



7

seven
DAYS
maths

14

تمرين محلول من بكالوريا اجنية

شعبان أسامة

حساباتي عبر منصلي التواصل الاجتماعي:



5min maths

www.dzexams.com

نسخة 2021 - تلمسان - 0675302299



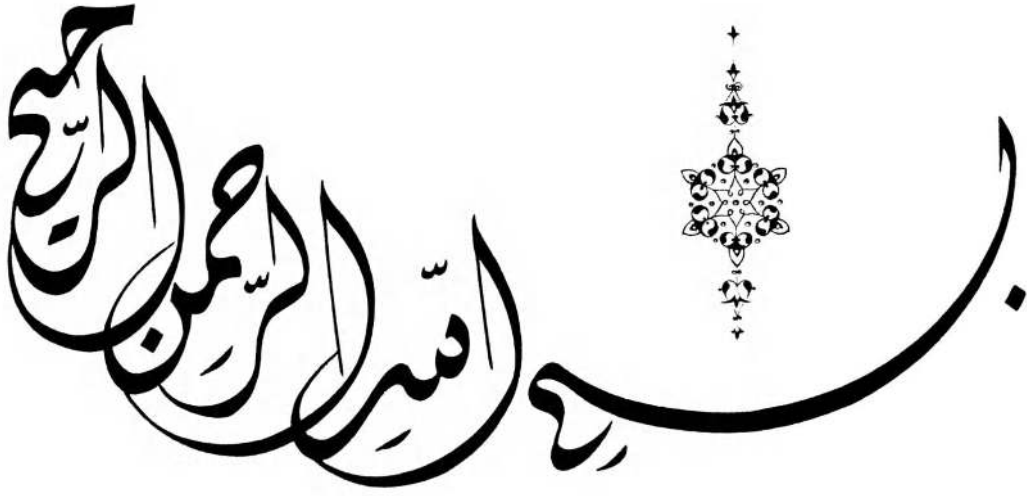
Super fan

عبد الفتاح بوقفة

عدد سكان الأرض هو حوالي 7874965825 ،

تجاهل كلامهم السليبي مثلما تجاهلت عددهم و

ستكون أسعد 😊



تجدون في هذا العمل 14 تمرين اجنبى مترجم مع حل مقترح لول مأخوذة من
بكالوريات اجنبية تم تداولها في فترة العطل الشتوية.

على صفحة الأستاذ شعبان أسامة الرسمية (min Maths 5)

و هذا على شكل تحدي كل يوم تمرينين بالحل.

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

وثانيا لجميع محبي المادة



Chabane Oussama



Bac TOGO 2009

دالة لوغاريتمية

التمرين الأول

وحدة الانجاز 01

الجزء أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x \ln(x) - x + 1$ و (C) التمثيل

البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. ليكن $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في المعلم السابق.

أ- بين أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e .

ب- بين أنه من أجل كل x من $[1; e]$ ، $x \ln(x) - x + 1 \leq \ln(x)$.

3. أ- مستعينا بالتكامل بالتجزئة أحسب J حيث $J = \int_1^e (x-1) \ln(x) dx$.

ب- استنتج المساحة ب cm^2 مساحة الجيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ والمستقيمات ذات المعادلة: $x=1$ و $x=e$.

الجزء ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln(x)$.

1. جد نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$.

2. عين اتجاه تغير الدالة ثم f شكل جدول تغيراتها (لاحظ أنه يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$).

3. أرسم المنحنى الممثل للدالة f .

4. بين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$.

الجزء ج- نعتبر الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1. بين أن α حل للمعادلة: $h(x) = x$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة h .

3. نضع $I = [3; 4]$ بين انه من أجل كل عنصر x من I ، $h(x) \in I$.



Bac TOGO 2001

دالة أسية

التمرين الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة بالشكل: $f(x) = 2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)}$ و (C) التمثيل الباني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الرسم: 1cm)

الجزء أ- 1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. بين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(e^x - 1)}$.

3. احسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

4. أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = 2x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

الجزء ب- 1. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$.

2. أ- احسب $f'(x)$ (الدالة المشتقة للدالة f)

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0; +\infty[$.

3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) على المجال $]0; +\infty[$.

4. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

الجزء ج- ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 ونعرف العدد I_n حيث: $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left[\frac{e^x}{e^x - 1} \right] dx$

1. بين أن: $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$.

ب- احسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ و $\lim_{n \rightarrow 1} I_n$.

2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$ احسب S_n .

3. أ- احسب $A(n)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات ذات المعادلة: $y = 2x + \frac{1}{2}$ ، $x = \ln 2$ و

$$x = \ln(n+1)$$

ب- عين نهاية $A(n)$ من أجل n يؤول الى عدد كبير بالقدر الكافي.



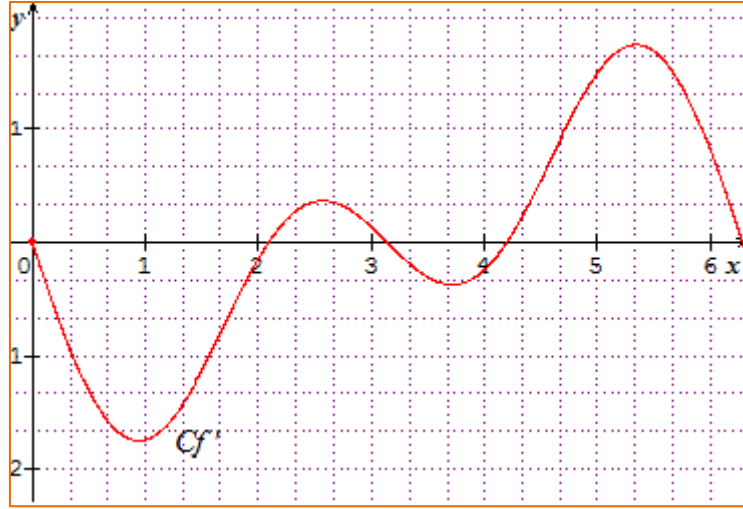
Bac France

دالة مثلثية

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; 2\pi]$ كما يلي : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى الممثل للدالة f' (الدالة المشتقة للدالة f) .

مدة الانجاز 45د



1.أ- أوجد الدالة المشتقة f' للدالة f .

ب- باستعمال العلاقة التالية : $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ ،

بين انه من أجل كل x من $[0; 2\pi]$ ، $f'(x) = -\sin(x)[1 + 2 \cos(x)]$.

2. حل في المجال $[0; 2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1 + 2 \cos(x)] = 0$.

3.أ- عين اشارة $f'(x)$ على المجال $[0; 2\pi]$.

ب- مستعينا بالنتائج السابقة شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2\pi]$.

4. أرسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[0; 2\pi]$ في المعلم السابق.



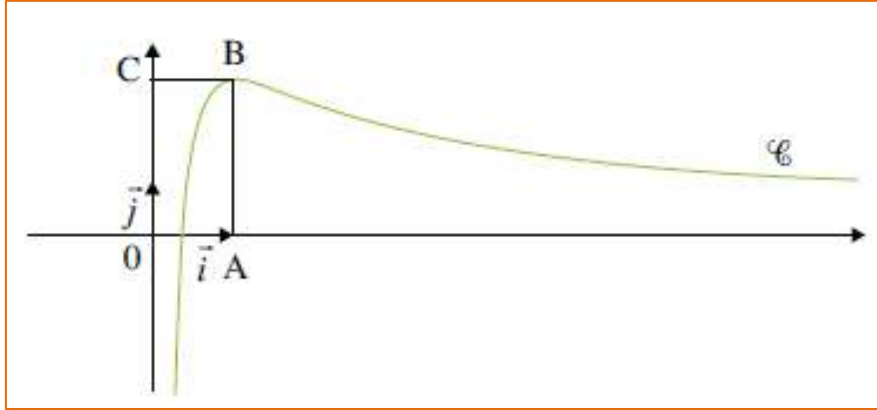
Bac FRANCE-Métropole 2013

دالة لوغاريتمية

التمرين الرابع

في الشكل الموضح أسفله رسمنا في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (C) الممثل للدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$. لتكن النقط $A(1;0)$ ، $B(1;2)$ و $C(0;2)$ ،

المنحنى (C) يشمل النقطة B والمستقيم (BC) مماس المنحنى (C) في النقطة B .



a و b عدنان حقيقيا موجبان حيث من أجل كل متغير حقيقي x موجب تماما، $f(x) = \frac{a+b\ln(x)}{x}$.

1. أ- بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

ب- تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$.

ج- استنتج قيمتي العددين a و b .

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $x \mapsto -\ln(x)$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- احسب نهايتي الدالة f . (يمكنك ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$).

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; 1]$.

ب- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1; +\infty[$. حيث $n < \beta < n+1$ و n عدد طبيعي يطلب تعيينه.



Bac LIBAN- Juin 2004

دالة أسية

التمرين الخامس

وحدة الأجزاء 1 ساعة

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. احسب، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) + f(-x)$ ماذا يمكن ان نقول عن النقطة $(0; 1 + \ln 4)$.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f .

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة $f(x) = m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب- عين حصر سعيته 10^{-1} للعدد α حل المعادلة $f(x) = 3$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x) = m$.

5. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ،

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + \ln 4$ والمستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C)

6. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) .

7. نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

ماذا يمثل التكامل التالي: $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x - \ln 4] dx$ ؟

ب- بين أن $I(\alpha) = 2 \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right)$.

ج- احسب α من أجل $I(\alpha) = 1$.

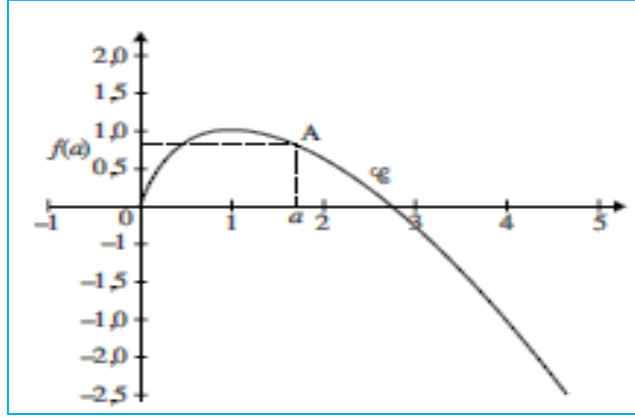


Bac FRANCE-Métropole 2010

دالة لوغاريتمية

التمرين السادس

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x(1 - \ln(x))$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى (C) الممثل للدالة f



وحدة الانجاز 45د

1. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$).

3. أحسب $f'(x)$.

ب- عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. ليكن a عدد حقيقي موجب تماما نعتبر المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a .

احسب بدلالة a إحداثيتي النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور الترتيب.

5. لتكن $A(a)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفاصل والمستقيمت ذات المعادلة: $x=a$ و $x=e$.

احسب $A(a)$ من أجل $a < e$



Bac MAROC 2020

دالة أسية

التمرين السابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$ و (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

وحدة الانجاز 45د

2.أ-برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة $e^{x-2} - 4 = 0$ ثم بين أن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ وتحت (Δ) على المجال $[2 + \ln 4; +\infty[$.

3.بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

4.أ-بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f

5. ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

6.بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

7.أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2 \approx 0,7$ ، $\ln 3 \approx 1,1$).



Bac MAROC 2020

دالة لوغاريتمية

التمارين الثامن

وحدة الانجاز 40 د

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي: $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$.

1.أ-بين أن لكل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

ب-بين أن الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ج-استنتج أن لكل x من المجال $[1; +\infty[$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$. لاحظ أن: $(2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x})$.

د-بين أنه من اجل كل x من $[1; +\infty[$ ، $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

2.أ-بين أن الدالة G المعرفة بما يلي: $G(x) = x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0; +\infty[$.

ب-احسب التكامل $\int_1^4 g(x) dx$.

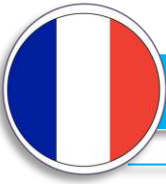


Bac MAROC 2021

دالة أسية

التمرين التاسع

مدة الانجاز 35د

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ ب- حل في المتراجحة: $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$ ج- أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$ 2. بين أن المعادلة: $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ تقبل حلا في المجال $[-1; 0]$.

Bac FRANCE

دالة عددية

التمرين العاشر

مدة الانجاز 55د

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$ و $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 1. بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة.2. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.3. أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha \in]0; 1[$.ب- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.4. شكل جدول تغيرات الدالة f .5. لتكن النقطتين $I \left(-1; -\frac{1}{3} \right)$ و $J(1; 1)$.أ- بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J .ب- عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T) .6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C). (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.8$)7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$.8. أحسب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$, $y = 0$ و $x = e$.



Bac TUNISIE 2014

دالة أسية

التمرين الخامس عشر

1. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$ و (C_f) التمثيل الباني الممثل للدالة f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ ، ثم استنتج أن الدالة f فردية.

2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ، وأعط جدول تغيرات الدالة f .

ب- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.

4. بن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x \right] = 0$ فسر بيانها.

5. انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته: $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .

في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته: $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .



Bac Liban juin 2010

دالة عددية

التمرين الثاني عشر

1. لتكن u الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. أ- احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة u .

2. بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ يطلب تعيين حصره سعته 10^{-2} .

3. عين حسب قيم x إشارة $u(x)$.

4. بين أن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

1. احسب من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

مدة الانجاز 35 د

مدة الانجاز 55 د

2. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

III. ليكن في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ .

1. نعتبر النقطة $A(0; 2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعلاقة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2. لتكن g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب- بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياتها.

ج- بين أن: $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟



Bac Antilles Guyane FRANCE-2012

المثلثات

التمرين الثالث عشر

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم}$$

1. احسب u_2, u_3, u_4 .

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n موجبة تماما.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n) .

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{2^n}$.

4. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

أ- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

Bac Amérique du Sud Novembre 2013

الماتلابات

التمرير الرابع عشر

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{1-x}$.

1. بين أنه من أجل كل x عدد حقيقي، $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$ عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ونعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$$h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} \quad \text{و} \quad g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

3. نضع $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$:

أ- احسب بدلالة n المجموع S_n ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

الجزء أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x \ln(x) - x + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = \ln(x) + x \left(\frac{1}{x} \right) - 1 = \ln(x)$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث

ومنه

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$ و متناقصة تماما على $[1; +\infty[$.

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - x + 1 = 1$$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ نهاية شهيرة.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

جدول تغيرات g :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	1	0	$+\infty$

لدينا $g(1) = 0$ (يمكن أن نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة g أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل $x > 0$)

2.

أ- اثبات أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e .

نقوم بحل المعادلة:

$$x \ln(x) - x + 1 = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(x) - x + 1 - \ln(x) = 0 \text{ أي } g(x) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x) - 1)(x - 1) = 0$$

تكافئ: $\ln(x) - 1 = 0$ و $x - 1 = 0$ و عليه $x = e$ و $x = 1$.

ومن المنحنين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e .

ب-بين أنه من أجل كل x من $[1; e]$ ، $x \ln(x) - x + 1 \leq \ln(x)$.

$x \ln(x) - x + 1 \leq \ln(x)$ تكافئ $x \ln(x) - x + 1 - \ln(x) \leq 0$ و عليه نحل المتراجحة $(\ln(x) - 1)(x - 1) \leq 0$.

x	0	1	e	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	
$\ln(x) - 1$		-	0	+
$(\ln(x) - 1)(x - 1)$	+	0	- 0	+

ومن نلاحظ أن من أجل x من $[1; e]$ ، $(\ln(x) - 1)(x - 1) \leq 0$.

$$J = \int_1^e (x - 1) \ln(x) dx \text{ بالتكامل بالتجزئة :}$$

$$\text{نضع } v(x) = x - 1 \text{ و بالتالي } v'(x) = 1 \text{ و } u(x) = \ln(x) \text{ و عليه } u'(x) = \frac{1}{x}.$$

اذن J يصبح

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (x - 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{x}{x} \right) dx \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

اذن: و عليه

$$J = \int_1^e (x - 1) \ln(x) dx = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \text{ : بالتالي}$$

ب. مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ والمستقيمات ذات المعادلة : $x=1$ و $x=e$.

لدينا المنحنى (C) يقع تحت المنحنى $(C_{\ln})$ من أجل كل x من $[1; e]$ وبالتالى نسي S مساحة الحيز.

$$\begin{aligned} S &= \left(\int_1^e \ln(x) - g(x) dx \right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \left(\int_1^e \ln(x) - x \ln(x) + x - 1 dx \right) 4 \\ &= \left(\int_1^e -\ln(x)(x-1) + x - 1 dx \right) 4 \\ &= \left(\int_1^e -\ln(x)(x-1) dx + \int_1^e x - 1 dx \right) 4 \\ &= \left(-J + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e \right) 4 \\ &= -4J + \left(\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + 1 \right) 4 \\ &= -4 \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) + 2e^2 - 4e + 2 \\ &= -e^2 + 3 + 2e^2 - 4e + 2 \\ S &= e^2 - 4e + 5 \quad \text{ومنه} \quad S = e^2 - 4e + 5 \end{aligned}$$

الجزء ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ الشكل : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln(x)$.

1. نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

(نرفع ح ع نت باستعمال العدد المشتق).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

2. اتجاه تغير الدالة ثم f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1} \ln(x) \right)' = \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x\ln(x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$$

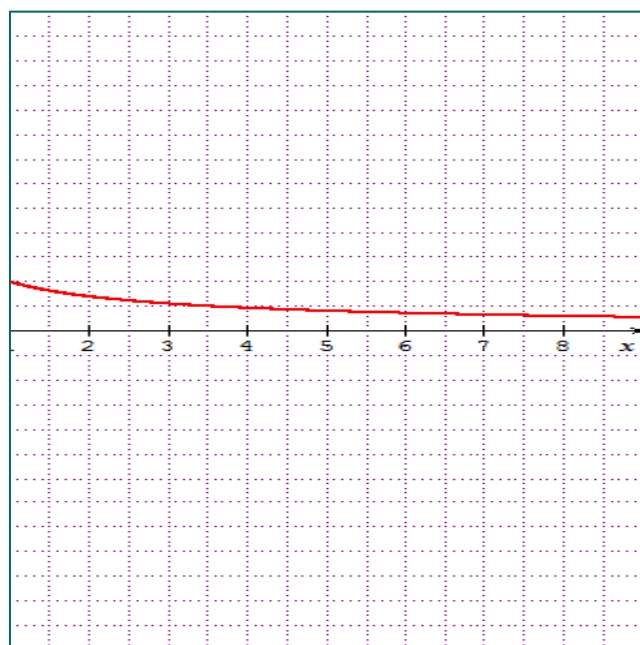
اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة $-g(x)$. وعليه:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	

وبالتالي للدالة f متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f(x)$	1	$\rightarrow 0$

3. رسم المنحنى الممثل للدالة f .



4. اثبات أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما على $[1; +\infty[$).

حيث: $\frac{1}{2} \in [0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ ولدينا $f(3.5) \geq \frac{1}{2}$ و $f(3.6) \leq \frac{1}{2}$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$.

الجزء - ج نعتبر الدالة h المعرفة على $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1. α حل للمعادلة: $h(x) = x$ تكافئ $h(\alpha) = \alpha$

لدينا $h(\alpha) = \ln(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$(1) ونعلم أن α حل للمعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ أي $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - 1} \ln(\alpha) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \ln(\alpha) &= \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow \ln(\alpha) &= \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(1) \dots \dots \dots h(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

نعوض هذه النتيجة في العبارة (1) نجد:

2. أدرس اتجاه تغير الدالة h .

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ حيث $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

من أجل كل x من $[1; +\infty[$ لدينا $h'(x) > 0$ وعليه الدالة h متزايدة تماما على $[1; +\infty[$.

3. نضع $I = [3; 4]$ بين أنه من أجل كل عنصر x من I ، $h(x) \in I$

لدينا $3 \leq x \leq 4$ أي أن

$$\left. \begin{array}{l} \ln 3 \leq \ln(x) \leq \ln 4 \\ 2 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} \end{array} \right\} \ln 3 + 2 \Rightarrow \ln(x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leq \ln 4 + \frac{5}{2}$$

$$3 \leq h(x) \leq 4$$

$$\Rightarrow h(x) \in I$$

2.

1. لتكن f المعرفة بالشكل: $f(x) = 2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)}$

1. تعين D_f مجموعة تعريف الدالة f : الدالة f من أجل: $2(e^x - 1) \neq 0$ ومنه $e^x - 1 \neq 0$ وعليه $x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1$. إذن $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

2. بين أنه من أجل كل x من D_f ،

$$2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(e^x - 1)} = 2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \quad \text{أي نوجد المقامات}$$

$$= f(x)$$

3. نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} = +\infty \quad \text{بعد راسة إشارة المقام.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{2e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = +\infty$$

4. المستقيم (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} - \left(2x + \frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = 2x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= 0$$

(C) بجوار $+\infty$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) وللمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$ نجد أن الإشارة من إشارة العبارة $\frac{1}{e^x - 1}$ أي $e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقع فوق (Δ)	

1. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$.

نضع $t = e^x$ وبالتالى المتراجحة تصبح $2t^2 - 5t + 2 > 0$ و $t_1 = 2$ و $t_2 = \frac{1}{2}$.

تكافئ $x_1 = \ln t_1 = \ln 2$ و $x_2 = \ln t_2 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ ومنه

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 5e^x + 2$	+	0	-	+

وبالتالى حلول المتراجحة $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ هي المجال $]-\ln 2; \ln 2[$.

2. أ- احسب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2e^{2x} + 2 - 4e^x - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

ومنه

ب- اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي: $2e^{2x} - 5e^x + 2$ (تم مناقشة اشارتها في السؤال السابق).

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\ln 2; +\infty[$.

و متناقصة تماما على المجال $]0; \ln 2]$.

جدول تغيرات f .

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\ln 2)$	$+\infty$

حيث $f(\ln 2) = 2 \ln(2) + 1 = 1 + \ln 4$

3. ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C) على المجال $]0; +\infty[$.



4. ناقش بياننا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$ هس فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + m$.

من أجل $m \leq \frac{1}{2}$ لا يوجد حلول.

من أجل $m > \frac{1}{2}$ يوجد حل واحد.

الجزء ج- ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و نعرف العدد I_n حيث: $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left[\frac{e^x}{e^x - 1} \right] dx$

1-أ. حساب العدد I_n ك:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left[\frac{e^x}{e^x - 1} \right] dx = \left[\ln(e^x - 1) \right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \\
 &= \ln(e^{\ln(n+1)} - 1) - \ln(e^{\ln(n)} - 1) \\
 &= \ln(n+1-1) - \ln(n-1) \\
 &= \ln(n) - \ln(n-1) \\
 &= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)
 \end{aligned}$$

أي

ب- احسب النهايات التالية:

$$\lim_{n \rightarrow 1} I_n = \lim_{n \rightarrow 1} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0 \text{ و}$$

2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$. حساب S_n .

$$\begin{aligned}
 S_n &= I_2 + I_3 + \dots + I_n \\
 &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-1}\right) \\
 &= \ln(n)
 \end{aligned}$$

حسب الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتم

3.أ- حساب $A(n)$ مساحة الجيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات ذات المعادلة: $y = 2x + \frac{1}{2}$ ، $x = \ln 2$ و $x = \ln(n+1)$

على المجال $[\ln 2; \ln(n+1)]$ بالمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) اذن

$$\begin{aligned}
 A(n) &= \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} [f(x) - y] dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \left[2x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} - 2x - \frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \left[\frac{e^x}{2(e^x - 1)} - \frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \left[\frac{e^x}{(e^x - 1)} - 1 \right] dx \\
 A(n) &= \frac{1}{2} \left[\ln(e^x - 1) - x \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(e^{\ln(n+1)} - 1) - \ln(n+1) \right] - \frac{1}{2} \left[\ln(e^{\ln(2)} - 1) - \ln(2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} [\ln(n) - \ln(n+1)] + \frac{1}{2} \ln 2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

و منه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}) : A(n) \text{ ب- عين نهاية}$$

لدينا الدالة f المعرفة على $[0; 2\pi]$ كما يلي : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1$.

أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; 2\pi]$ حيث

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - 2 \frac{1}{2} \sin(2x) \\ &= -\sin(x) - \sin(2x) \quad \text{ومن ثم} \\ &= -[\sin(x) + \sin(2x)] \end{aligned}$$

نذكر هنا أنه علينا استعمال مشتق مركب دالتين: $[(f \circ g)(x)]' = g'(x) \times f'(g(x))$

ب- لدينا $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ بالتعويض في ما سبق نجد

$$\begin{aligned} f'(x) &= -[\sin(x) + \sin(2x)] \\ &= -[\sin(x) + 2 \sin(a) \cos(a)] \end{aligned}$$

أي

2. حل في المجال $[0; 2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1 + 2 \cos(x)] = 0$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sin(x) &= 0 \\ [1 + 2 \cos(x)] &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos(x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi \end{cases} \\ S &= \left\{ 0; \frac{2}{3}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; 2\pi \right\} \end{aligned}$$

3. أ- اشارة $f'(x)$:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π				
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2\pi]$. لدينا :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π				
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	2,5				0,5				2,5

$$f(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} \cos 0 + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5;$$

$$f(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2} \cos(2\pi) + 1 = -1 + \frac{1}{2} + 1 = 0,5;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} = 0,25.$$

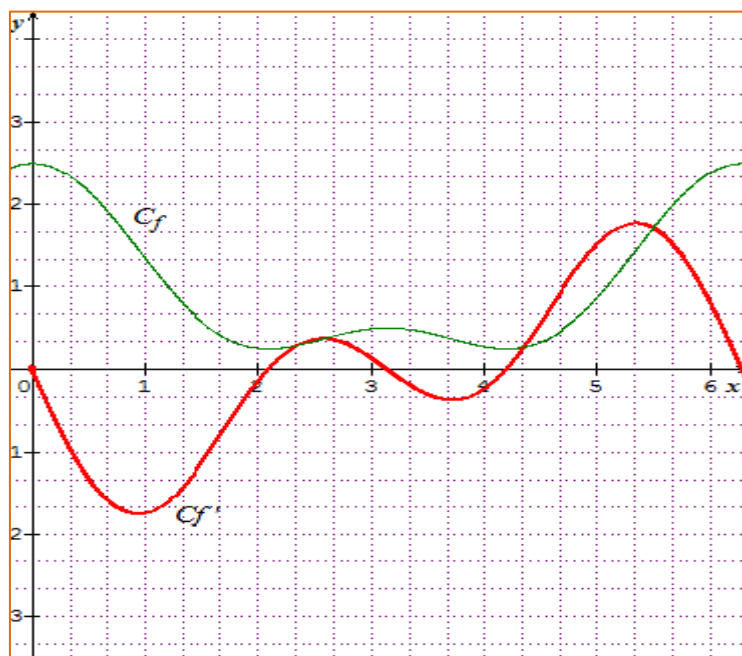
$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + 1$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0,25.$$

$$f(2\pi) = \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cos(4\pi) + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5.$$

4. رسم المنحنى الممثل للدالة f : نستعين بقيم مساعدة من أجل دقة الرسم:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,5	1,3	0,3	0,5	0,3	0,9	2,4



1. أ- بقراءة بيانية بما أن المنحنى (C) يشمل النقطة B فإن نجد $f(1) = 2$.

و $f'(1)$ هو معامل توجيه مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة 1 أي النقطة B. نلاحظ أن المماس يوازي محور الفواصل و بالتالي معامل توجيهه يساوي 0 ومنه $f'(1) = 0$.

ب- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{b}{x}\right)x - a + b \ln(x)}{x^2} \quad \text{أي:} \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{b}{x}\right)x - a + b \ln(x)}{x^2} = \frac{b - a + b \ln(x)}{x^2}$$

اذن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln(x)}{x^2}$

ج- استنتاج قيمتي العددين a و b :

$$\text{لدينا } f(1) = 2 \text{ و } f'(1) = 0 \quad . \quad f(1) = \frac{a + b \ln(1)}{1} = a \quad \text{و عليه } a = 2$$

$$f'(1) = \frac{(b-a) - b \ln(1)}{1^2} = b - 2 = 0 \quad \text{ومنه } b = 2$$

$$\text{بعد التعويض نجد } f'(x) = \frac{-2 \ln(x)}{x^2}$$

2. أ- لدينا $f'(x) = \frac{-2 \ln(x)}{x^2}$ ومنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $x^2 > 0$ اذن إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $x \mapsto -2 \ln(x)$ أي من إشارة $x \mapsto -\ln(x)$.

اتجاه تغير الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		0	-
	+		

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

ب- حساب نهايتي الدالة f :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + 2 \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + 2 \ln(x)}{x} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2 \ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن: حسب التزايد المقارن لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} = 0$

ج- جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

أ.3- بين أن المعادلة: $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد على المجال $]0; 1]$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0; 1]$.

حيث $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ و $f(1) = 2$ وبالتالي $1 \in]-\infty; 2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; 1]$.

ب- من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنه يوجد حل وحيد β لأن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و

لدينا كذلك $f(1) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ اذن $1 \in]0; 2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1; +\infty[$.

باستعمال خاصية $Tableau$ المتوفرة في الألة الحاسبة العلمية نحسب صور للدالة f من المجال $]1; +\infty[$ نجد أن الحل ينتمي للمجال

$]5; 6[$ وبالتالي $n = 5$ اذن $5 < \beta < 6$.

5.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$.

1. نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = -\infty$$

2. لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 2\ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2}{\frac{1}{e^x} + 1} \quad \text{أي:} \\ &= 2\ln 4 + \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2\ln 4 + 2 \end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) + f(-x) = 2 + 2\ln 4$.

وعليه النقطة $(0; 1 + \ln 4)$ هي مركز تناظر المنحنى (C) .

3. اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = 1 - 2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} : \mathbb{R}$$

اذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) > 0$ لأن $e^{2x} + 1 > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$

وعليه فان الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4. لدينا الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب- ليكن α حل المعادلة $f(x) = 3$ باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $f(1,1) = 2,98 < 3$ و $f(1,2) = 3,04 > 3$

اذن $1,1 < \alpha < 1,2$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x) = m$.

من السؤال 2.

$$f(-\alpha) = 2 + 2\ln 4 - f(\alpha) = 2 + 2\ln 4 - 3 = 2\ln 4 - 1$$

وعليه $(-\alpha)$ حل للمعادلة من أجل $m = 2\ln 4 - 1$.

1.5- من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} &= x + \ln 4 + \frac{2 + 2e^x - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= x + \ln 4 + \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} + \frac{-2e^x}{e^x + 1} \\ &= x + \ln 4 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ب- لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - (x + \ln 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \end{aligned}$$

اذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + \ln 4$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln 4 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - (x + \ln 4 + 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2e^x}{e^x + 1} = 0 \end{aligned}$$

ولدينا:

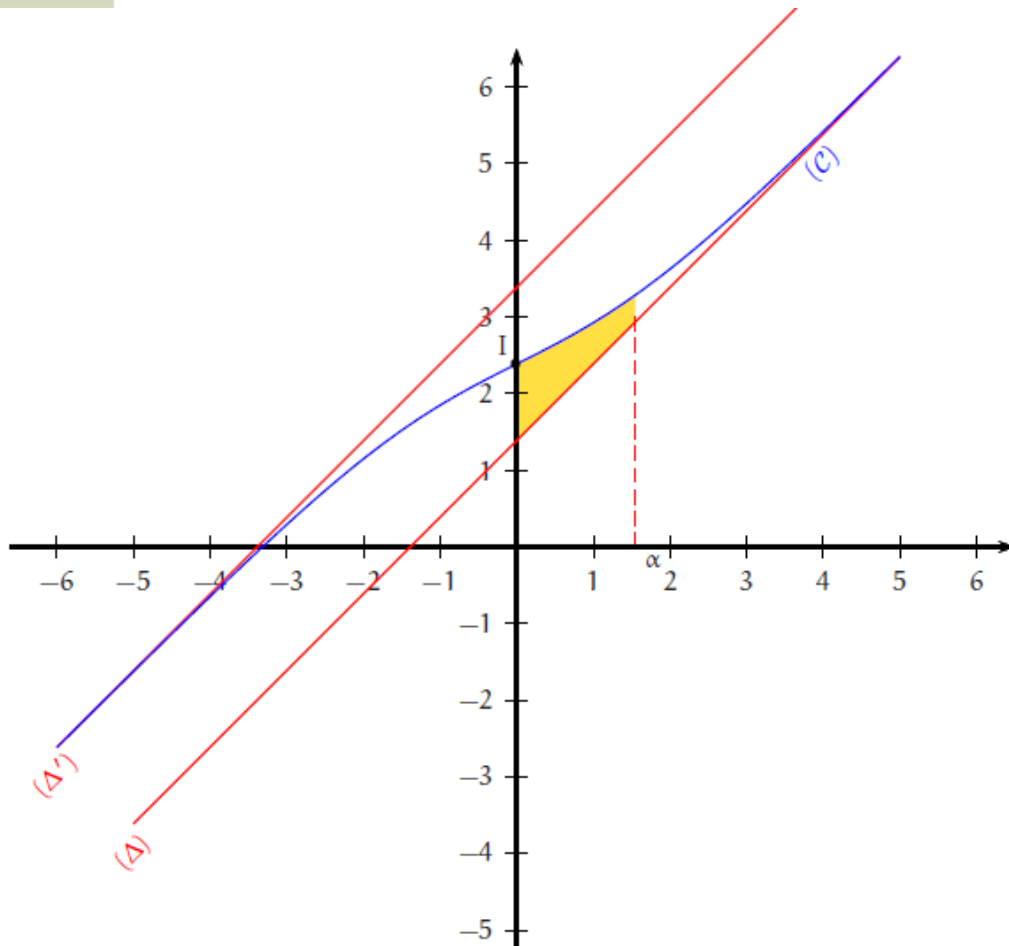
و بالتالي المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

6. الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) :

$$\text{بدراسة إشارة الفرق } f(x) - y \text{ نجد: } f(x) - y = \frac{2}{e^x + 1} > 0$$

اذن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.

الرسم (غير مطلوب)



7. نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} [f(x) - x - \ln 4] dx \text{ لدينا}$$

$I(\alpha)$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمان الذين معادلاتهما: $x = \alpha$ و $x = 0$.

ب- لدينا:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= I(\alpha) = \int_0^{\alpha} [f(x) - x - \ln 4] dx = \\ &= \int_0^{\alpha} 2 - 2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= \left[2x - 2 \ln(e^x + 1) \right]_0^{\alpha} \quad \text{اذن:} \\ &= 2\alpha - 2 \ln(e^{\alpha} + 1) + 2 \ln 2 \\ &= 2 \left[\ln e^{\alpha} - \ln(e^{\alpha} + 1) + \ln 2 \right] \\ &= 2 \ln \left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} \right) \end{aligned}$$

ج- حساب α من أجل $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2 \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2e^\alpha = e^{\frac{1}{2}}(e^\alpha + 1) \quad \text{نجد من هذا:}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha \left(2 - e^{\frac{1}{2}} \right) = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(2 - e^{\frac{1}{2}} \right)}$$

6.

1. اشارة $f(x)$: على المجال $]0; +\infty[$ أي $x > 0$

لدينا: $1 - \ln x > 0$
 $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$
 نلخص اشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$		+	0 -

2. احسب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

3. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث $f'(x) = 1 - \ln x + x \left(\frac{-1}{x} \right) = -\ln(x)$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x) = -\ln(x)$ و بالتالي اشارة f' اشارة $[-\ln x]$ اذن:

الدالة متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

$$f(1) = 1 \times (1 - \ln 1) = 1.$$

4. معادلة المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a تعطى بالعلاقة: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$y = -x \ln(a) + a \text{ أي } y = -\ln(a)(x-a) + a - a \ln a$$

من أجل $x=0$ نجد $y=a$ ومنه $A'(0;a)$ النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور الترتيب.

5. حساب $A(a)$:

في الحالة $a < e$:

$$\begin{aligned} A(a) &= \int_a^e f(x) dx \\ &= \int_a^e x(1 - \ln(x)) dx = \int_a^e x - x \ln(x) dx \\ &= \int_a^e x dx - \int_a^e x \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^e - I \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} - I \end{aligned}$$

$$I = \int_a^e x \ln(x) dx \text{ نضع:}$$

نحسب التكامل I بالتجزئة:

$$v(x) = \frac{x^2}{2} \text{ و بالتالي } v'(x) = x$$

$$u(x) = \ln(x) \text{ و } u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} A(a) &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{e^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right) \\ &= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{e^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ &= -\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

اذن

$$\begin{aligned} I &= \int_a^e x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_a^e - \int_a^e \frac{x^2}{2x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln a - \int_a^e \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln a - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{e^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

اذن

7.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)$

1. النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = 0 \end{cases} \quad \text{و أن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = +\infty$$

2. المستقيم المقارب (Δ) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) - \left(-x + \frac{5}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و عليه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة: $e^{x-2} - 4 = 0$ تكافئ $e^{x-2} = 4$ معناه $x - 2 = \ln 4$ أي $x = 2 + \ln 4$ و منه $S = \{2 + \ln 4\}$.

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ندرس اشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) - \left(-x + \frac{5}{2} \right) \\ = -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)$$

ومنه إشارة الفرق: $f(x) - y$ من إشارة $-(e^{x-2} - 4)$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2} e^{x-2} > 0$.

x	$-\infty$	$2 + \ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية	(C) يقع فوق (Δ)	$(C) \cap (\Delta) = \{(2 + \ln 4; f(2 + \ln 4))\}$	(C) يقع تحت (Δ)

وعليه المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2 + \ln 4; +\infty[$.

3. حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty : \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \left(\frac{e^{-2}}{2} \right) \frac{e^x}{x} (e^{x-2} - 4) \\ = -\infty$$

اذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

4. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + e^{x-2} \left(-\frac{1}{2} e^{x-2} \right) \\ = -1 - (e^{x-2})^2 + 2e^{x-2} \\ = -[1 + (e^{x-2})^2 - 2e^{x-2}] \\ = -(e^{x-2} - 1)^2$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-(e^{x-2} - 1)^2 \leq 0$ أي $f'(x) \leq 0$ اذن الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

5. نقطة انعطاف:

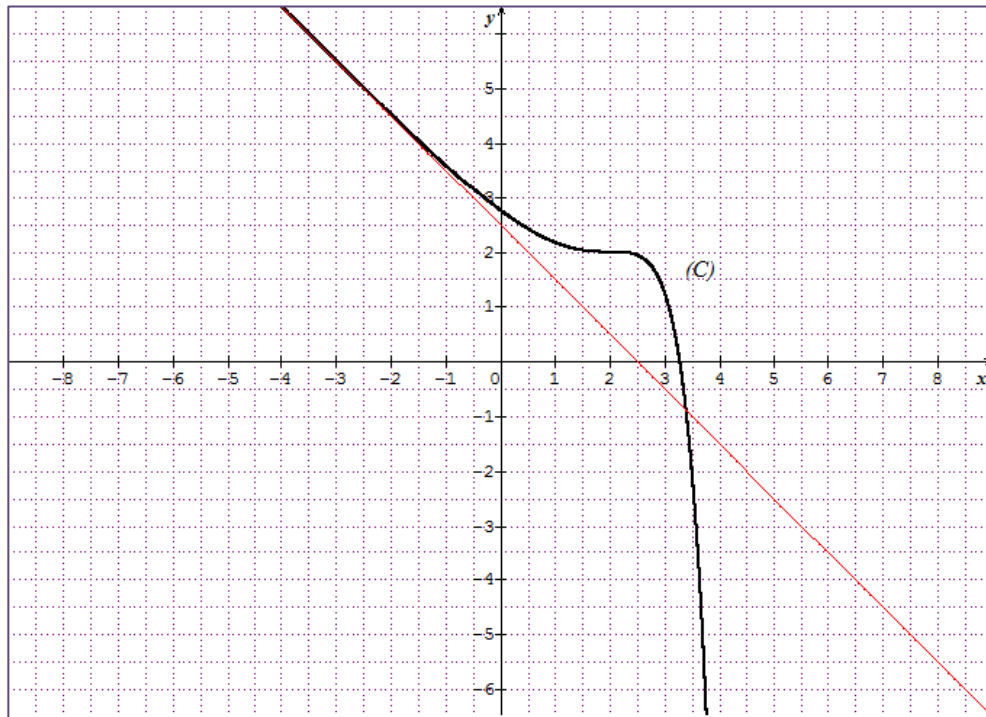
لدينا الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم من أجل $x = 2$ ولا تغير من إشارتها اذن النقطة $A(2; f(2))$ حيث

$$\begin{aligned} f(2) &= -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{2-2} (e^{2-2} - 4) \\ &= -2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$

ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$. (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة).

7. أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقريتين التاليتين $\ln 3 \approx 1,1$ ، $\ln 2 \approx 0,7$).



8.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي: $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$.

1.1- الدالة العددية g قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \quad \text{أي:} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - x}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \end{aligned}$$

وبالتالي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

ب- لدينا $x \in [1; +\infty[$ أي $x \geq 1$

وبما أن $\sqrt{x} \geq 1$ تكافئ $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ اذن $g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ج- استنتاج أن لكل x من المجال $[1; +\infty[$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ لاحظ أن $(2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x})$.

لدينا $\sqrt{x} \geq 1$ وبما أن الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ افان $g(x) \geq g(1)$ أي $g(x) \geq 0$

وبالتالي: $2\sqrt{x} - 2 - \ln x \geq 0$ أي $2\sqrt{x} - 2 \geq \ln x$ وحسب الملاحظة لدينا $2\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x} - 2 \geq \ln x$ اذن حسب خاصية التعدي

لدينا $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ من الواضح أن من أجل كل x من المجال $[1; +\infty[$ ، $\ln x \geq 0$

د- مما سبق لدينا

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln x \leq 2\sqrt{x} \\ 0 &\leq (\ln x)^3 \leq (2\sqrt{x})^3 \\ 0 &\leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x} \\ 0 &\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2} \quad \text{أي} \\ 0 &\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8\sqrt{x}}{x} \\ 0 &\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

اذن من اجل كل x من $[1; +\infty[$ ، $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

استنتاج النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

لدينا $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}}$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$

2.أ- الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على $]0; +\infty[$. معناه $G'(x) = g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ،

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right) + \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) x \\ &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2x}{3\sqrt{x}} - 1 = -2 - \ln(x) + \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x}}{3} \text{ أي} \\ &= -2 - \ln(x) + 2\sqrt{x} = g(x) \end{aligned}$$

ب- احساب التكامل $\int_1^4 g(x) dx$:

$$\int_1^4 g(x) dx = [G(x)]_1^4 = G(4) - G(1) = \frac{19}{3} - 4 \ln 4$$

9.

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

نضع: $e^x = t$ ومنه المعادلة تصبح: $t^2 - 4t + 3 = 0$ أي: $t_1 = 1$ و $t_2 = 3$.

ولدينا $e^x = t$ تكافئ: $x = \ln t$ أي $x_1 = \ln 1 = 0$ و $x_2 = \ln 3$ اذن $S = \{0; \ln 3\}$..

2. ب- حل في المتراجحة: $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$.

مما سبق لدينا : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ تكافئ: $S = \{0; \ln 3\}$ اذن اشارة العبارة : $e^{2x} - 4e^x + 3$ كالتالي

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

وعليه حلول المتراجحة: $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$ هي: $S = [0; \ln 3]$.

ج- حسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$. عند التعويض المباشر تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ وبالتالي نرفعها عن طريق التحليل للبسط والمقام.

$$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1) \quad \text{و} \quad e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 3)(e^x - 1), \quad \mathbb{R} \quad x \text{ كل من}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 3)(e^x - 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 3)}{(e^x + 1)} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{اذن}$$

2. اثبات أن المعادلة: $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ تقبل حلا قفي المجال $[-1; 0]$.

نضع $f(x) = e^{2x} + e^x + 4x$. حيث الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 2e^{2x} + e^x + 4$ نلاحظ أن $f'(x) \geq 0$ يعني أن الهدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

دالة f هي مجموع دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن هدي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

ومن جهة أخرى لدينا $f(0) = 2 > 0$ و $f(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4 < 0$ اذن $f(-1) \times f(0) < 0$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ تقبل حلا في المجال $[-1; 0]$.

10

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$ و $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1. اثبات أنه من أجل كل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} \right) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2} = \frac{g(x)}{3x^2} : \mathbb{R}^* \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

اذن: $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$ ولدينا $x \in \mathbb{R}^*$ يعني: $3x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس الإشارة $g(x)$.

2. دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 + 2x$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(-\frac{1}{3}\right)$	$g(0)$	$+\infty$

$$g(0) = -1$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-26}{27} \text{ حيث:}$$

3.أ- اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha \in]0; 1[$. الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; 1[$ و $g(0) = -1 < 0$ و $g(1) = 2 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α . (لم يطلب تعيين حصره).

ب- استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

4. شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

نحسب النهايات:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty\end{aligned}$$

5. لتكن النقطتين $J(1;1)$ و $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$

أ- اثبات أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J . حيث: $J(1;1)$ و $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$

نعين معادلة المستقيم (IJ) :

معامل توجيه المستقيم (IJ) هو: $a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$ وبالتالى المستقيم (IJ) من الشكل: $y = \frac{2}{3}x + b$.

$J \in (IJ)$ ومنه: $(IJ): y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

من جهة ثانية نعين معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة J أي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ونجد: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J .

ب- تعين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$(T): y = \frac{-2}{3}(x+1) - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-2}{3}x - 1$$

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ نجد:

$$f(x) - y = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{-2}{3}x - 1 \right) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x}$$

باستعمال القسمة نتحصل: نلاحظ ان (-1) جذر للبسط

$$f(x) - y = \frac{(x+1)^2 (x+1)}{3x}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	
$3x$		-		+
$f(x) - y$	+	0	-	+

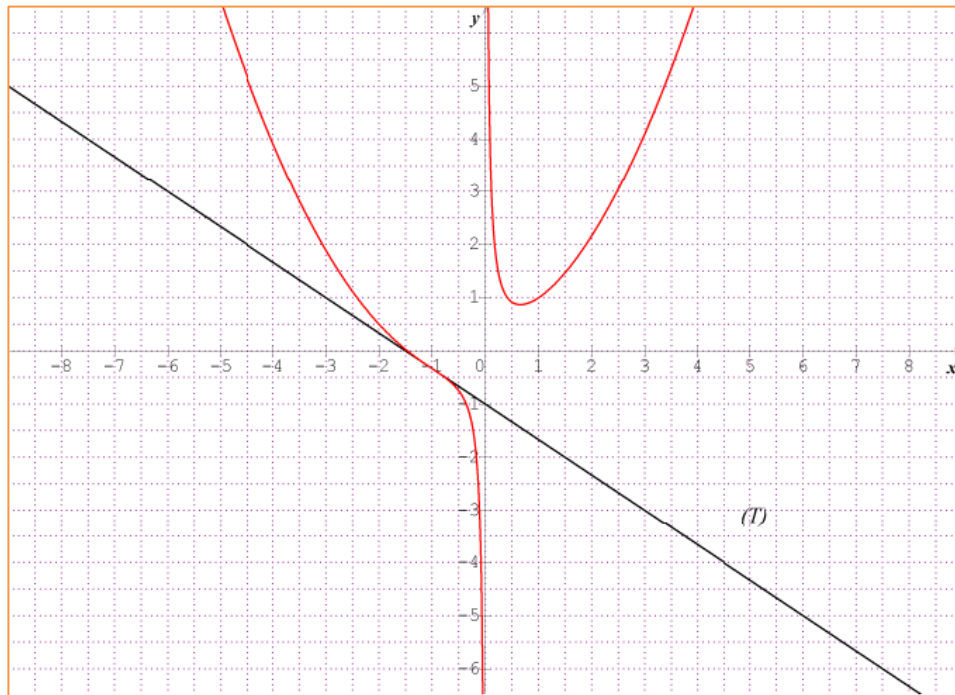
اذن من أجل $x \in]-\infty; -1[$ (C) يقع فوق المماس (T).

من أجل $x \in]-1; 0[$ (C) يقع تحت المماس (T).

من أجل $x \in]0; +\infty[$ (C) يقع فوق المماس (T).

المنحنى (C) يتقاطع مع المماس (T) في النقطة $I \left(-1; \frac{-1}{3} \right)$.

6. رسم المماس (T) والمنحنى (C). (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.8$).



7. المناقشة

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 3mx + 1 &= 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + 1 = 3mx \\ \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{x} &= 3m \quad \text{لدينا:} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) &= m \Rightarrow f(x) = m \end{aligned}$$

حل هذه المعادلة بيانيا هي تعيين فواصل نقاط تقاطع المنحنى مع (C) المستقيم ذا المعادلة: $y = m$.

لما $m \in]-\infty, f(\alpha)[$ يوجد حل واحد .

لما $m = f(\alpha)$ يوجد حلان أحدهما حل وحيد مضاعف

لما $m \in]f(\alpha), +\infty[$ يوجد ثلاث حلول

8. حساب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $y = 0$ و $x = e$

لدينا من أجل $x \in [1; e]$ ، $f(x) > 0$ و بالتالي:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e f(x) - y dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^e \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e = \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + \ln e \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + 1 \right) - \frac{5}{18} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} \right) - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} \right) u.a \end{aligned}$$

11.

1. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{-x}+1} &= \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x+1-1}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1} \\ &= 1 - \frac{1}{e^x+1} \\ \frac{1}{e^{-x}+1} &= 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ وعليه}\end{aligned}$$

استنتاج: من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned}f(-x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{e^x+1} \\ \text{اذن الدالة } f \text{ فردية.} \\ &= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x+1} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right) = -f(x)\end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} = -\infty \text{ حسب}$$

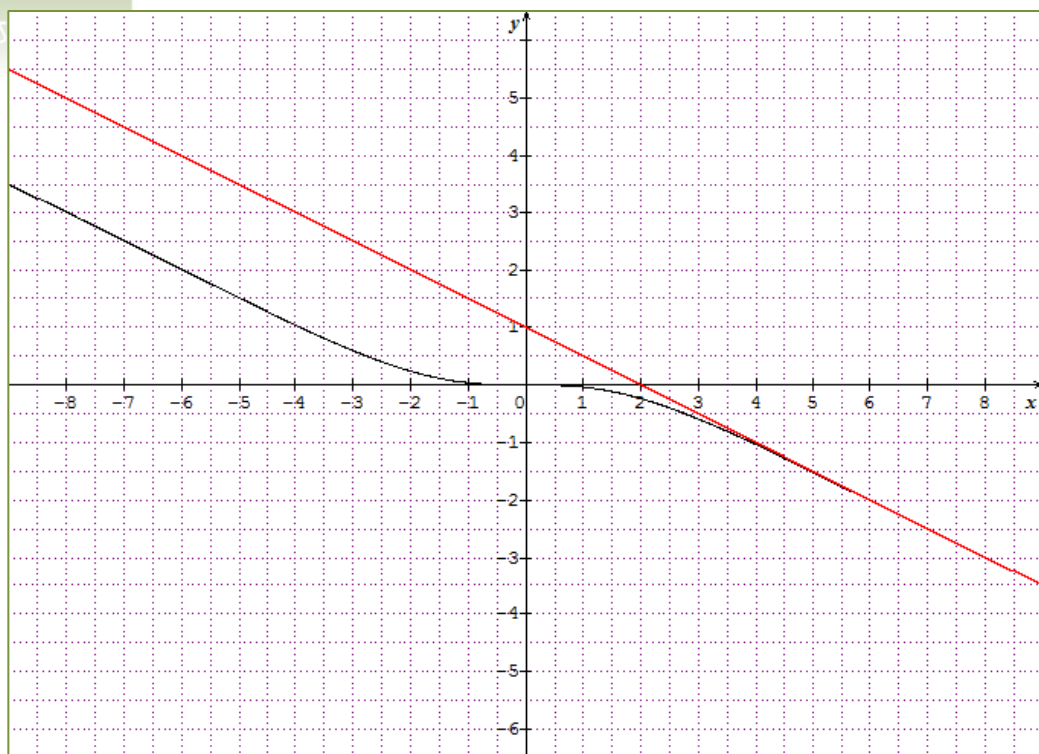
3.1- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-(e^x+1)^2 + 4e^x}{2(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\text{وبالتالي من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ، } f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) \leq 0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

5. انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .



12.

1. الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ، $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$ ،

أ. النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty$$

وكذلك

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 + \ln x) = +\infty$$

ب- اتجاه تغير الدالة u على $]0; +\infty[$:

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، وعليه على المجال $]0; +\infty[$ ، $u'(x) > 0$ ،

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

2. الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

و لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

لدينا $u(1) = -1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

و $u(1,31) = -0,01 < 0$ و $u(1,32) > 0,02$ ومنه $u(1,31) < u(\alpha) < u(1,32)$ أي $1,31 < \alpha < 1,32$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ حيث $1,31 < \alpha < 1,32$

3. إشارة $u(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

4. لدينا:

$$u(\alpha) = 0$$

$$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

اذن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

II. نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$

1. احسب من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) \\ &= \frac{2(x^2 - 2 \ln x)}{x} \\ &= \frac{2u(x)}{x} \end{aligned}$$

2. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $u(x)$ أي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0; \alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha; +\infty[$.

III. 1. نعتبر النقطة $A(0; 2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعلاقة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $AM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$.

2. لتكن g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ ،

وعليه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ ، إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

وهكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال. (II. 2.) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ تبلغها عند α وبما أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$ ، المسافة AM أصغرية من أجل $x = \alpha$ وعليه $P(\alpha; \ln \alpha)$.

ج-لدينا

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 (1 + \alpha^2)} \\ &= \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

وعليه: $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP) هو: $a = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a' = \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} a \times a' &= \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha^2} = -1 \\ \ln \alpha &= 2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

إذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

13.

1. حساب الحدود:

$$u_2 = \frac{1+1}{2(1)} u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} u_2 = \frac{3}{8}$$

$$u_4 = \frac{4}{6} u_3 = \frac{1}{4}$$

2. أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n موجبة تماما أي $u_n > 0$.

من اجل $n=1$ ، $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ وعليه $u_1 > 0$.

ليكن $n \geq 1$ نفرض أن $u_n > 0$ ونتحقق من أن $u_{n+1} > 0$. أي: $\frac{n+1}{2n} u_n > 0$.

لدينا $u_n > 0$ و $\frac{n+1}{2n} > 0$ فبالتالي $\frac{n+1}{2n} u_n > 0$ اذن $u_{n+1} > 0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراج فان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$.

$$\text{ب- ليكن } n \geq 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+n}{2n} = 1$$

حيث: $u_n \neq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

فبالتالي: $u_{n+1} < u_n$ اذن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 اذن هي متقاربة.

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

$$\text{لدينا: } v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2n} u_n = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} v_n \quad n \geq 1 \text{ ليكن}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = \frac{1}{2}$.

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2^n} \text{ وبالتالي}$$

$$\text{ب- لدينا } v_n = \frac{u_n}{n} \text{ أي } u_n = n v_n \text{ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم: } u_n = \frac{n}{2^n}$$

4. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

أ- نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2 \right) = -\infty \end{aligned}$$

ب- نهاية المتتالية (u_n) .

اعلم أن المتتالية (u_n) متقاربة و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } u_n &= \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n \ln(2)}} = e^{\ln(n) - n \ln 2} = e^{f(n)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

14.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x e^{1-x}$.

$$1. \text{ ليكن } x \text{ عدد حقيقي } f(x) = x e^{1-x} = x \times e \times e^{-x} = e x \frac{1}{e^x}$$

$$\text{اذن بين أنه من أجل كل } x \text{ عدد حقيقي، } f(x) = e \times \frac{x}{e^x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty \\ \text{اذن } y = 0 \text{ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة } f \text{ عند } +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \frac{x}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

$$3. \text{ اتجاه تغير الدالة } f \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{، } f'(x) = (1-x) e^{1-x}.$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{، } e^{1-x} > 0 \text{ وبالتالي إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } 1-x.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	0

1.11. لیکن x عدد حقیقی،

$$\begin{aligned}
 (1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x) \\
 &= (1+x+x^2+\dots+x^n) - x(1+x+x^2+\dots+x^n) \\
 &= (1+x+x^2+\dots+x^n) - (x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}) \\
 &= 1-x^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$g_n(x) = \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)}, \quad x \neq 1$$

2. تحقق آنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x) = g_n'(x)$ و عليه

$$\begin{aligned}
 g_n'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

و بالتالي:

$$3. \text{نضع } S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}
 S_n &= f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^1} + \frac{3}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^{n-1}} \\
 &= 1 + 2\left(\frac{1}{e}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{e}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{e}\right)^n \\
 &= h_n\left(\frac{1}{e}\right) \\
 &= \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2}f(n) = 0 \text{ وعليه}$$

$$(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = f(n+1) \text{ وكذلك}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \text{ وعليه نستنتج ان:}$$