



التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة حول الدوال الأسية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 20

1

المسائل الشاملة

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$.(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ فسر النتيجة هندسياً.(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .(4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.(5) مثل بيانياً (C_f) .(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.(1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.(2) انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h) .

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

(3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x) - \text{برر اجابتك}$.

(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

(6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[-2; -1]$ ، ثم عين حصاراً للعدد α سعته 10^{-2} .

(9) مثل بيانياً كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

(10) ناقش بيانياً حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

(4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

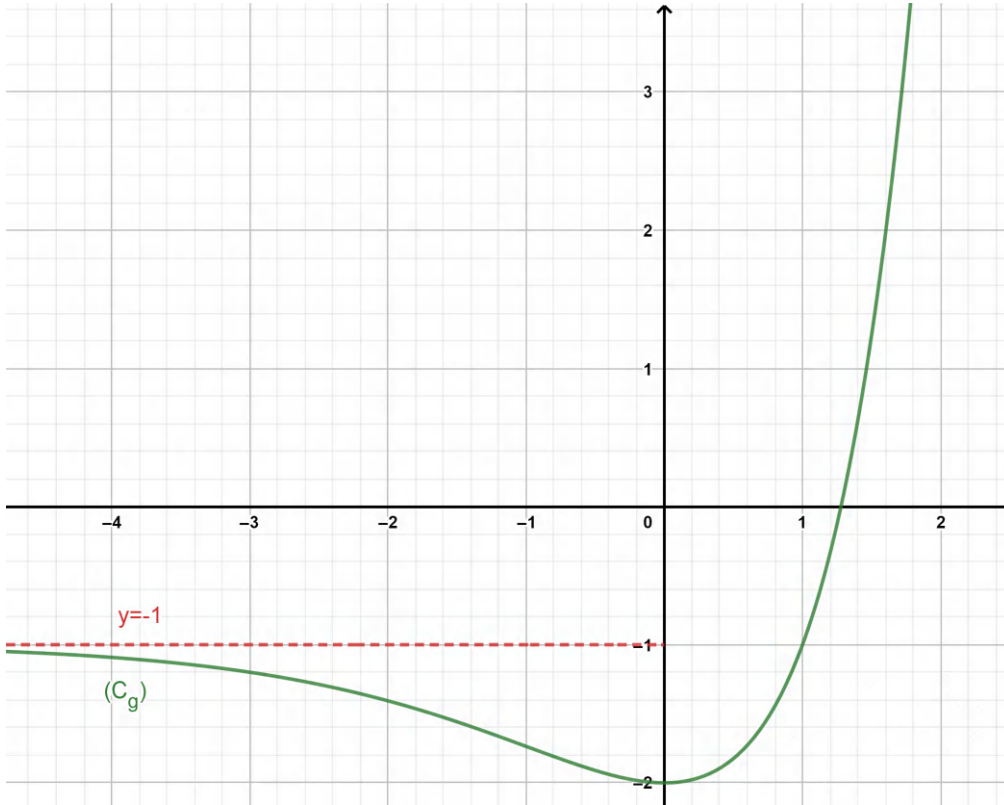
$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

03

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

- (I) a, b, c أعداد حقيقية، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
- $$g(x) = (ax + b)e^x + c$$
- ونسُمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



(1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]$

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$

(2) مما سبق أوجد a, b, c .

(3) نضع: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً .

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

(5) بيّن أن $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصاراً لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

(6) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(7) مثّل بيانياً المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

(8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) برهن أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) أ/ بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$$-2.77 < \alpha < -2.76$$

(5) مثّل بيانياً (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

(1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1) بيّن أن الدالة k زوجية .

2) أ/ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) .

ب/ انطلاقاً من (C_f) ، مثل بياناً (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقاً من (C_f) ، مثل بياناً (C_h)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسياً.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عيّن دون حساب كل من: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$

ثم فسر النتيجةين هندسياً.

(5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصر $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

(7) نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أن: $p(0) = 0$.

(8) أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

(10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

06

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f' .

(2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f .

(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$$-0.6 < \beta < -0.5 \text{ و } 1.9 < \alpha < 2$$

(6) مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .

(7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x + 1)e^x - 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g' :

(2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند المبدأ.

(5) مثل بيانياً كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

(6) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي

x :

$$(E): f(x) = mx$$

08

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.(3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .(4) أ/ بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1 \right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x + 1$.(6) مثل بيانياً (C_f) .

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$.

(2) أ/ بيّن أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة: $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال

$$[-\infty; 2 + \ln 4] \text{ وتحتة على المجال } [2 + \ln 4; +\infty[$$

(3) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

(6) مثل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

10

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ - ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$ ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

(3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .(5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.ب/ بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.(6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .(7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

11

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

(1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1-x$ تارة أخرى)

(2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

(4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.14 < \alpha < -1.15 \quad \text{و} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

(5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) مثل بيانيا (C_f) .

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

ج/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

(4) بين أن النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر المنحني (C_f)

(5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .

(6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ/ حلل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

(7) مثل بيانياً (T) و (C_f) .

2

حلول المسائل الشاملة

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 12

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} - 1 \right) \right] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - e^{-x}] = +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$ ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+1}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{e^x+1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] \\
&= 0 \\
&\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

(2) أ- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x + 1 - e^x(x+1)}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-e^x(-e^{-x} + x)}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}
\end{aligned}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] &= f'(\alpha) \\
&= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

(3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	-	-	-	-
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$				

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = x$ إذا فقط إذا كان $g(x) = 0$:

لتبين أن $f(x) = x$

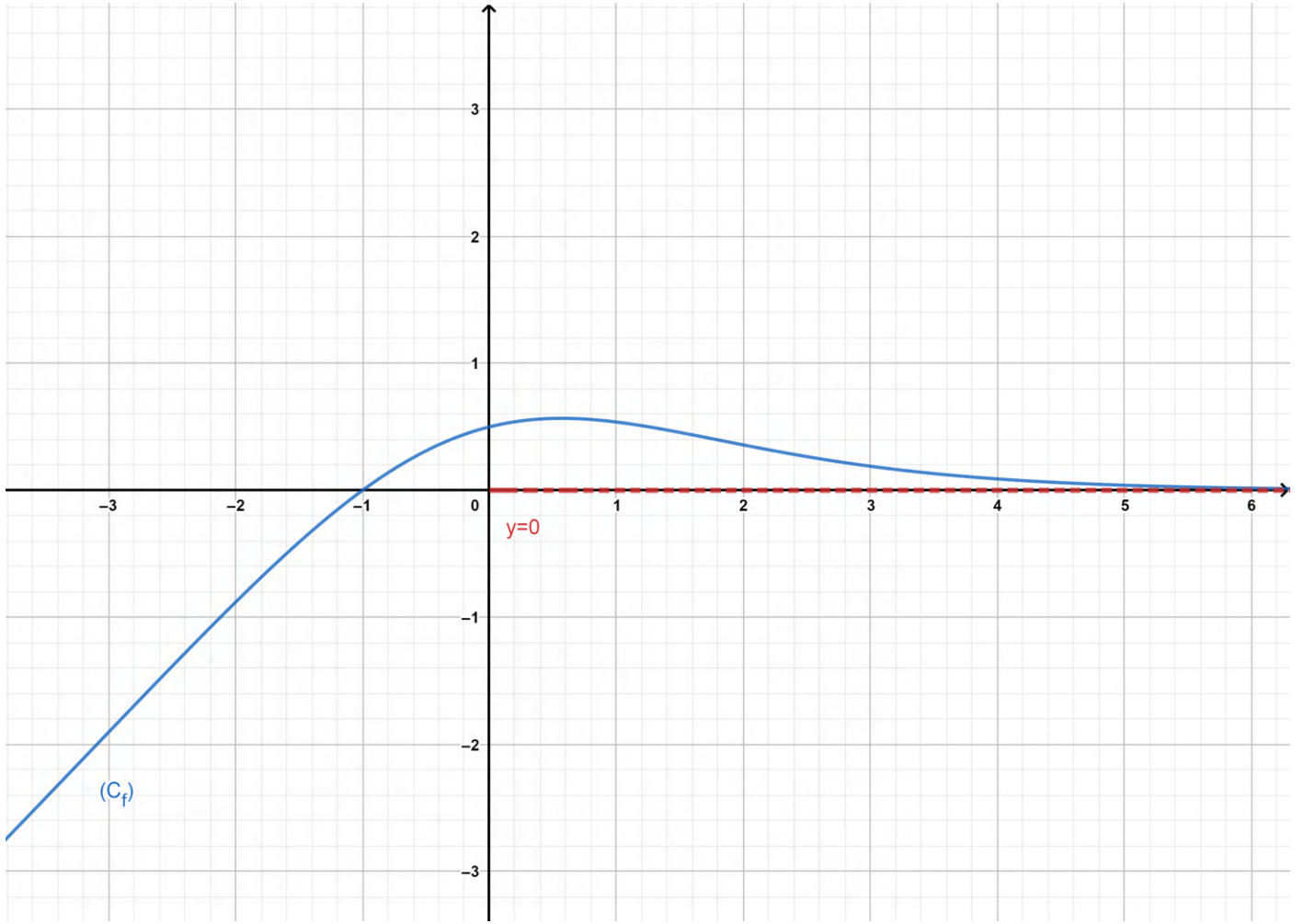
يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\
 &= \frac{x+1 - e^x - 1}{e^x+1} \\
 &= \frac{-(e^x - x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{-g(x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{0}{e^x+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا $f(x) = x$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$

(5) التمثيل البياني:



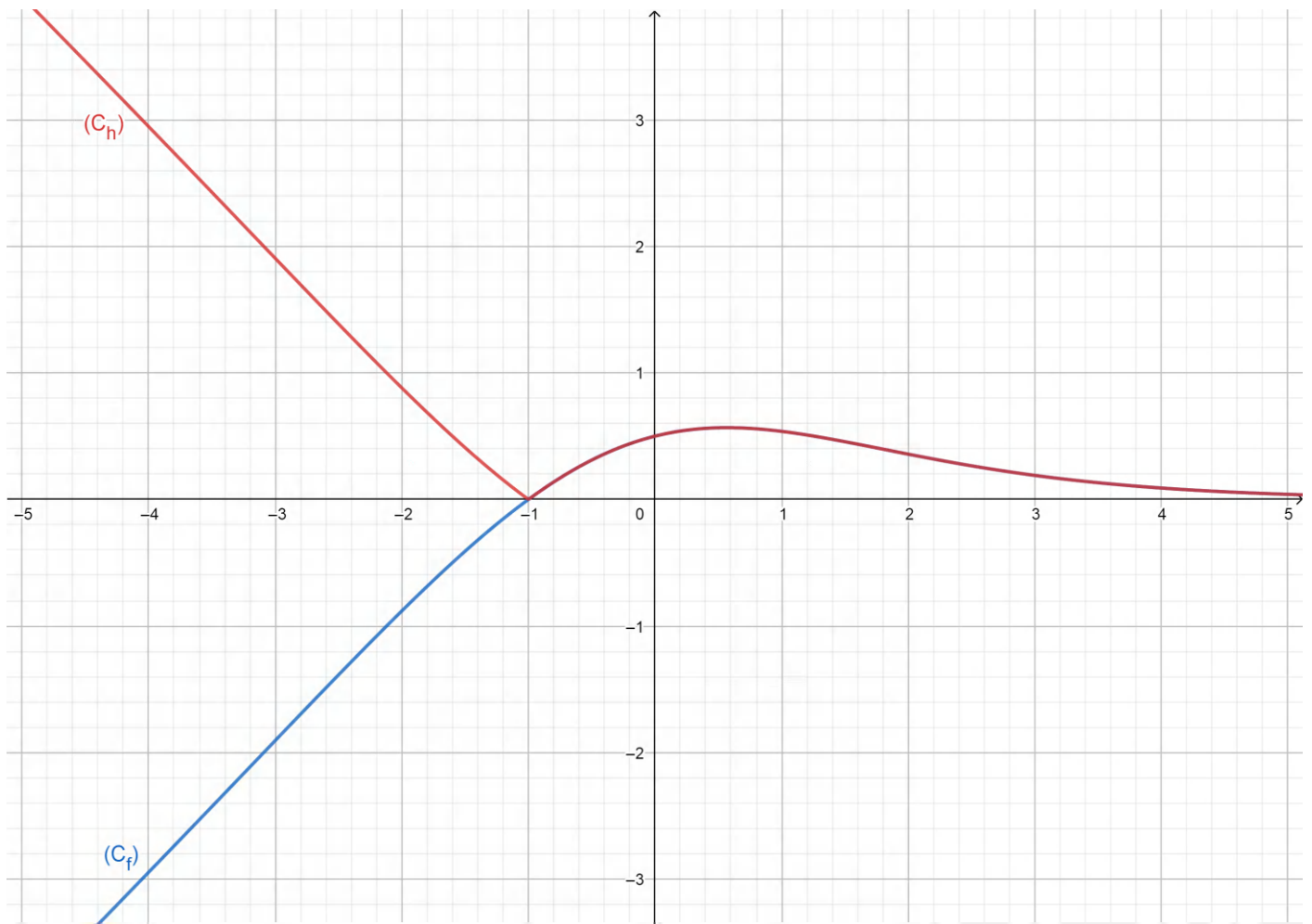
(III)

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= |f(x)| \\
 &= \left| \frac{x+1}{e^x+1} \right| \\
 &= \frac{|x+1|}{e^x+1} \\
 &= \begin{cases} \frac{x+1}{e^x+1}; & x \geq -1 \\ \frac{-x-1}{e^x+1}; & x \leq -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(x); & x \geq -1 \\ -f(x); & x \leq -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2) تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ ويناطر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}} \right] = +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - e^x(4e^x)}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 + 12e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \end{aligned}$$

(3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

$$f''(\ln 3) = 0$$

4 / تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{12}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5 / دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$ لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_1$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_2]$: لدينا:

$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{12}{e^x + 3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	

(6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3}$$

$$= \frac{1}{2}x + 1$$

(7) تبين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$



- نبين أن $(\ln 3 - x) \in D_f$ و $(\ln 3 + x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه $x \in]-\infty; +\infty[$

ومنه $(\ln 3 + x) \in]-\infty; +\infty[$ و $(\ln 3 - x) \in]-\infty; +\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2 \ln 3$:

$$\begin{aligned}
f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) &= \left(\ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x} + 3} \right) + \left(\ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x} + 3} \right) \\
&= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x} + 3} \right) \\
&= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{12e^x}{3e^x + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3} \right) \\
&= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right) \\
&= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4 + 4e^x + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \right) \\
&= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2} \right) \\
&= 2 \ln 3
\end{aligned}$$

(8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$

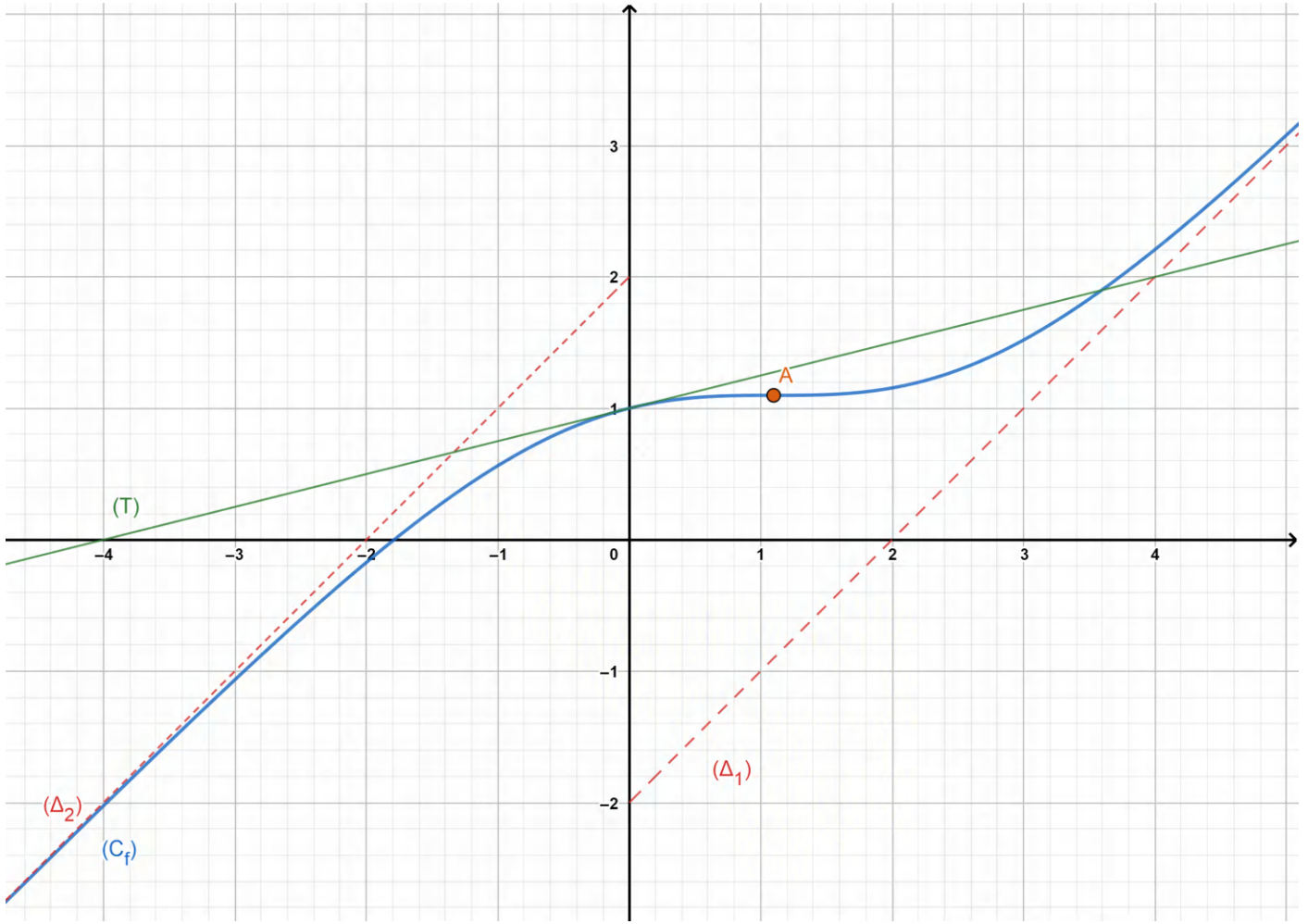
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

(9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(10) المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

$$h(x) = f(-|x|)$$

ومنه:

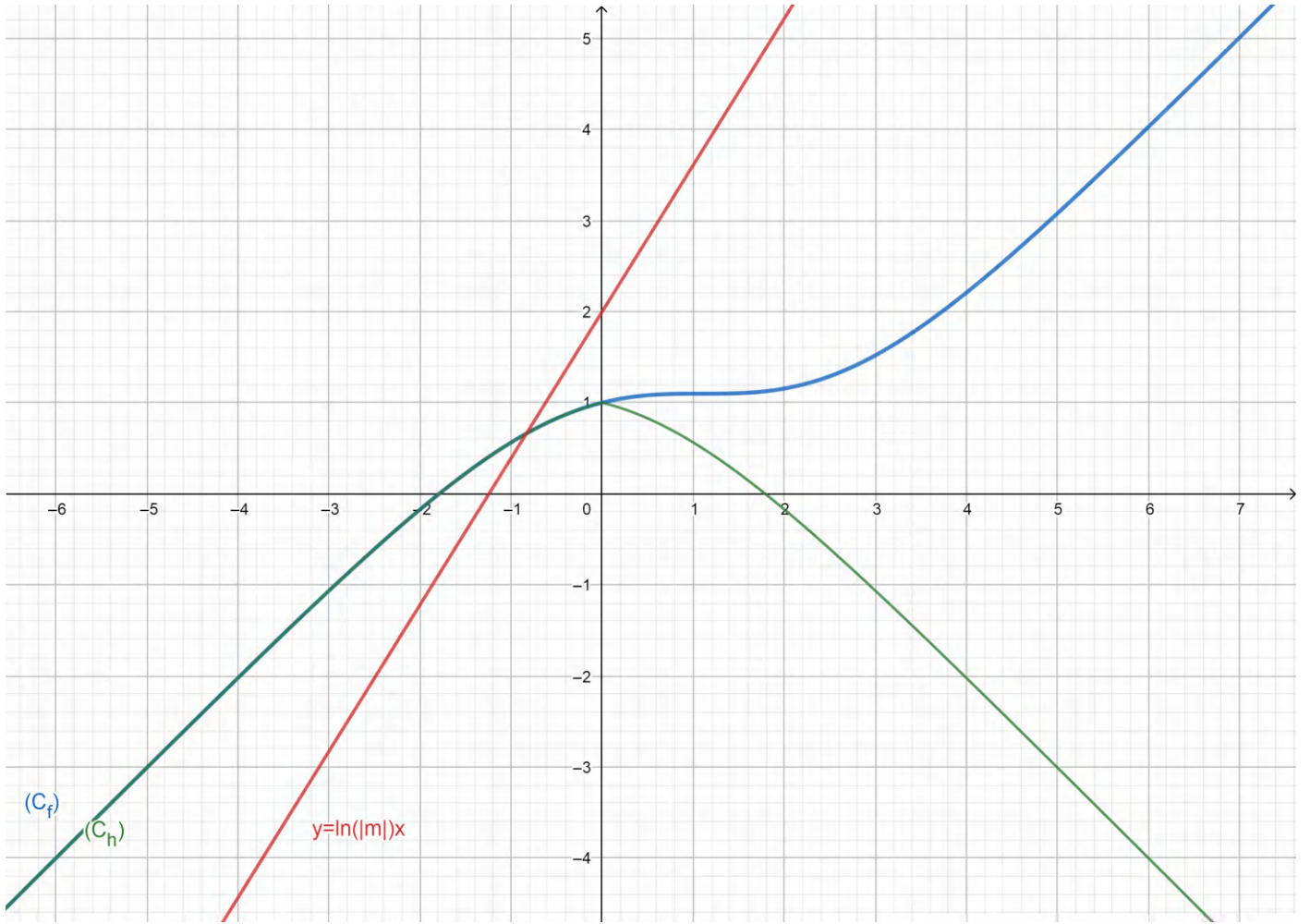
$$h(x) = \begin{cases} f(-(x)); x \geq 0 \\ f(-(-x)); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y = \ln|m| x$



ومنه المناقشة كالآتي:

لما: $\ln|m| \leq 1$ أي: $|m| \leq e$ أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول
لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x - 2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}
 (d): y &= g' \left(\frac{\alpha + 2}{3} \right) \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) + g \left(\frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
 &= 3f'(\alpha) \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) + 0 \\
 &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha + 2)
 \end{aligned}$$

(4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= 0 \Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} = 0 \\
 &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} \\
 &\Rightarrow (\alpha + 2)(e^\alpha + 3) - 4e^\alpha = 0 \\
 &\Rightarrow ae^\alpha + 3a + 2e^\alpha + 6 - 4e^\alpha = 0 \\
 &\Rightarrow e^\alpha(a - 2) = -(3a + 6) \\
 &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3a + 6}{2 - \alpha}
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 (d): y &= 3f'(\alpha) \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{e^\alpha - 3}{e^\alpha + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
 &= \frac{3\alpha^2}{4} x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}
 \end{aligned}$$

03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

(1) من البيان نجد:

أ/

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1$$

ب-

$$\bullet g'(0) = 0$$

$$\bullet g(0) = -2$$

(2) إيجاد a, b, c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0) + b)e^0 + c = -2 \\ (a(0) + a + b)e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

(3) أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0 \text{ ولدينا}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

$$\text{لدينا: } g(1.3) = 0.1 \text{ و } g(1.2) = -0.3$$

$$\text{ولدينا: } g(1.3) \times g(1.2) < 0$$

$$\text{ومنه: } 1.2 < \alpha < 1.3.$$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

(2) أ/ تبين أنه من أجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-((x - 1)e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	0

(3) تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل.

4) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0; 0)$ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a + 1)^2} + \frac{a}{e^a + 1} = 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 e^a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{-g(0)}{(e^0 + 1)^2} x + \frac{0}{e^0 + 1}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

5) تبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$

$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$

$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

6) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] = 0\end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - y]$:

$$\begin{aligned}f(x) - y &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1}\end{aligned}$$

لدينا $e^x + 1 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

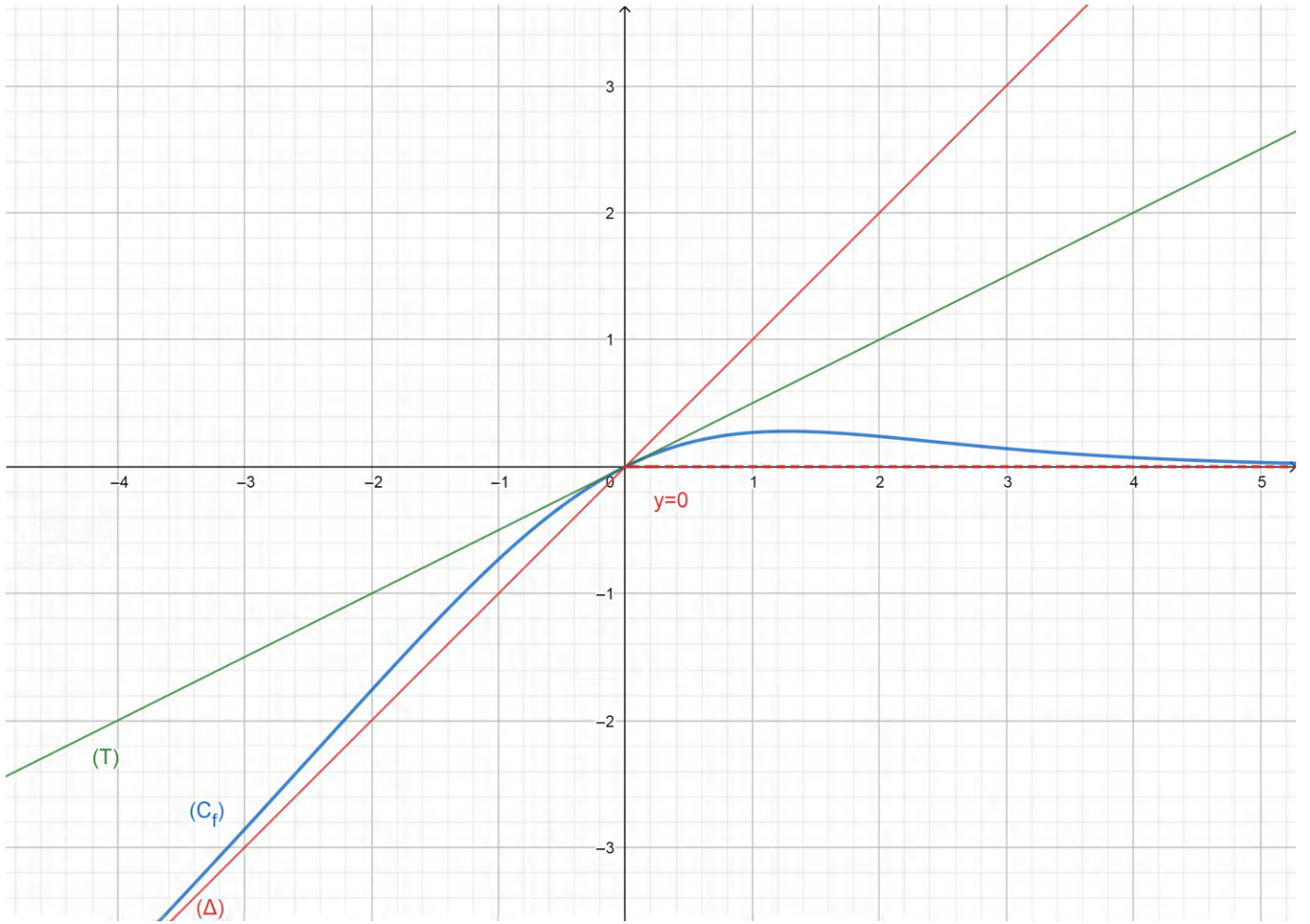
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $] - \infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0; +\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(8) المناقشة البيانية:

لما	$m < 0$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 0$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$0 < m < \alpha$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما	$m = \alpha$	المعادلة تقبل حل مضاعف موجب
لما	$m > \alpha$	المعادلة لا تقبل حلولاً

04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ أ/ تبين أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}: f'(x) &= \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \\
 f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2
 \end{aligned}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً.لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير إشارتهاومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.ج/ جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{\frac{4}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

(2) برهان أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نثبت أن: $(2(0) - x) \in D_f$

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن: $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(2(0) - x) + f(x) &= -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= -2 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= \frac{-2(e^{-x} + 1)(e^x + 1) + 4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[2(e^x + 1) + 2(e^{-x} + 1) - (e^{-x} + 1)(e^x + 1)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{e^x + e^{-x} + 2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) / تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} \right] = 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x - 1$.

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] - 3 = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◀ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لأنها لا تتعلق بالمتغير x ▶

(4) تبين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$f(-2.77) = -0.3 \quad \text{و} \quad f(-2.76) = 0.001 \quad \text{ولدينا:}$$

$$f(-2.77) \times f(-2.76) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

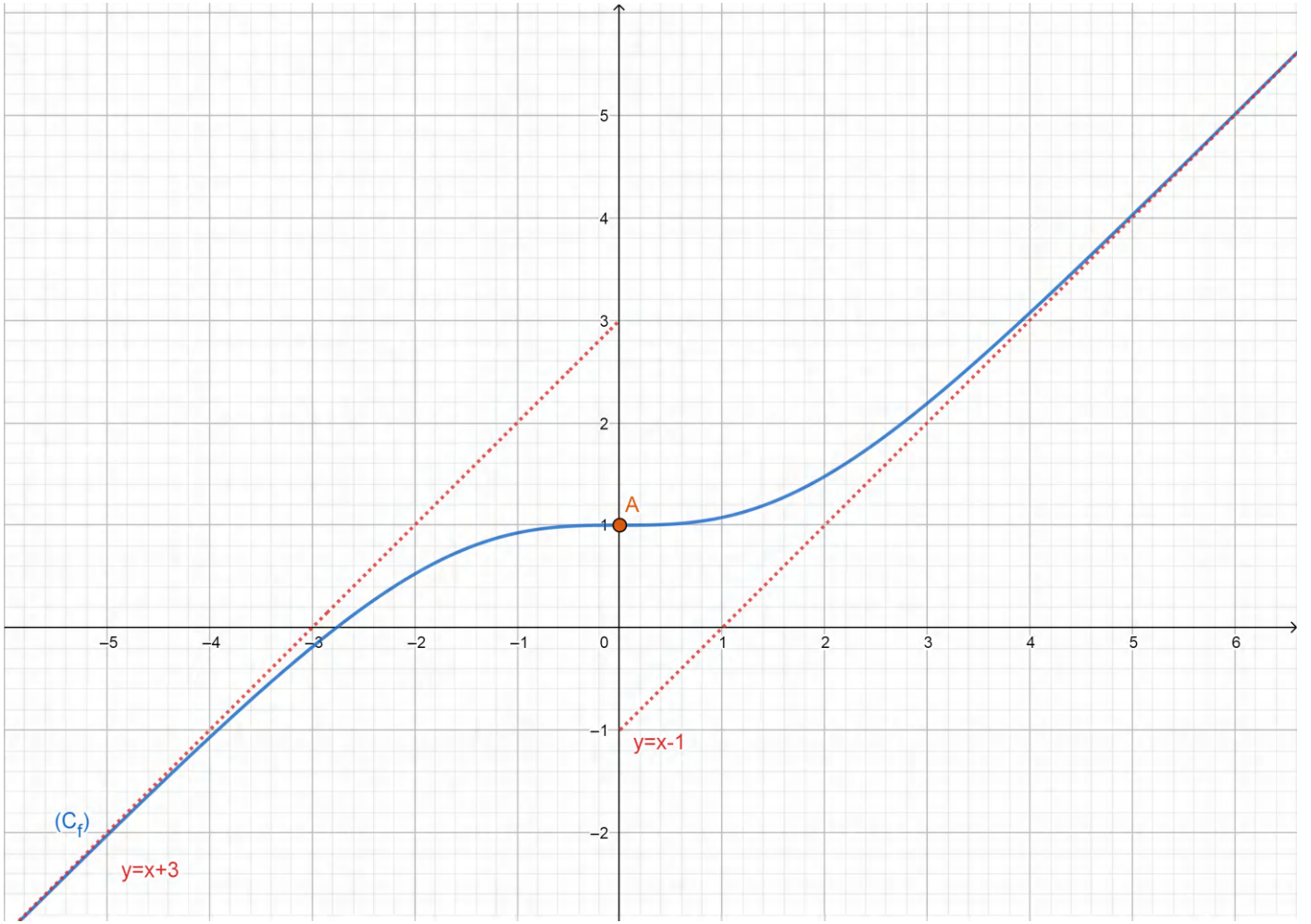
(5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمتين المقاربتين المائلتين: $(y = x - 1)$ و $(y = x + 3)$

• نعين A نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= f\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x + 1)$ ومنه :

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= 4f'\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) \\ &= 4f'(\alpha) \end{aligned}$$

f دالة معرفة على مجال I
و g دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

(3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$\begin{aligned}(T): y &= g' \left(\frac{\alpha-1}{4} \right) \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + g \left(\frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= 4f'(\alpha) \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + 0 \\ &= 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)\end{aligned}$$

(4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y = (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha - 1 + \frac{4}{e^\alpha + 1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{e^\alpha + 1} = 1 - \alpha \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3 + \alpha}{1 - \alpha}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(T): y &= 4 \left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} - 1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} + 1} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4} \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4} \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}\end{aligned}$$

(III)

(1) تبين أن الدالة k زوجية:

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \text{لتبين أن الدالة } f \text{ فردية} \quad \text{نبين أن}$$

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{لتبين أن الدالة } f \text{ زوجية} \quad \text{نبين أن}$$



لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

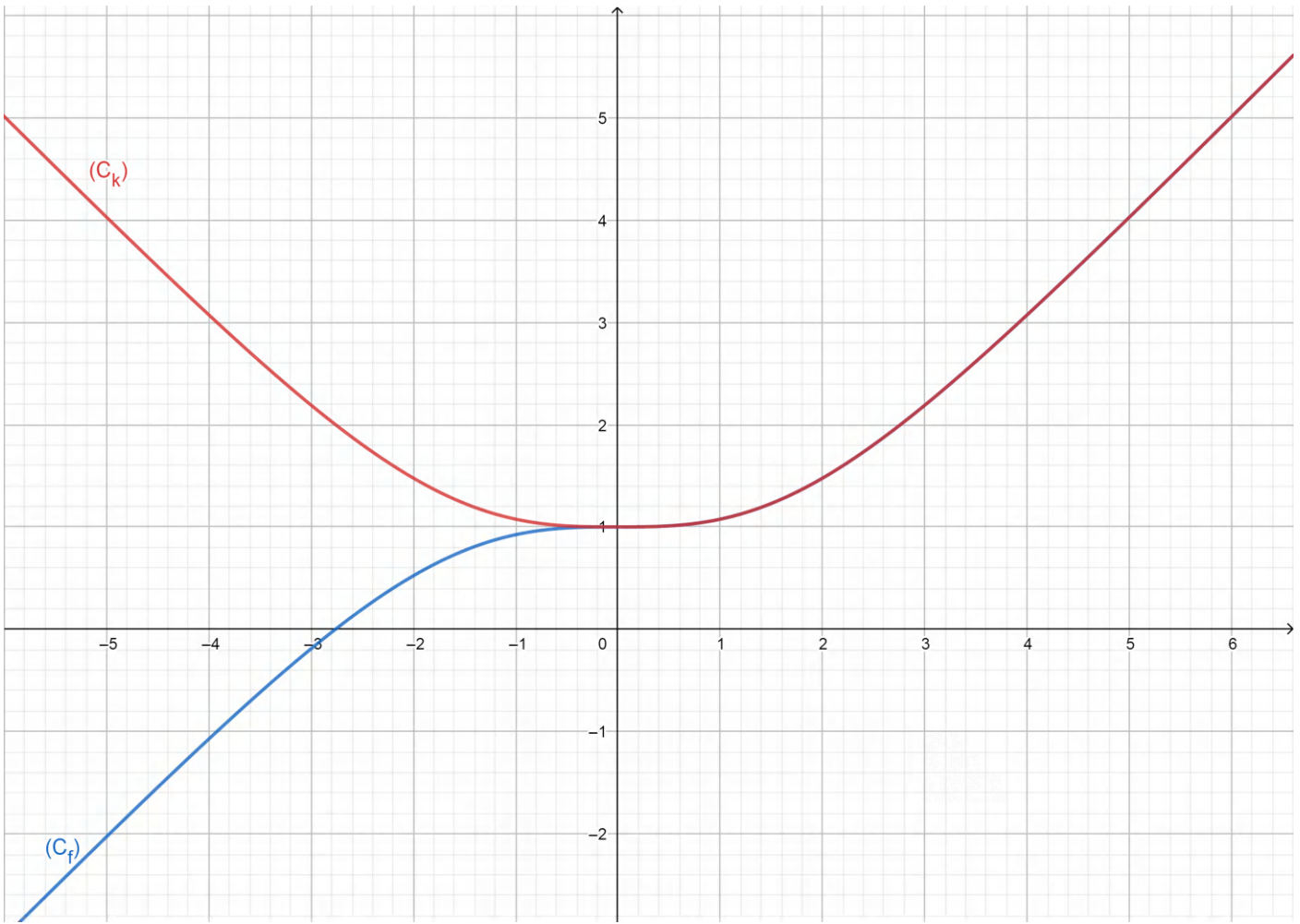
ومنه الدالة k زوجية.

(2) أ/ تبين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

لما $x \geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq 0$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب (yy')

ب/ التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV)

(1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

(2) أ/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0; 1)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :



05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 2 - e^x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) \right] = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ (نهاية شهيرة)}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow 1 - e^x = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = \ln 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β :لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا: } g(1.15) = -0.008 \quad \text{و} \quad g(1.14) = 0.01$$

$$\text{ولدينا: } g(1.14) \times g(1.15) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]1.14; 1.15[$:

$$\text{ولدينا: } g(-1.8) = 0.03 \quad \text{و} \quad g(-1.9) = -0.04$$

$$\text{ولدينا: } g(-1.9) \times g(-1.8) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد β في المجال $] -1.9; -1.8[$:

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II)

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right] = -1$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ (نهاية شهيرة)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$.

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} + 2e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$
ولدينا : $f(0) = 0$ و منه جدول التغيرات كالآتي:

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

(4) تعيين دون حساب كل من : $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$

- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right] = f'(\beta) = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β .

(5) تبين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - e^\alpha$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.14 < \alpha < 1.15$$

$$1.14 + 1 < \alpha + 1 < 1.15 + 1$$

$$\frac{1}{2.15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

(6) تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$:

$$h(0) = 0$$

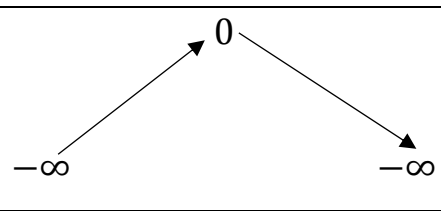
ولدينا:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - xe^x - 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - x - \frac{1}{e^x} \right) \right] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - xe^x - 1] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة h هي 0

ومنه $h(x) \leq 0$.

(7) التحقق من أن: $p(0) = 0$:

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

(8) - تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$:

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) \times -1 &= -1 \Rightarrow f'(a) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{e^a(a + 2 - e^a)}{(ae^a + 1)^2} = 1 \\ &\Rightarrow e^a(a + 2 - e^a) = (ae^a + 1)^2 \\ &\Rightarrow (ae^a + 1)^2 - e^a(a + 2 - e^a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a^2 e^{2a} + 1 + 2ae^a + e^{2a} - 2e^a - ae^a = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 + 1)e^{2a} + (a - 2)e^a + 1 = 0 \\ &\Rightarrow p(a) = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

المعادلة تقبل حل، ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$

ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= x + f(0) \\ &= x \end{aligned}$$

ج- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)h(x)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا: $h(x) \leq 0$

ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1 + x$	$-$	0	$+$

- ندرس إشارة $(xe^x + 1)$:

نضع $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1 + x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	1	0.6	$+\infty$

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أن $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$-$	$-$
$1 + x$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (T) لما $x \in]-\infty; -1[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(-1; -1)$
- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-1; +\infty[$

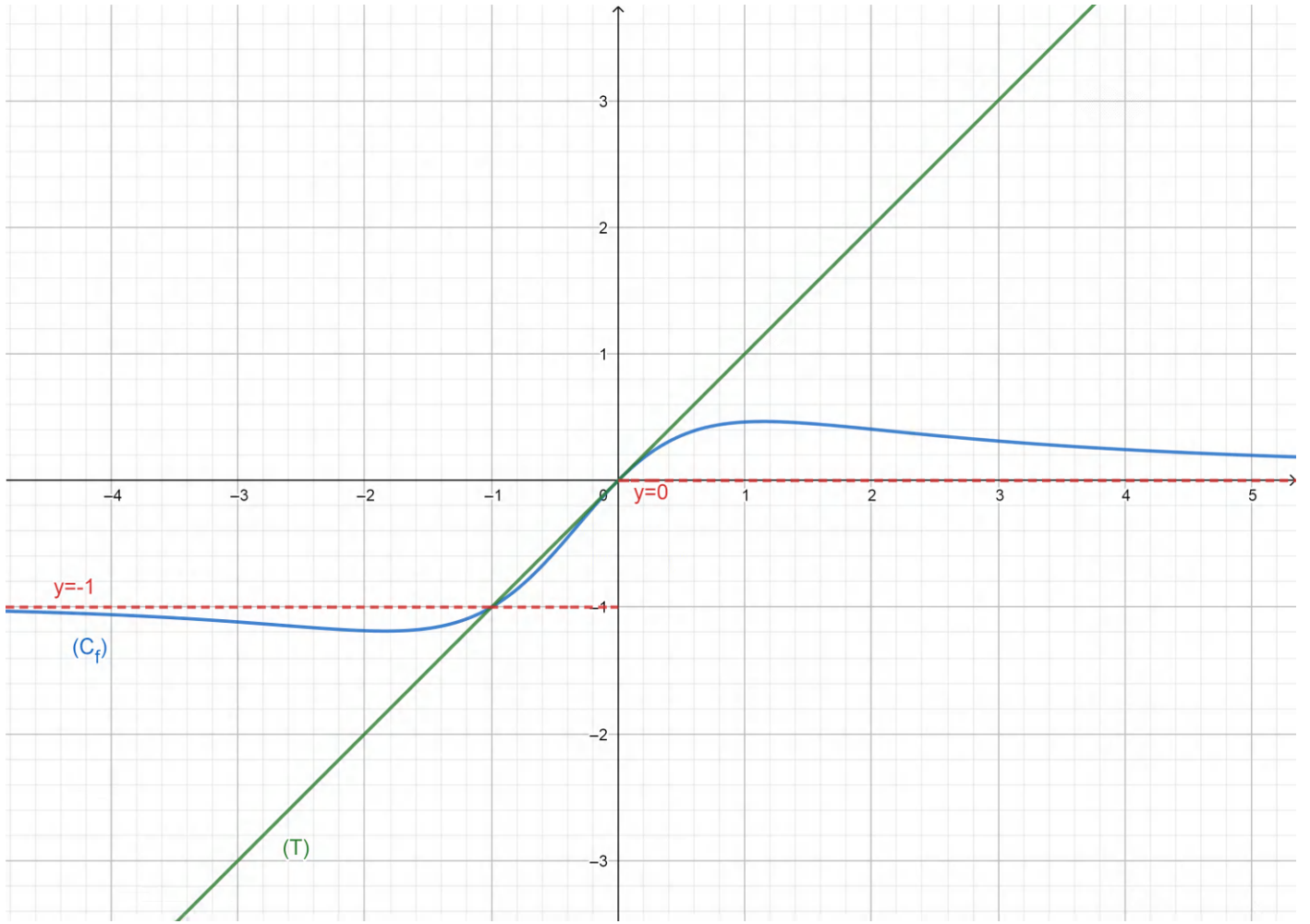
- الاستنتاج:

المماس (T) يقطع المنحني (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$ معناه توجد نقطة انعطاف

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمتين المقاربة: $(y = -1)$ و $(y = 0)$
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(10) المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned}
 e^x(1 - mx^2) + mx - 1 &= 0 \Rightarrow e^x - mx^2e^x + mx - 1 = 0 \\
 &\Rightarrow mx(1 - xe^x) = 1 - e^x \\
 &\Rightarrow mx = \frac{1 - e^x}{1 - xe^x} \\
 &\Rightarrow \frac{e^x - 1}{xe^x - 1} = mx \\
 &\Rightarrow f(x) = mx
 \end{aligned}$$

مجموعة حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $f(x) = mx$ ومنه:

لما $m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = 0$ وحلا سالبا
لما $0 < m < 1$	المعادلة تقبل ثلاث حلول
لما $m \leq 0$	المعادلة تقبل حلا معدوما
لما $m > 1$	المعادلة تقبل حلا معدوما

06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) دراسة تغيرات الدالة f' :

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} \\ &= 2 - (1+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة f' :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - (1+x)e^{x-1}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] \\ &= 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - (1+x)e^{x-1}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- حساب $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1} \\ &= -(2+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$:

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$			

(2) حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 1 - xe^{x-1}] \\
 &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{x-1}] &= 0 \text{ لأن} \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - xe^{x-1}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x-1} \left(\frac{2x}{e^{x-1}} + \frac{1}{e^{x-1}} - x \right) \right] \\
 &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{e^{x-1}} \right] &= 0 \text{ لأن}
 \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

(4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 1 - xe^{x-1} - 2x - 1] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-xe^{x-1}] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما : $x < 0$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات: $(0; 1)$
- (C_f) تحت (Δ) لما : $x > 0$.

5) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

المستقيم (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه:

$$\begin{aligned} f'(a) = 2 &\Rightarrow 2 - (1 + a)e^{a-1} = 2 \\ &\Rightarrow -(1 + a)e^{a-1} = 0 \\ &\Rightarrow -(1 + a) = 0 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= 2x + 2 + 2(-1) + 1 - (-1)e^{-1-1} \\ &= 2x + 1 + e^{-2} \end{aligned}$$

إذن معادلة المماس (T) هي :

$$y = 2x + 1 + e^{-2}$$

ب/ تبين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

$$\text{ولدينا: } f(1.9) \times f(2) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.9; 2[$

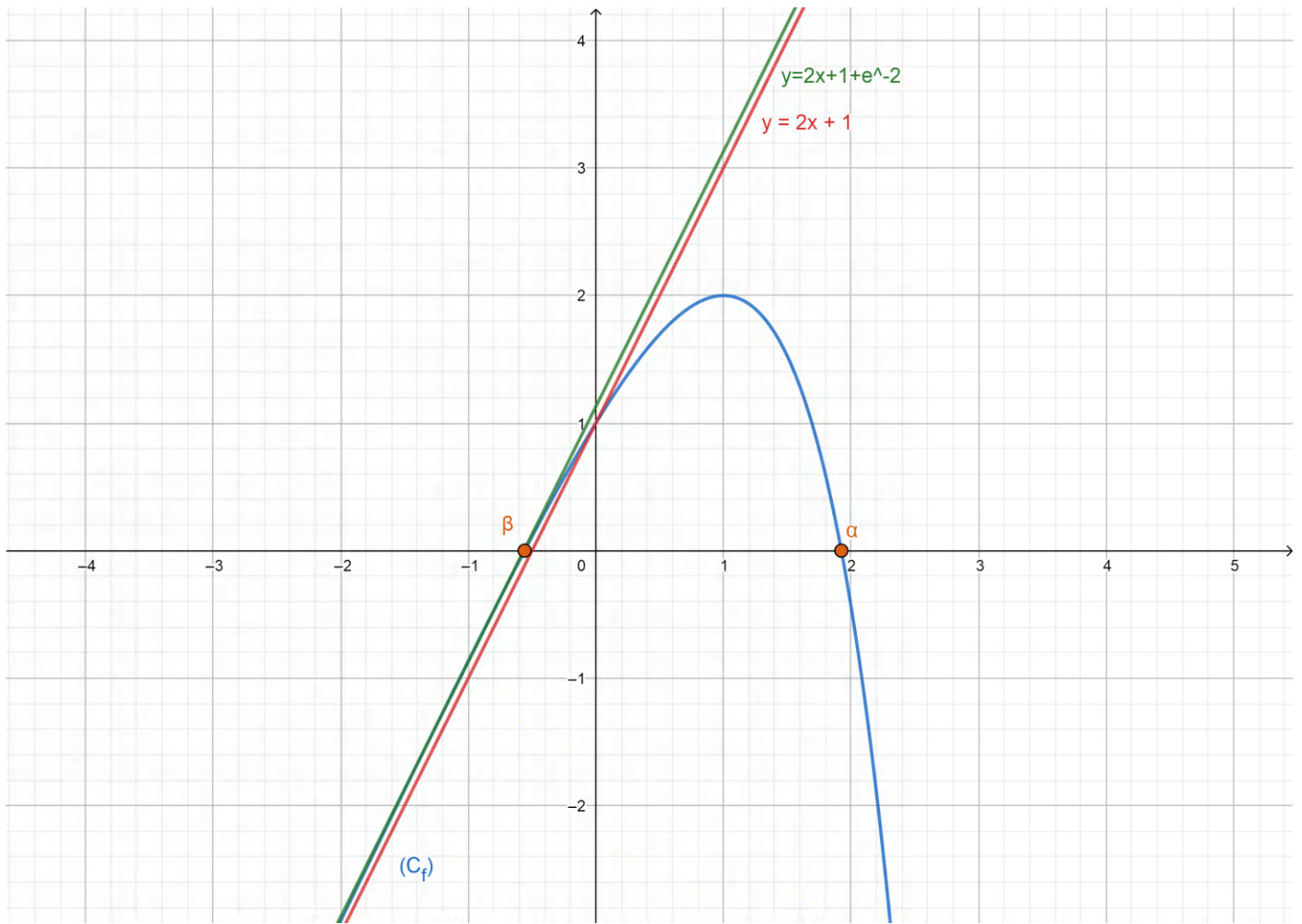
$$\text{ولدينا: } f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $] - 0.6; -0.5[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين α و β نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نرسم **المستقيم المقارب المائل** : $(y = 2x + 1)$.
- نرسم **المماس** (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة (E) $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2x + \ln m$ ومنه:

لما	$\ln m < 1$	أي	$m < e$	أي	$m \in]0; e[$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما	$\ln m = 1$	أي	$m = e$	أي		المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$1 < \ln m < 1 + e^{-2}$	أي	$e < m < e^{1+e^{-2}}$	أي	$m \in]e; e^{1+e^{-2}}[$	المعادلة تقبل حلين سالبين
لما	$\ln m = 1 + e^{-2}$	أي	$m = e^{1+e^{-2}}$	أي		المعادلة تقبل حل مضاعف
لما	$\ln m > 1 + e^{-2}$	أي	$m > e^{1+e^{-2}}$	أي	$m \in]e^{1+e^{-2}}; +\infty[$	المعادلة لا تقبل حلول

07

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g' :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x + 1)e^x - 1] = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x + 1)e^x - 1] = +\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي للنهايات:

• منحنى الدالة g يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^x + (2x + 1)e^x \\ &= (2x + 3)e^x \end{aligned}$$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x + 3)$:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	$f\left(-\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = (2(0) + 1)e^0 - 1 = 0$$

- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(e^x - 1)^2] = +\infty \end{aligned}$$

(2) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2 - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} + x - 2xe^x - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x(e^x - 2)] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ لأن}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق ($f(x) - y$) :

$$\begin{aligned}f(x) - y &= xe^x(e^x - 2) \\ \Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}\end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
xe^x	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $A(0; 0)$ و $B(\ln 2; \ln 2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]0; \ln 2[$.

(3) أ/ تبين أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1) \\ &= (e^x - 1)(e^x - 1 + 2xe^x) \\ &= (e^x - 1)(e^x(2x + 1) - 1) \\ &= (e^x - 1)g(x)\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة $(e^x - 1)$

$$\begin{aligned}e^x - 1 = 0 &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = \ln 1 \\ &\Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$			

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -a(e^a - 1)g(a) + a(e^a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-g(a) + (e^a - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-(2a + 1)e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$

$$\Rightarrow -2a^2(e^a - 1)e^a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه:

$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$

$$y = 0x + 0$$

$$y = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مماس للمنحني (C_f) .

(5) التمثيل البياني:

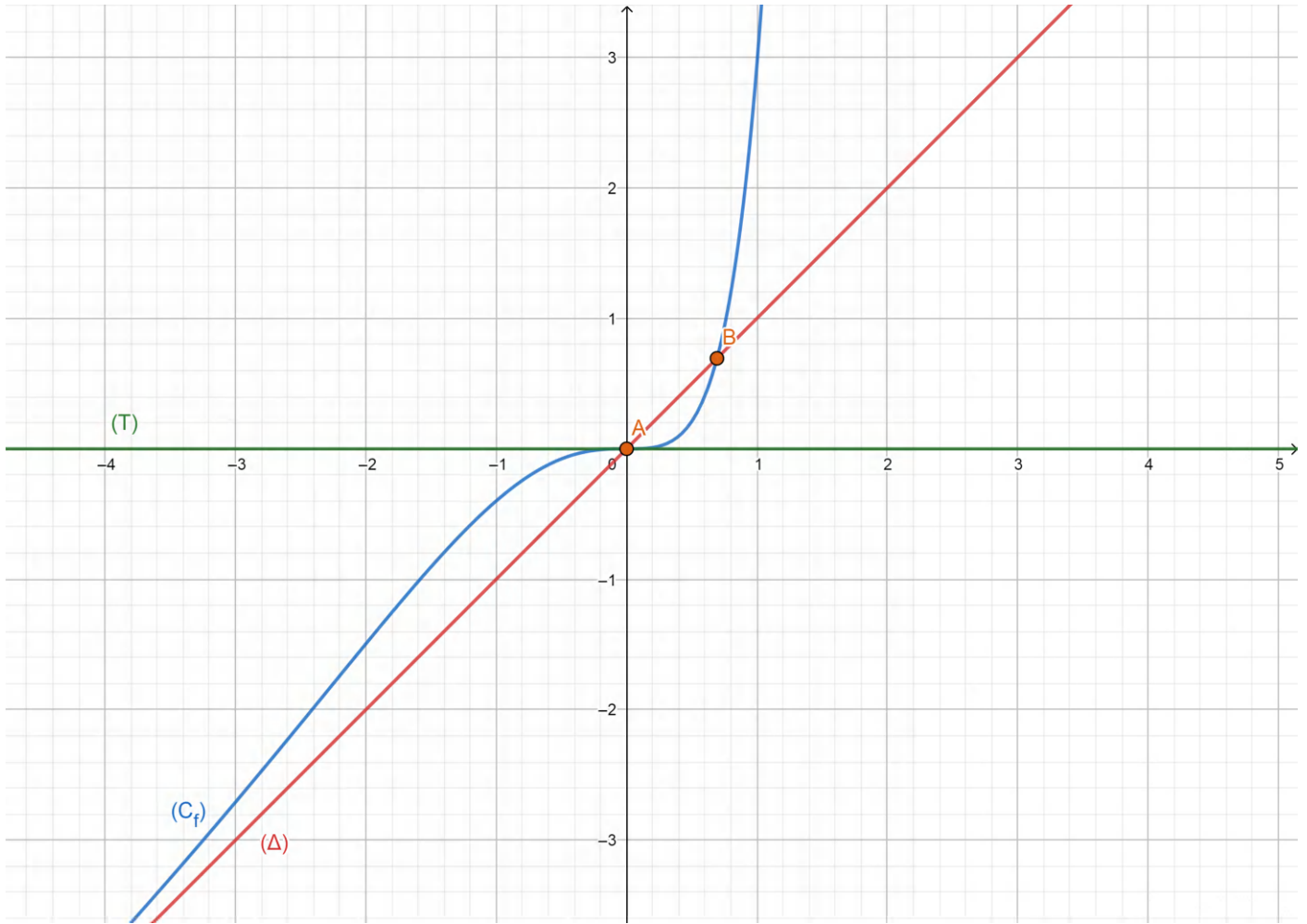
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y = x)$.

• نعين A و B نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) .

• نرسم المماس (T) .

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

(1) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{e^x+1} &= \frac{e^x+1-1}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن الدالة f فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^{-x}+1} - \frac{1}{e^{-x}+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{e^x+1} - 1 + \frac{1}{e^x+1} \\ &= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x+1} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة f فردية

(2) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$

(3) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-(e^x+1)^2 + 4e^x}{2(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} - 1 - 2e^x + 4e^x}{2(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2
\end{aligned}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا $-\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0; 0)$

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

(4) / تبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)] = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{e^x + 1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{2}x + 1]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{2}x + 1] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{2}{e^x + 1} \right]
\end{aligned}$$

$$= 2 - 2 = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \\ &= \frac{-2}{e^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (d)	

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: $(y = -\frac{1}{2}x - 1)$ و $(y = -\frac{1}{2}x + 1)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - 2] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = -\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} \right] = -\infty \end{cases}$$

(2) / تبين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{x-2} = 4$$

$$\Rightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

- تبين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4[$ وتحت على المجال

$$[2 + \ln 4; +\infty[$$

دراسة إشارة الفرق ($f(x) - y$) :

$$f(x) - y = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4 + 2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	-		-
$e^{x-2} - 4$	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2 + \ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2 + \ln 4; +\infty[$

(3) / تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)}$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right)$$

$$= -(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2})$$

$$= -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x-2} = 1$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

(4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$:

$$-2e^{x-2} < 0 \text{ لدينا}$$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	-	0	-
$e^{x-2} - 1$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

(5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

$$f(2 + \ln 3) = 0.93 \quad \text{و} \quad f(2 + \ln 4) = -0.83 \quad \text{ولدينا:}$$

$$f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

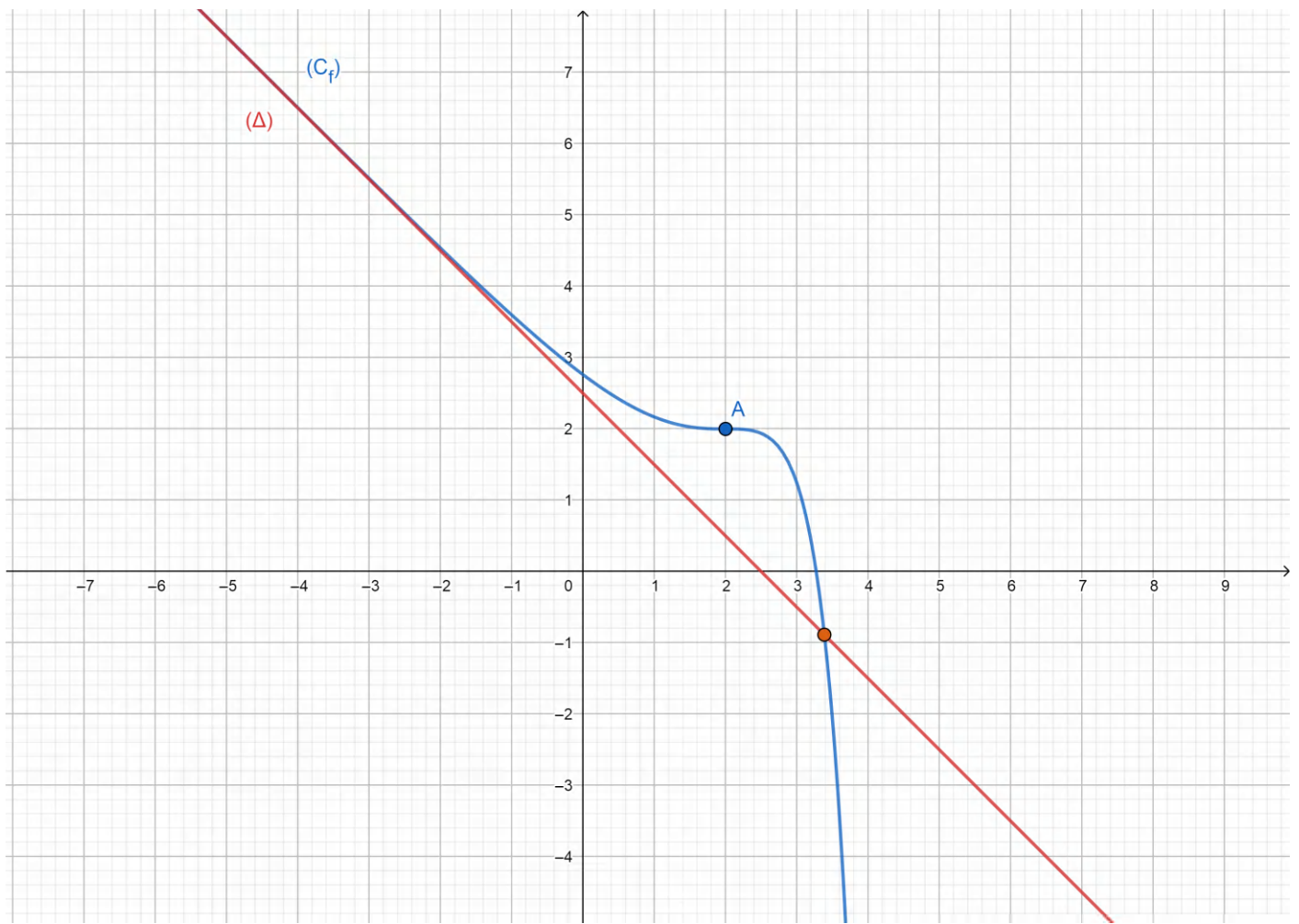
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$$]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4 [$$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و (C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y = -\frac{1}{2}x - 1)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + x + 2] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x + x + 2] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$:

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-2.2) = -0.08$ و $g(-2.1) = 0.02$

ولدينا: $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \right] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

ب/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x \left(\frac{1}{e^x} - x \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{e^x} - x}{\frac{1}{e^x} + 1} \\ &= \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x} \right] = 0$

(2) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-e^x - xe^x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x(1 + x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-(1 + x)(e^x + 1) - (1 - xe^x)]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-e^x - 1 - xe^x - x - 1 + xe^x]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x[e^x + x + 2]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

(4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - xe^x}{e^x + 1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - xe^x + xe^x + x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 + x}{e^x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x) - y)$

$$f(x) - y = \frac{1 + x}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1; -1)$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; +\infty[$.

(5) أ/ تبين أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow e^\alpha + \alpha + 2 = 0 \\ &\Rightarrow e^\alpha = -(\alpha + 2) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1 - \alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{1 + \alpha(\alpha + 2)}{- (\alpha + 2) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{-(\alpha + 1)} \\
&= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)} \\
&= -(\alpha + 1)
\end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:
لدينا:

$$\begin{aligned}
-2.2 &< \alpha < -2.1 \\
-1.2 &< \alpha + 1 < -1.1 \\
1.1 &< -(\alpha + 1) < 1.2
\end{aligned}$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.5) = 0.06$ و $f(0.6) = -0.03$

ولدينا: $f(0.4) \times f(0.6) < 0$

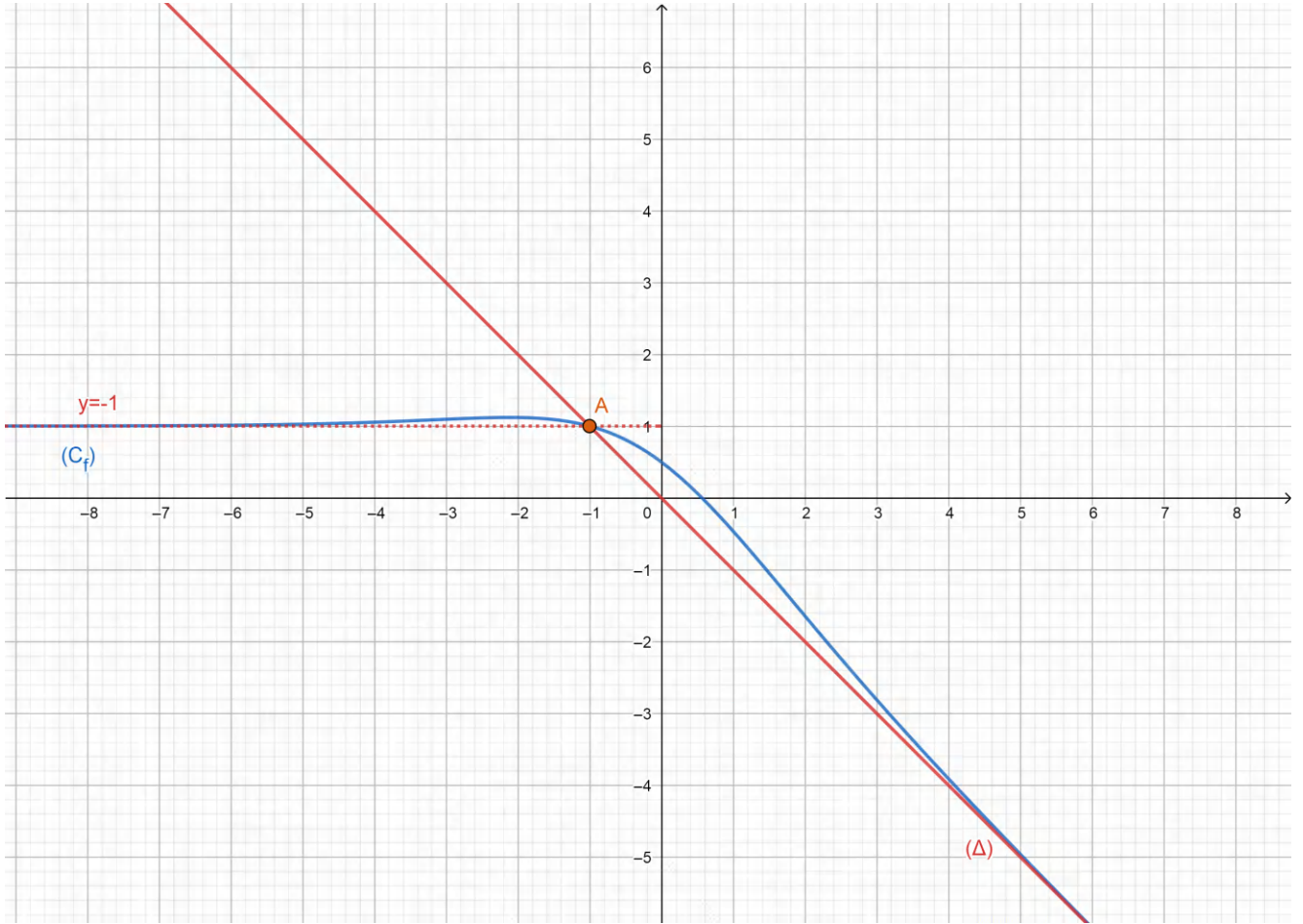
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $]0.5; 0.6[$

ومنه المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة β .

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و (C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y = -x)$
- نعين A نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln m + (x + \ln x)e^x - 1 &= 0 \Rightarrow \ln m + xe^x + e^x \ln m - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \ln m (1 + e^x) = 1 - xe^x \\ &\Rightarrow \ln m = \frac{1 - xe^x}{1 + e^x} \\ &\Rightarrow f(x) = \ln m \end{aligned}$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$

لما	$\ln m < \frac{1}{2}$	أي	$m < \sqrt{e}$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما	$\ln m = \frac{1}{2}$	أي	$m = \sqrt{e}$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$\frac{1}{2} < \ln m < 1$	أي	$\sqrt{e} < m < e$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$1 < \ln m < f(\alpha)$	أي	$e < m < e^{f(\alpha)}$	المعادلة تقبل حلان سالبان
لما	$\ln m = f(\alpha)$	أي	$m = e^{f(\alpha)}$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب
لما	$\ln m > f(\alpha)$	أي	$m > e^{f(\alpha)}$	المعادلة لا تقبل حلول

11

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1) إيجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - 2g(1-t) &= e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow -2g(1-t) &= -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \dots (1) \end{aligned}$$

نضع: $t = 1 - x$ معناه: $x = 1 - t$ ، نجد:

$$\begin{aligned} g(1-t) - 2g(1-1+t) &= e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3 \\ \Rightarrow g(1-t) - 2g(t) &= e^{1-t} - 2e^t + 3t \\ \Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \dots (2) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \\ -e^t - 3 &= -4e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3g(t) &= -3e^t + 3t + 3 \\ \Rightarrow g(t) &= e^t - t - 1 \end{aligned}$$

إذن:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

(2)

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$$v(x) = (g \circ u)(x) \quad \text{أي} \quad v(x) = g(u(x)) = g(-x) \quad \text{و} \quad u(x) = -x$$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة على المجال $[0; +\infty[$
المجال I المجال $g(I)$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$
ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أن الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

$$-g(-x) = -k(x) \quad \text{أي:} \quad g(-x) = k(x)$$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأن: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	0	0	$h(0) = 1$	0	$-\infty$

(4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β :

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

$$h(-1.15) = -0.08 \quad \text{و} \quad h(-1.14) = 0.01 \quad \text{ولدينا:}$$

$$h(-1.14) \times h(-1.15) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15; -1.14[$

ولدينا: $h(1.85) = -0.007$ و $h(1.84) = 0.001$

ولدينا: $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β

(5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + e^x - x - 1}{1 + e^x - x - 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\
 &= \frac{-1}{+\infty} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right] \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن:}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

(2) / أثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$- \text{ اثبات أن: } f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 - g(-x) \\ &= 1 - e^{-x} - x + 1 \\ &= 2 - x - e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x[e^x - x - (1 - e^{-x})(e^x - 1)]}{(e^x - x + 1 - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1 + 1 - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x(2 - x - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(1 + g(x))^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0) = 0$

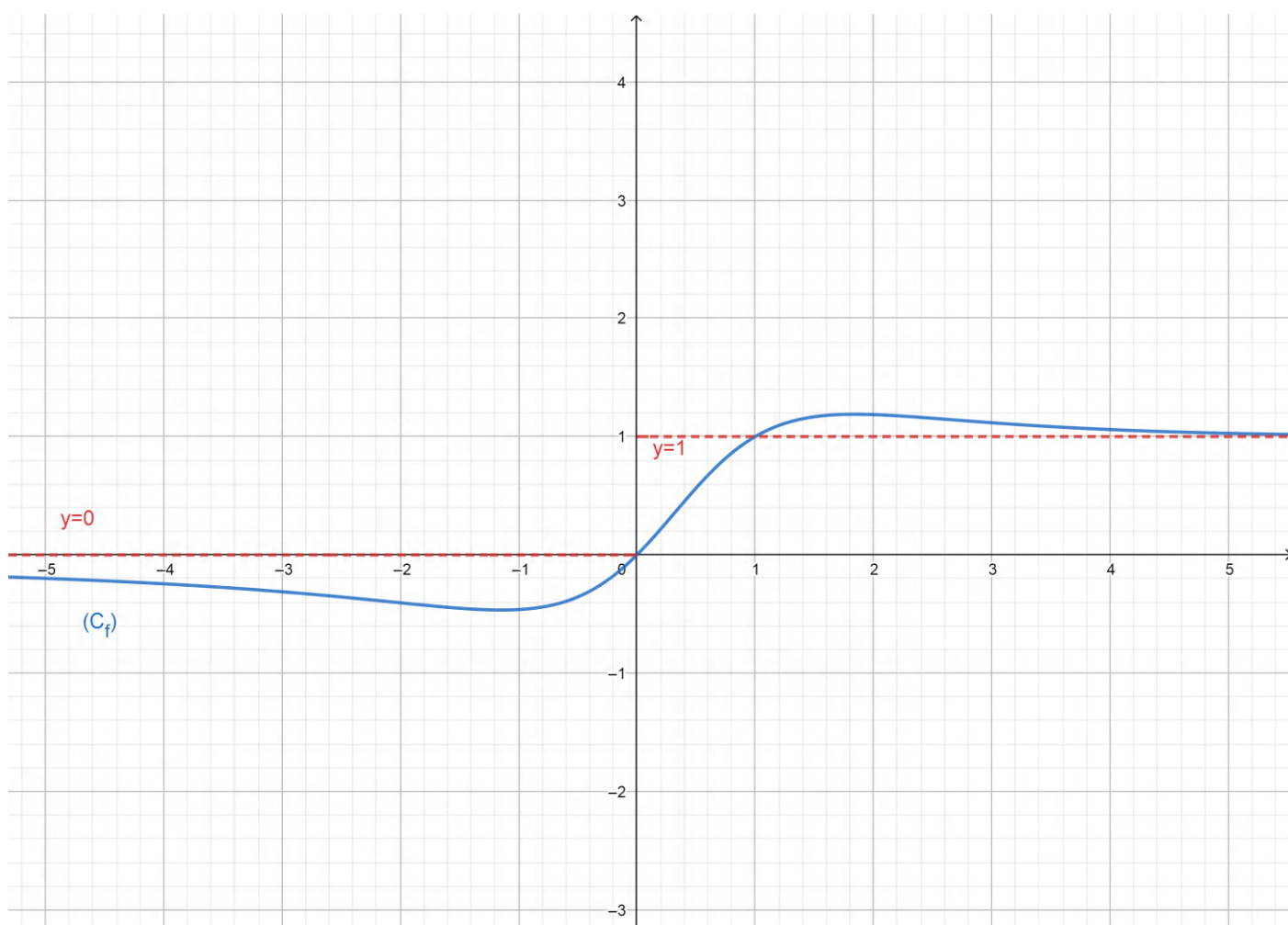
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$f(\beta)$	1

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



12

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة لما: $e^x + 1 \neq 0$

ولدينا $e^x + 1 > 0$

ومنه الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

(2) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.

ب/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

ج/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 + e^{-x}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

(3) اثبات أن الدالة f متزايدة تماماً:

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

(4) تبين أن النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نبين أن $(2(0) - x) \in D_f$:

واضح أن $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبين أن $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} f(2(0) - x) + f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x} + 1) + e^{-x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\ &= \frac{1 + e^x + 1 + e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(5) تعيين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= \frac{e^0}{(e^0 + 1)^2} x + \frac{e^0}{e^0 + 1} \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

أ/ تحليل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$$

ب/

$$\begin{aligned} \bullet g'(x) &= \frac{1}{4} - f'(x) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{4(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\bullet g(0) = 0$$

- دراسة تغيرات الدالة g :

حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^2 = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج/ استنتاج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$:

لدينا من جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-\infty; 0[$.
- (C_f) يقطع (T) في النقطة A .
- (C_f) فوق (T) لما $x \in]0; +\infty[$.

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$.
- نعين A نقطة تقاطع (C_f) مع (T) .
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f) .

