

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- (1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .
- (2) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $225x - 180y = 90$ (1) .
أ. بيّن أنّ المعادلة (1) تكافئ المعادلة : $5x - 4y = 2$ (E)
ب. بيّن أنّ المعادلة (1) تقبل حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ثمّ حل المعادلة اذا علمت أن الثنائية (2; 2) حل خاص لها .
ج. عيّن الثنائيات (x; y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $|x + y - 1| < 7$.
- (3) N عدد طبيعي يكتب 52 في النظام ذي الأساس α ، و 44 في النظام ذي الأساس β حيث : $\alpha < 10$ -
عيّن α و β ، ثمّ أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$.
- (1) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.
 - (2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $1 < u_n \leq 2$.
 - (3) حدد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة .
 - (4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3 + \frac{1}{u_{n-1}}$.
أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.
 - (5) أ. تحقق من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أنّ : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
ب. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{8} + \frac{u_3}{15} + \dots + \frac{u_n}{n(n+2)}$. حيث : $n \in \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

- يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام -1 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام -2 ، 0 ، 1 ، 2 . الكريات كلها متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد من الكيس .
- (1) نعتبر الحدثين : A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " ،
B : " الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم "

أ. أحسب $P(A)$ احتمال الحدث A و $P(B)$ احتمال الحدث B .

ب. بيّن أن $P(A \cap B) = \frac{3}{28}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .
أ. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

ب. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X + 2023)$.

(3) نعيد الكيس الى وضعه الأول ثم نسحب منه ثلاث كريات على التوالي مع الارجاع .
- أحسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها سالب تماما .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2 - x)e^x + 2$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (كما في الشكل)

(1) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :
 $2,21 < \alpha < 2,22$.

(2) بقراءة بيانية عيّّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر بيانيا نتيجة النهاية الأخيرة .

(2) أ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

ج. بيّن أنّ $f(-\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ ثم أعط حصرا للعدد $f(-\alpha)$

(3) أ. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1,1 < \beta < 1,2$.

ب. حل في المعادلة $E(f(x)) = 0$ حيث E هي دالة الجزء الصحيح .

(4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x^2 \mapsto x$ على $\mathbb{R}$.

أ. بيّن أنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب. أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(5) أنشئ و (C_f) . (تعطى : $f(-\alpha) \approx 0.48$)

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x^2 + \ln(m)$.

(7) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \leq f(x) \leq x^2$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}$ الذي يمثل مساحة الحيز

المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

نريد تشكيل فرقة استكشاف للبرية تضم 3 أعضاء منهم قائد ومسعف و ومقتفي أثر ، من بين أربع رجال H_1 ، H_2 ، H_3 و H_4 و 3 نساء F_1 ، F_2 و F_3 .

(1) أحسب احتمال كل حدث من الحوادث التالية :

A : " كل أعضاء الفرقة رجال " B : " الفرقة تضم على الأكثر امرأة " C : " H_1 هو المسعف في هذه الفرقة "

(2) بين أن : $P(B \cap C) = \frac{24}{210}$.

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل فرقة بحث عدد الرجال فيها .

أ. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي .

ب. أحسب احتمال الحدث : " $|X| < 2$ " .

ج . أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني : (05 نقاط)

(1) أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كلا من 2^n و 3^n على 5 .

ب. عيّن باقي قسمة $1444^{2023} + 2023^{1444}$ على 5 .

(2) نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$v_n = u_n - 2^n \text{ و } \begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2^n$

ب. بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ج. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3^n + 2^n$.

(3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n \equiv 0[5]$.

(4) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد u_n فردي .

(5) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون رقم آحاد u_n هو 3 .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{v}; \vec{u}; 0)$. النقط A ، B و C لواحقها:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} , z_B = 1 - i\sqrt{3} \text{ و } z_C = z_A e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ على الترتيب .}$$

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة z المعادلة ذات المجهول $z^2 - 2z + 4 = 0$.

(2) أحسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$ ثم استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(3) أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

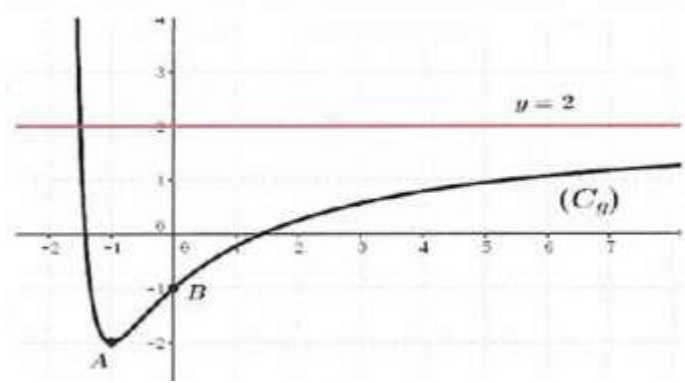
ب. أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .

(4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما ثم اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2024}$ على الشكل الجبري .

(5) عيّن مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|\frac{iz-\sqrt{3}-i}{\bar{z}}\right| = 1$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. التمثيل البياني (C_g) المقابل هو لدالة g معرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \frac{ax^2+bx+c}{(x+2)^2}$.



(C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 2$ عند $+\infty$

ومماسا أفقيا في النقطة $A(-1; -2)$ ويشمل النقطة

$B(0; -1)$.

(1) باستخدام المقارب عند $+\infty$ أثبت أنّ : $a = 2$ ثم بيّن

أنّ : $b = 0$ و $c = -4$.

(2) أدرس حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]-2; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = 2x + 4 - 8\ln(x+2) - \frac{4}{x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

(1) أ. أثبت أنّ الدالة f أصلية للدالة g على المجال $]-2; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب. باستعمال النهاية $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)\ln(x+2) = 0$ أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا .

ج. باستعمال النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} = 0$ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ. بيّن أنّ المستقيم (d) ذي المعادلة $y = -2x - 4$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-1; -2)$.

ب. أدرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ ب : $h(x) = f(x) - (-2x - 4)$.

ج. أحسب $h(-1)$ ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (d) .

(3) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $7 < \alpha < 7,1$.

(4) أنشئ (C_f) و (d) على المجال $]-2; \alpha]$.

(5) نعتبر التكامل : $I = \int_0^1 h(x) dx$.

أ. بيّن أنّ الدالة $x \mapsto (x+2)\ln(x+2) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+2)$ على المجال $]-2; +\infty[$.

ب. أحسب العدد I ثم فسر النتيجة هندسيا .

انتهى الموضوع الثاني .