ : مزيان محمد

السلوك التقاربي لـ l

1

نهاية منتهية عند عدد حقيقي

1

تعريف

f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$ و l عدد حقيقي. القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0 .

مثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.
لدينا : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

2

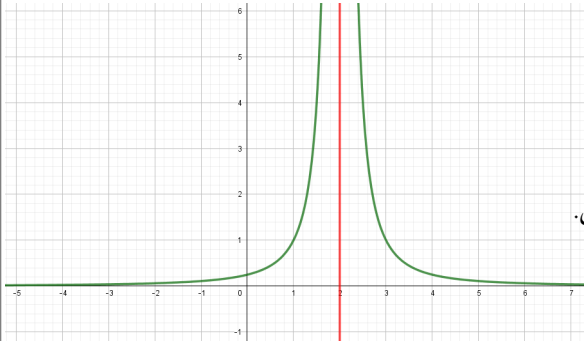
تعريف

f دالة معرفة على $]a; x_0[\cup]x_0; b[$ القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال $[A, +\infty[$ و $A \in \mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

نتيجة

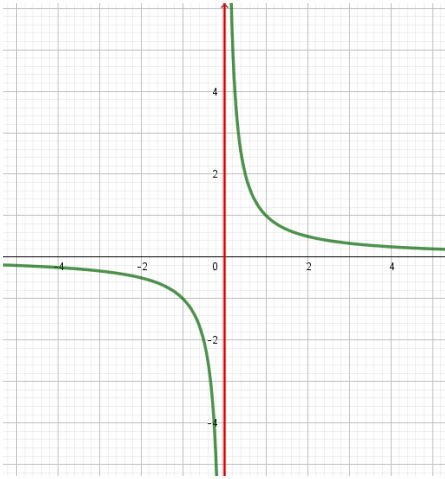
نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x = x_0$ مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة f

مثال 01



لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ (C_f) التمثيل البياني للدالة f .
يتضح جلياً أن $f(x)$ تأخذ قيمة كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2 بالقدر الكافي.
لدينا هكذا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

مثال 02



لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{x}$.
 نعتبر الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ المعرفتين على الترتيب على $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$ بـ $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$
 من الواضح أن $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty$
 نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين هي $+\infty$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

نهاية منتهية عند ما لا نهاية

3

تعريف

f دالة معرفة على $[x_0, +\infty[$ و l عدد حقيقي نقول ان نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

نتيجة

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة f

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

4

تعريف

f دالة معرفة على $[x_0, +\infty[$ [القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال $[A, +\infty[$ و $A \in \mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير قريب بالقدر الكافي من ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \leftarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

المستقيمات المقاربة

2

المستقيمات المقاربة

a و b عدنان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

إذا كانت النهاية للدالة f عند a هي $\pm\infty$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

إذا كانت النهاية للدالة f عند $\pm\infty$ هي b فإن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f)

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

المستقيم المقارب المائل

1

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

ملاحظة

إذا كانت f دالة بحيث $f(x) = (ax + b) + g(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$.

البحث عن المستقيم المقارب المائل

2

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب)، إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = a$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = a \text{ على الترتيب} \right)$$

الوضع النسبي لمنحنى والمستقيم المقارب المائل

3

الوضع النسبي لمنحنى والمستقيم المقارب المائل

f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن في نفس المستوى المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y = ax + b$ لمعرفة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x) - (ax + b)$ ثم ندرس إشارته أي

- إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان (حذاري فواصل التقاطع يجب أن تكون في D_f).

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي : $f(x) = x + 1 + \frac{5}{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم

1 المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{1-x} = 0$$

2 وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

العمليات على النهايات

3

نمايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



ملاحظات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $\sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

مبرهنات أولية على النهايات

1

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

نهاية مجموع دالتين

2

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$
L	L'	$L + L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

3

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$
L	L'	$L \times L'$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	ح ع ت

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
L	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$L' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$L' > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$L' < 0$	$+\infty$
0	0	ح ع ت
$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح ع ت

ملاحظة

تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين (ح ع ت)"
توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

خواص

- النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية جدها الأعلى درجة عند $+\infty$ و $-\infty$
- النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

مثال 01

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 + 3x^2$
 لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \end{cases}$
 ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ في هذه الحالة لا يمكننا استنتاج نهاية f لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x) = x^2(2x + 3)$
 وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 3) = -\infty \end{cases}$

مثال 02

لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$
 لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

تطبيق 01

أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

1 $D_f = \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 2x - 2$

2 $D_f = \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + x - 3$

3 $D_f = \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

الحل

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2) = +\infty$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

تطبيق 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

1 حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.

2 أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.

3 أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

الحل

الدالة f معرفة على : $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$

1 ندرس أولاً، حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$:

لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذرين هما -2 و 1 و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية نجد:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+	0	-	+

2 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$: فإن $x^2 + x - 2 > 0$ ، $x < -2$ من أجل $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + x - 2) = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x + 3) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$: فإن $x^2 + x - 2 < 0$ ، $-2 < x < 1$ من أجل $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + x - 2) = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 3) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$: فإن $x^2 + x - 2 < 0$ ، $-2 < x < 1$ من أجل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - 2) = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3) = 5$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$: فإن $x^2 + x - 2 > 0$ ، $x > 1$ من أجل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x - 2) = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \quad 3$$

نهاية دالة مركبة والنهايات بالمقارنة

4

نهاية دالة مركبة

1

مبرهنة

$f = g \circ h$ وتمثل أعداد حقيقية أو $\pm\infty$ و f, g, h دوال عددية حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g \circ h(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ إذا كانت

تطبيق 01

لتكن f الدالة المعرفة على $]1; +\infty[\cup]-\infty; -\frac{1}{2}]$ بـ: $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$.
حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث: $u(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{x}$ ($f = v \circ u$).
بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{2}$. نجد كذلك: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$.
بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} u(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = 0$.
بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

تطبيق 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$ ونريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث: $u(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$ ($f = v \circ u$).
بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(x) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

مبرهنة 1 (الحد من الأسفل)

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

مبرهنة 2 (الحد من الأعلى)

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

مبرهنة 3 (الحد من الحصر)

f ، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ ، و $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

ملاحظة

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة في حالتي: $x \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow a$ حيث a عدد حقيقي

تطبيق 01

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x + \sin x$
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه فإن:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$
بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تطبيق 02

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$
حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ أي $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$
لدينا: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ ومن أجل x من $]-\infty; 0]$ لدينا: $\frac{x}{2 + \sin x} \leq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
لدينا: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ ومن أجل x من $[0; +\infty[$ لدينا $\frac{x}{2 + \sin x} \geq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تطبيق 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
 نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$
 و بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

تطبيق 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2}$
 حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:
 نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
 و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$ أي: $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{\cos x}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$
 بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ فإن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

إزالة حالة عدم التعيين

5

بإستعمال الإختزال

1

إزالة حالة عدم التعيين بالإختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{0}{0} \text{ ح.ع.ت.}$$

إزالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2+1)}{(x-1)} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

إستعمال التحليل

2

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} = +\infty - \infty = \text{ح.ع.ت.}$$

إزالة حالة عدم التعيين

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - |x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[2 + \frac{1}{x} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}\right] = +\infty \end{aligned}$$

إستعمال المرافق

3

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = +\infty - \infty = \text{ح.ع.ت.}$$

إزالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

إستعمال العدد المشتق

4

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \text{ح.ع.ت.}$$

إزالة حالة عدم التعيين

العدد المشتق : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$
لدينا : $f(x) = \cos x$ و منه : $f'(x) = -\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = f'(0) = -\sin 0 = 0$$

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\quad}$

تطبيق القاعدة التالية :
عند الإنهاء : كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{\alpha x + \beta} = |x| \sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}}$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\quad}$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$$

$$a = \alpha$$

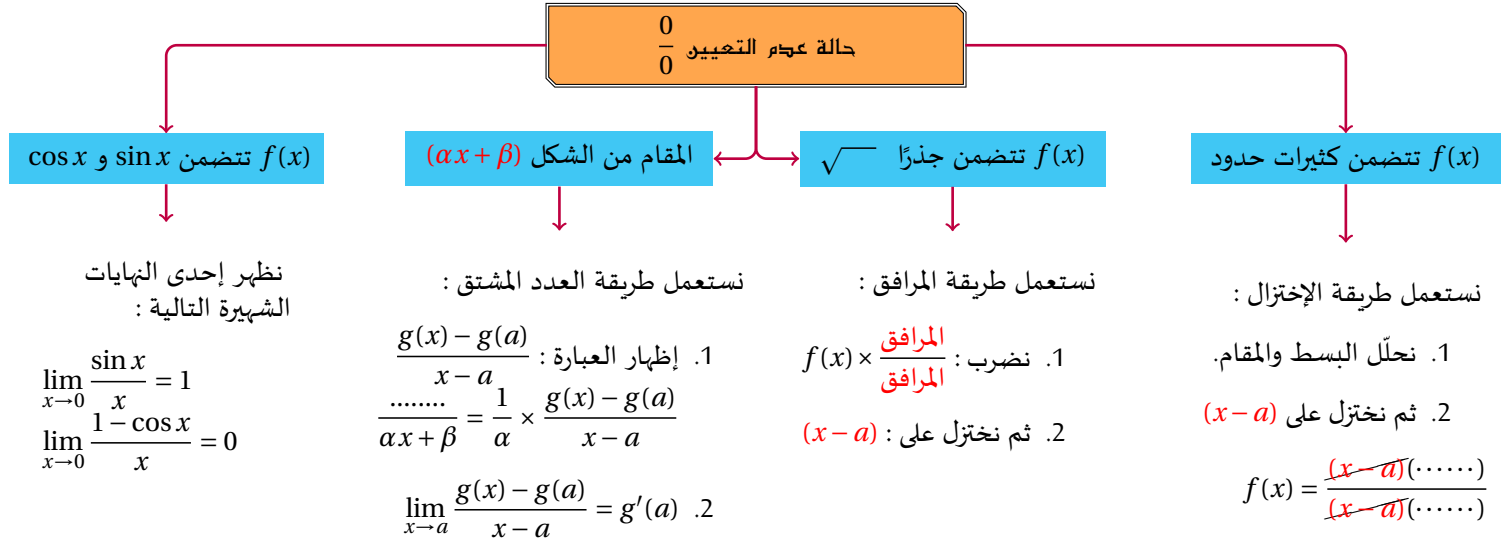
$$a \neq \alpha$$

$$\sqrt{a} = |\alpha|$$

$$\sqrt{a} \neq |\alpha|$$

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك



تطبيقات

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2}}{x} = -\sqrt{2}$ تكافئ : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ومنه $f(x) = \sqrt{4x^2-3} + 2x - 2$ تكافئ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} + (2x-2))(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}{(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{-4x} = -2$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{-2x(\sqrt{1}+1)}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2-3} - (2x-2)}$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ومنه $f(x) = \sqrt{4x^2-3} + x - 2$ تكافئ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + x - 2$$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} + x - 2$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right]$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ومنه $(+\infty - \infty, a = a)$ $f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2}$ تكافئ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2})(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}{(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}$$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2}}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = 0$

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ومنه $(+\infty - \infty, a \neq a)$ $f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$ تكافئ

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{4-3/x^2} - x\sqrt{9-2/x^2}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

6 $f(x) = \sqrt{2x-3} - 3x + 2$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} - 3x + 2 \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} - 3x + 2 \text{ تكافئ}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\sqrt{2} - 3]$$

$$(0/0) , \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ ومنه } f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4} \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ ومنه } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad 8$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad 9$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \text{ لحساب } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ يجب أن تكون}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4} \text{ ومنه } g'(1) = \frac{1}{4} \text{ ومنه } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \text{ ومنه } g(1) = 2 \text{ نجد } g(x) = \sqrt{x+3} \text{ ومنه بوضع } g(x) = \sqrt{x+3}$$

تمارين محلولة

6

التمرين 01

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} \quad 3$$

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 4}{x - 1} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} \quad 4$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad 2$$

الحل

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\text{ أي } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ ومنه } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} \quad \text{ لدينا : } f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \quad \text{ و } \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x+4) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x+4) = 7$$

2 لدينا : $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-5x+6 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $x^2-5x+6 = 0$ فنجد : $x = 2$ أو $x = 3$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2; 3\}$ أي : $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = -4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -\infty : \text{لأن} \begin{cases} x^2-4 \rightarrow 5 \\ x^2-5x+6 \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = +\infty : \text{لأن} \begin{cases} x^2-4 \rightarrow 5 \\ x^2-5x+6 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

3 لدينا : $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+4x+3 \neq 0\}$

نحل المعادلة $x^2+4x+3 = 0$ فنجد $x = -1$ أو $x = -3$ إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-3; -1\}$ أي : $D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-4)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-5}{2}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$3x^2 + 4x + 3$	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3} = +\infty : \text{لأن} \begin{cases} x^3+3x^2-4x-12 \rightarrow -6 \\ x^2+4x+3 \rightarrow 0^- \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty : \text{لأن } \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \rightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

4 لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$ $f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$

نحل المعادلة : $4x^2 - 4x - 3 = 0$ نجد : $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$ و منه : $D_f = -\left\{\mathbb{R} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

أي : $D_f = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^3+1}{2x-3} = \frac{\frac{3}{4}}{-4} = -\frac{3}{16}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 4x - 3$	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty : \text{لأن } \begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \rightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty : \text{لأن } \begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \rightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

التمرين 02

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}} \quad (1)$$



الحل

$$\begin{aligned} 1 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2x-4})(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+5-9)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})}{[x-(2x-4)](\sqrt{x+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})}{-(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}}{-(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{2+2}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+x-6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3)\sqrt{x-2} = 0$$

$$\begin{aligned} 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}][\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}]}{(x-1)[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-(2x-1)}{(x-1)[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1}+1]}{[\sqrt{x+1}-1][\sqrt{x+1}+1]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1}+1]}{(x+1)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1}+1]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

التمرين 03

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{4x^2+x}} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2+4}} \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x} \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2+x+1}}{-4x - \sqrt{x^2+1}} \quad 2$$

الحل

$$\begin{aligned} 1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{4x^2+x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x - \sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - \sqrt{x^2} \sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - x \sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}]}{x[1 - \sqrt{4+\frac{1}{x}}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1 - \sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \frac{2-1}{1-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{-4x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right]}{x \left[-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - 2}{-4 + 1} = 1
 \end{aligned}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - x][\sqrt{x^2 + 1} + x]}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(-\sqrt{x} + 1) = -\infty$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}][\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}]}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = 0$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{[-x - \sqrt{x^2 + 4}][-x + \sqrt{x^2 + 4}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - (x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{4} [-x + \sqrt{x^2 + 4}] = -\infty$$

التمرين 04

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \quad 1$$

الحل

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \times \cos x = 2$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 2$$

التمرين 05

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad 1$$

الحل

$$1 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع : $x - \frac{\pi}{2} = z$ أي $x = \frac{\pi}{2} + z$ لما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $z \rightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3z\right)}{-\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{3\pi}{2} \cos 3z - \sin \frac{3\pi}{2} \sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3z}{3z}}{\frac{-\sin z}{z}} = -3$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x}$$

بوضع : $x - \frac{\pi}{4} = z$ أي : $x = \frac{\pi}{4} + z$ لما $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ فإن $z \rightarrow 0$ وعليه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + z\right)}{1 + \cos 4\left(\frac{\pi}{4} + z\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2\left[\sin \frac{\pi}{4} \cos z + \cos \frac{\pi}{4} \sin z\right]^2}{1 + \cos(\pi + 4z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z\right)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2} (\cos z + \sin z)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 z + \sin^2 z + 2\sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + 2\sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\sin z \cos z}{1 - \cos 4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\sin z \cos z}{1 - (1 - 2\sin^2 2z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\sin z \cos z}{2\sin^2 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cos z}{(2\sin z \cos z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cos z}{4\sin^2 z \cos^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4\sin z \cos z} \end{aligned}$$

و عليه :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4\sin z \cos z} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4\sin z \cos z} = -\infty$$

3 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$

بوضع : $x - \frac{\pi}{2} = z$ نجد : $x = \frac{\pi}{2} + z$ لما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $z \rightarrow 0$ وعليه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + \sin z}{1 - \cos z - \sin z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2} + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{2\sin^2 \frac{z}{2} - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{z}{2} \left[\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2}\right]}{2\sin \frac{z}{2} \left[\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}\right]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

التمرين 06

تعتبر الدالة f : $f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1}$ تمثيلها البياني .

1 عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2 بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3 عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4 نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

* ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) .

الحل

1 مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ - النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = +\infty : \text{لأن } \begin{cases} x^2 + x - 4 \rightarrow -4 \\ x + 1 \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = -\infty : \text{لأن } \begin{cases} x^2 + x - 4 \rightarrow -4 \\ x + 1 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

2 تبين أنه يمكن كتابة على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ إذن :

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

$$f(x) = x - \frac{4}{x+1} : \text{إذن } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

3 تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ فإن $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب.

و بما أن : $f(x) = x - \frac{4}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x+1} = 0$ فإن $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4 دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ و منه : $f(x) - y = \frac{-4}{x+1}$ و منه : و بالتالي الوضع النسبي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

- ✍ إذن (C_f) لا يقطع (Δ) .
- ✍ لما $x \in]-\infty; -1[$ يقع فوق (Δ) .
- ✍ لما $x \in]1; +\infty[$ يقع تحت (Δ) .

التمرين 07

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1 بين أن المستقيم $y = x - 1$: (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

الحل

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و منه المستقيم $y = x - 1$: (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2 لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.
 $[f(x) - (x - 1)] = -\frac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $[f(x) - (x - 1)] < 0$.
 إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل (Δ) .

x	0	$+\infty$
$f(x) - y$		-
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)

التمرين 08

f دالة معرفة بالعلاقة : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$.

3 عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

الحل

1 حساب النهايات : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

2 حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(-x - \sqrt{x^2 + 1})}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

3 تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0$ فإن $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ فإن $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 09

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{4 + \sin x}{x^2}$.

1 عين عدداً حقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $a \leq 4 + \sin x \leq b$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون : $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ حيث u و v دالتان يطلب تعيينهما.

3 استنتج النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

الحل

1 تعيين a و b :

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه : $3 \leq 4 + \sin x \leq 5$

2 تبيان أن : $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$

لدينا : $3 \leq 4 + \sin x \leq 5$ وعليه : $\frac{3}{x^2} \leq \frac{4 + \sin x}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}$ ومنه : $\frac{3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2}$

3 استنتاج النهايات :

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \sin x}{x^2} = +\infty$

التمرين 10

f دالة معرفة بالعلاقة : $f(x) = \frac{(\alpha-1)x+1}{(\alpha^2-1)x-3}$ حيث α عدد حقيقي .

* احسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل

* حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$: $f(x) = -\frac{1}{3}$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

إذا كان : $\alpha^2 - 1 = 0$ و $\alpha - 1 \neq 0$ أي $\alpha + 1 = 0$ ومنه : $\alpha = -1$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

إذا كان : $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$$