

تقديم تشخيصي

التمرين الأول

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

(1) احسب $g(-1)$. ماذا تستنتج ؟

(2) عيّن الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث : $g(x) = (x + 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.

(3) إستنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$. حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(3) (ا) بيّن أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(5) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(6) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(7) انشئ بدقة المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

الجزء الثالث

h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$.

(1) اثبت أن الدالة h زوجية.

(2) اشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقاً من (C_f) .. ثم ارسمه في نفس المعلم.

الحزب الثاني

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}; D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) تبسيط الكسور على الشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

3) توصيف المقادير والمطابقة:

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$= \frac{ax^3 + ax + bx^2 + b + cx + d}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{ax^3 + bx^2 + (a+c)x + b+d}{x^2 + 1}$$

بالمطابقة مع عبارة الف الأول نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 & x^2 + 1 \\ \hline x^3 + x & x + 2 \\ \hline 2x^2 - x & \\ -2x^2 + 2 & \\ \hline -x - 2 & \end{array}$$

حل المسألة

$$g(x) = x^3 + 3x + 4; D_g = \mathbb{R}$$

1) حساب $g(-1)$

$$g(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$$

نستنتج أن (-1) جذر g .

2) تعيين α, β, γ حيث:

$$g(x) = (x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$g(x) = \alpha x^3 + (\beta + \alpha)x^2 + (\gamma + \beta)x + \gamma$$

بالمطابقة مع عبارة g الأولى نجد:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \alpha = 0 \\ \gamma + \beta = 3 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

$$\text{أي} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$g(x) = (x+1)(x^2 - x + 4)$$

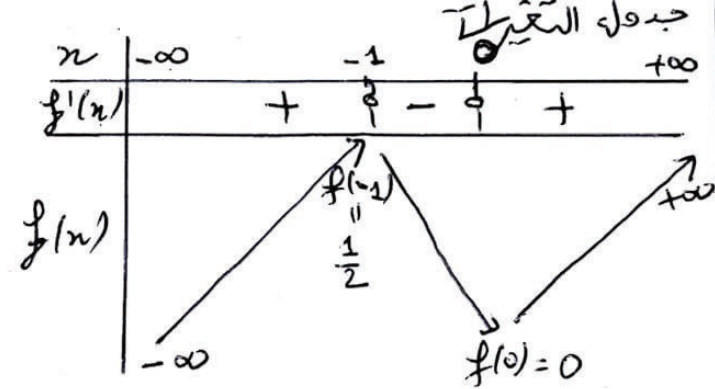
3) باستنتاج إشارة g في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+
$x^2 - x + 4$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(4) = 1 - 16 = -15 < 0$$

$$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$$

لا يوجد حلول.



$$f(x) = x + 2 + \frac{-x - 2}{x^2 + 1}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

(3) - تبيان أن

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، والحق

(4) تبيان أن $y = x + 2$ ، $P.P.P(D)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x} = [0]$$

إذاً $y = x + 2$ ، $P.P.P(D)$ لأن $(-\infty)$ و $(+\infty)$ حيار

(ك) الوضع السليم بين (f) و (D)
(ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

$$f(x) - y = \frac{-x - 2}{x^2 + 1}$$

الاشارة من اشارة البسط لأن المقام موجب دائماً

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-x - 2$	$+$	$-$	$-$
$f(x) - y$	$+$	$-$	$-$
الوضع السليم	(ف) حوق (D)	(ف) حوق (P)	(ف) أعنت (D)

(ك) تقاطع (f) مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x) = 0$ أي

$$x^3 + 2x^2 = 0 \quad \text{أي} \quad \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 + 4x^3 + 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 4)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

ب. اتجاه تغير الدالة f :

بإشارة f' من إشارة البسط لأن

المقام موجب دائماً

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x		$-$	$-$	$+$
$g(x)$		$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

كما $[+\infty, 0] \cup [-1, -\infty]$ الدالة f' موجبة

لذلك f متزايدة عملياً

لما $x \in [-1, 0]$ الدالة f' سالبة

لذلك f متناقصة عملياً

$h(-x) = \frac{1}{x} (1-x) = \frac{1}{x} (|x|) = h(x)$ *
 إذن h دالة زوجية .
 باستنتاج (C_h) نلاحظ أن (f) :
 كما $x \geq 0$; $h(x) = f(x)$ أي أنه
 (C_h) منطبق على (f) .
 كما $x \leq 0$; $h(x) = f(-x)$ وبالتالي
 (C_h) هو منظر (f) بالنسبة لمحور
 الترتيب .

$x+2=0$ أو $x^2=0$ ، منه $x^2/(x+2)=0$ أو
 $x=0$ أو $x=-2$

ومنه (f) يقطع حامل محور التعداد في
 النقطتين $O(0,0)$ و $A(-2,0)$

الرسم :
 الجزء الثالث :

$$h(x) = \frac{1}{x} (|x|)$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

أ تبيان أن h دالة زوجية
 * $D_h = \mathbb{R}$ مجال متناظر بالنسبة للمحور

أي أنه إذا كان $x \in D_h$ فإن $(-x) \in D_h$

