

<https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac>



المادة: رياضيات

الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب

رياضي - تقني رياضي

ملخص الدرس

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

a و b عدنان صحيحان و a غير معدوم.
القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث:
 $b = ka$

من التعريف:

- ◀ نقول كذلك: a قاسم للعدد b .
- ◀ أو نقول كذلك: b مضاعف للعدد a .
- ◀ نكتب a/b ونقرأ a يقسم b .

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$ ، للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

خواص:

①

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.
إذا كان a يقسم b وكان b يقسم c فإن:
 a يقسم c

②

a و b عدنان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m :
 a يقسم mb

③

a و b عدنان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m :
 ma يقسم mb

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

④

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n :
 a يقسم $mb + nc$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة:

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم.
توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$ من الأعداد الصحيحة حيث:
 $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$

من المبرهنة:

◀ نسمي عملية البحث عن الثنائية $(q; r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .
◀ يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .
◀ يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b . فنحصل على:
 $0 \leq r < |b|$ و $a = bq + r$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

تعريف:

a و b عددين طبيعيين غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.
 $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
ونرمز له بـ $PGCD(a; b)$.

◀ $PGCD(a; a) = a$ ◀ $PGCD(1; a) = 1$ ◀ $PGCD(0; a) = a$ (a غير معدوم).◀ مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

◀ مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

①

a و b عددان طبيعيين غير معدومين حيث $a \geq b$. و r باقي قسمة a على b .
 $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$

②

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس.

③

a و b عددان طبيعيين غير معدومين. k عدد طبيعي غير معدوم.
 $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$

④

a و b عددان طبيعيين غير معدومين. d قاسم مشترك للعددين a و b .
 نضع:
 $a = da'$ و $b = db'$
 يكون القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العددين الطبيعيين a' و b' أوليين فيما بينهما.

تعريف:

a و b عددان طبيعيين غير معدومين.
 يكون العددين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.
 القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث:
 $d = PGCD(|a|; |b|)$

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

خاصية:

a و b عددا صحیحان غیر معدومین. k عدد صحیح غیر معدوم.
 $PGCD(ka; kb) = |k| \times PGCD(a; b)$

ملاحظة:

a و b عددا صحیحان غیر معدومین. إذا كان b يقسم a فإن:
 $PGCD(a; b) = |b|$

الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بتريديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n .
 ونرمز بـ: $a \equiv b [n]$ ونقرأ: a يوافق b بتريديد n .

ملاحظة:

x من أجل كل عدد صحيح x :

$$x \equiv 0 [1]$$

مبرهنة:

a و b عددا صحیحان و n عدد طبيعي غير معدوم.
 a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان:
 $a - b$ مضاعف لـ n

نتيجة:

a و b عددا صحیحان و n عدد طبيعي غير معدوم.
 a و b متوافقان بتريديد n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n .

خواص:

①

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$).
 كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بتريديد n .

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

②

 n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا:

$$a \equiv a [n]$$

③

 n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددين صحيحان. إذا كان $a \equiv b [n]$ فإن:

$$b \equiv a [n]$$

④

 n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c أعداد صحيحة.إذا كان $a \equiv b [n]$ و $b \equiv c [n]$ فإن:

$$a \equiv c [n]$$

⑤

 n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c و d أعداد صحيحة.إذا كان $a \equiv b [n]$ و $c \equiv d [n]$ فإن:

$$a + c \equiv b + d [n]$$

⑥

 n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c و d أعداد صحيحة.إذا كان $a \equiv b [n]$ و $c \equiv d [n]$ فإن:

$$ac \equiv bd [n]$$

⑦

 n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددين صحيحان.من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $a \equiv b [n]$ فإن:

$$ka \equiv kb [n]$$

⑧

 n و p عددين طبيعيين غير معدومين. a و b عددين صحيحان.إذا كان $a \equiv b [n]$ فإن:

$$a^p \equiv b^p [n]$$

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

التعداد:

مبرهنة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$$a \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \text{ مع } 0 \leq r_a < x \text{ و } 0 < q < x$$

التعداد ذو الأساس x :

قاعدة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

(1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي): a يمثل برمز وحيد يسمى رقا.

(2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي): من المبرهنة، a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x .

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$$a \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \text{ مع } 0 \leq r_a < x \text{ و } 0 < q < x$$

يمثل العدد a كالي:

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2} \dots r_1r_0}$$

الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2} \dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x .

ملاحظة:

إذا كان $x = 10$ نكتب:

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2} \dots r_1r_0}$$

الأعداد الأولية:

تعريف:

القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$:

1 و n نفسه

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

ملاحظات:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم.
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو العدد 1.
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد.
- 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25.

خواص:

①

كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل على الأقل قاسما أوليا.

②

كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل قاسما أوليا a حيث:

$$a \leq \sqrt{n}$$

③

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

طريقة:

- لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) أوليا أم لا، نحسب $\sqrt{n}$.
- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي مربع تام فإن n غير أولي.
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي، نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب.
- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما تتوقف، ونقر أن n غير أولي.
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة، نقر أن n أولي.

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.

ملاحظة:

نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية.

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

خاصية:

a و b عددين طبيعيين كلاهما أكبر تماماً من 1.
يكون العدد b قاسماً للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجوداً في تحليل a و يأتس إما مساوٍ وإما أصغر من أسه في تحليل a .

طريقة:

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية.
إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تعريف:

a و b عددين طبيعيين غير معدومين. M_a و M_b مجموعتا مضاعفات a و b على الترتيب.

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b .
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

ونرمز له بـ $PPCM(a; b)$.

المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0.

 $PPCM(a; a) = a$ $PPCM(1; a) = a$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف:

 a و b عددين صحيحان غير معدومين.المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث:

$$m = PPCM(|a|; |b|)$$

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

خاصية المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية:

a و b عددين طبيعيين غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$$PPCM(ka; kb) = |k| \times PPCM(a; b)$$

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس.

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس.

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر.

$$PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$$

مبرهنة بيزو:

مبرهنة:

يكون عددين صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا فقط إذا وجد عددين صحيحان u و v حيث:

$$au + bv = 1$$

عبد الحميد

تفهم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

خواص:

①

إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدداً صحيحين u و v حيث:

$$au + bv = 1$$

②

إذا كان a عدداً أولياً فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

③

إذا كان a عدداً أولياً مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

مبرهنة غوص:

مبرهنة:

 a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أولياً مع b فإن: a يقسم c

خواص:

①

 a و b عدداً طبيعيين غير معدومين و p عدد أولي.إذا كان p يقسم الجداء ab فإن: p يقسم a أو p يقسم b

②

 a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.إذا كان a مضاعفاً للعددين b و c وكان c و b أوليين فيما بينهما فإن: a مضاعف للجداء bc 

- جميع الحقوق محفوظة -

<https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac>

الأستاذ: عبد الحميد



المادة: رياضيات

شعبة الرياضيات

سلسلة التمارين

عبد الحميد

تفعل الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

سلسلة التمارين

تحضير امتحان شهادة البكالوريا



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

ع.الحمد



https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac



ع.الحمد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة الرياضيات

(2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9. (3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد: $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9. (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^{6n} - 1$. أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9. ب- حل المعادلة ذات المجهول (x, y): $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \dots (2)$ حيث x و y عدنان صحيحان. ج- عين الثنائية (x_0, y_0) حل المعادلة (2)، حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين مع: $y_0 \geq 25$. ❖ دورة 2010 - الموضوع الثاني ❖ (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13. (2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين: $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ يقبل القسمة على 13. (3) عين، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2005} على 13. (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي p: $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$. أ- من أجل: $p = 3n$، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13. ب- برهن أنه إذا كان: $p = 3n + 1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13. ج- عين، من أجل $p = 3n + 2$ باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13. (5) يكتب العدنان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي: $\begin{cases} a = \overline{1001001000} \\ b = \overline{1000100010000} \end{cases}$	❖ دورة 2008 - الموضوع الأول ❖ نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$ (1) أ- بين أن (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$. ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة (E)، فإن: $x \equiv 5 [7]$ (2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7. ب- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E)، وتحقق: $5^x + 5^y \equiv 3 [7]$ ❖ دورة 2009 - الموضوع الأول ❖ x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي. A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$ (1) أ- أنشر العبارة: $(5x^2 + 6)(x + 1)$، ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$ ب- أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري. (2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584. ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق: $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$ ❖ دورة 2010 - الموضوع الأول ❖ (1) نعتبر المعادلة: $7x + 65y = 2009 \dots (1)$ حيث x و y عدنان صحيحان. أ- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلاً للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7. ب- حل المعادلة (1).
---	--

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة الرياضيات

(3) N عدد طبيعي يكتب: $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\gamma; \beta)$ حل للمعادلة (1). - عين α, β, γ، ثم اكتب N في النظام العشري. ❖ دورة 2013 - الموضوع الأول ❖ (1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β، حيث: $\beta = n + 3 \text{ و } \alpha = 2n^3 - 14n + 2$ أ- بين أن: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر). ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$؟ ج- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون: $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ (2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11. ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 \pmod{11} \\ n \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$ ❖ دورة 2013 - الموضوع الثاني ❖ (1) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0 \pmod{n+1}$ ب- عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b-a)(a+b) = 24$ ج- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$. (2) α و β عددين طبيعيين مكتوبان في النظام دي الأساس 5 على الشكل: $\beta = \overline{3403} \text{ و } \alpha = \overline{10141}$ أ- أكتب العددين α و β في النظام العشري. ب- عين الثنائية $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$	أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري. ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13. ❖ دورة 2011 - الموضوع الثاني ❖ (1) نعتبر المعادلة: $13x - 7y = -1 \dots (E)$ حيث x و y عددين صحيحان. - حل المعادلة (E). (2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv -1 \pmod{7} \\ a \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$ (3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13. (4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي: $b = \overline{\alpha 00 \beta 086}$ حيث α و β عددين طبيعيين، مع: $\alpha \neq 0$. - عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91. ❖ دورة 2012 - الموضوع الأول ❖ (1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2011x - 1432y = 31 \dots (1)$ أ- أثبت أن العدد 2011 أولي. ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1). (2) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد: $2011^{1432 \cdot 2012}$ على 7. ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0 \pmod{7}$
--	---

تحضير امتحان شهادة البكالوريا



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

ع.الحمد



https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac



ع.الحمد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة الرياضيات

- عين x و y علما أن: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8 [22] \end{cases}$ (4) a, b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c. أ- باستعمال مبرهنة ييزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$. ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $PGCD(a; b^n) = 1$ (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر). ج- استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1954^{1962} و 1962^{1954}. ❖ دورة 2015 - الموضوع الثاني ❖ عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في الحالة التالية مع التعليل. (3) a, b, c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9. $\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري. من أجل كل الأعداد a, b, c و d، يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان: أ- العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11. ب- العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11. ج- العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11. ❖ دورة 2016 - الموضوع الأول ❖ (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ (1) أحسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q. (2) نضع: $u_1 = e^4$ و $u_3 = e^3$. أ- عبر عن u_n بدلالة n.	(3) أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478. ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2013x - 1434y = 27$ ❖ دورة 2014 - الموضوع الأول ❖ (1) نعتبر المعادلة (E): $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددا صحيحان. أ- أحسب $PGCD(2013; 1962)$. ب- استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا. ج- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0 [6]$ د- استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث: $80 < x_0 < 74$ ثم حل المعادلة (E). (2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E). أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟ ب- عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $PGCD(a; b) = 18 \text{ و } 671a - 654b = 18$ ❖ دورة 2015 - الموضوع الأول ❖ (1) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7. ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد: $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ (2) أ- بين أن 89 عدد أولي. ب- عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832. ج- بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما. (3) x و y عددا طبيعيان غير معدومين قاسمتهما المشترك الأكبر هو 2.
--	---

تحضير امتحان شهادة البكالوريا



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

ع.الحمد



https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac



ع.الحمد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة الرياضيات

- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$. ج- جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^7x + 1437^3y \equiv 0 \pmod{11}$ ❖ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة العادية ❖ (1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $104x - 20y = 272 \pmod{E}$ حيث x و y عدنان صحيحان. أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً. ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3 \pmod{5}$ ثم استنتج حلول المعادلة (E). (2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عدنان طبيعيين. عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري. (3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$ حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$ ❖ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية ❖ نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $63x + 5y = 159 \pmod{E}$ (1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً. (2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة فإن $x \equiv 3 \pmod{5}$ ثم استنتج حلول المعادلة (E). (3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. جد العددين الطبيعيين α و β واكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.	ب- نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$ أحسب S_n بدلالة n. (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$ أ- بين أن: $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$ ب- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$ ج- عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n; a_n) = 7$ (4) أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7. (5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0 \pmod{7} \\ n \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$ (6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7. ❖ دورة 2016 - الموضوع الثاني ❖ (1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11. ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11. (2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $7x - 3y = 8$ حيث x و y عدنان طبيعيين. أ- حل المعادلة (E). ب- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E). - ماهي القيم الممكنة للعدد d؟
--	--

تحضير امتحان شهادة البكالوريا



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

ع.الحمد



https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac



ع.الحمد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة الرياضيات

(2) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$ (3) عين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة: $\begin{cases} \alpha \equiv 2019 [2017] \\ \alpha \equiv 2019 [1009] \end{cases}$ (4) أ- n عدد طبيعي، أدرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9. ب- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $L = \overline{111 \dots 1}$ 2018 مرة - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.	(4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5. ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد: $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5، حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي. ❖ دورة 2017 - الموضوع الثاني - الدورة الاستثنائية ❖ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بخدها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ (1) أ- بين، من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ب- تحقق، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن العددين الطبيعيين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما. (2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0. ب- عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$ (3) عين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$. (4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7. ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n القسمة على 7 حيث: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ ❖ دورة 2018 - الموضوع الثاني ❖ (1) α و β عددين طبيعيين بحيث: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$ - عين العددين α و β ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.
---	--

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

ع.الحمد

<https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac>

الأستاذ: عبد الحميد



المادة: رياضيات

شعبة التقني رياضي

سلسلة التمارين

عبد الحميد

تفليج الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

سلسلة التمارين

(2) عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5. - استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15. (3) نأخذ: $\alpha = 4$. - أكتب العدد n في النظام العشري. ❖ دورة جوان 2010 - الموضوع الثاني ❖ (1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13. (2) تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ (3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ ❖ دورة جوان 2011 - الموضوع الأول ❖ أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية: (1) المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حولا في مجموعة الأعداد الصحيحة. (2) في نظام التعداد ذي الأساس 7، يكون: $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$ (3) باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 هو 6 حيث: $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011}$ ❖ دورة جوان 2011 - الموضوع الثاني ❖ من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ (1) تحقق أن: $4 \equiv -3 \pmod{7}$ ثم بين أن: $A_3 \equiv 6 \pmod{7}$. (2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7. (3) بين أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7. (4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟	❖ دورة جوان 2008 - الموضوع الأول ❖ n عدد طبيعي أكبر من 5. (1) a و b عددين طبيعيين حيث: $b = 2n + 3 \text{ و } a = n - 2$ أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟ ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7. ج- عين قيم n التي يكون من أجلها: $PGCD(a; b) = 7$. (2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث: $q = n^2 - 7n + 10 \text{ و } p = 2n^2 - 7n - 15$ أ- بين أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$. ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p; q)$. ❖ دورة جوان 2008 - الموضوع الثاني ❖ نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية: $4x - 9y = 319 \dots (I)$ (1) - تأكد أن الثنائية $(82, 1)$ حل للمعادلة (I). - حل المعادلة (I). (2) عين الثنائيات (a, b) الصحيحة، حلول المعادلة: $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (II)$ (3) استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين. ❖ دورة جوان 2010 - الموضوع الأول ❖ نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي. (1) عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.
---	---

ب- استنتج حلول المعادلة (E). (2) a و b عدنان طبيعيين و S العدد الذي يحقق: $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ أ- بين أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E). ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟ (3) n عدد طبيعي باقي قسمته 11 على 1 وباقي قسمته على 7 هو 2. - عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$. ❖ دورة جوان 2014 - الموضوع الثاني ❖ n و p عدنان طبيعيين. (1) أدرس، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n. (2) نضع: $D_p = 5^p$ و $C_n = 16n + 9$. أ- بين أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$ ب- عين n من أجل: $p = 6$. ❖ دورة جوان 2015 - الموضوع الأول ❖ (1) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13. ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 13 للعدد: $[42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3]$ (2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6)8^{2n} [13]$ ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي حتى يكون: $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$ ❖ دورة جوان 2016 - الموضوع الأول ❖ نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 7y = 19 \dots (E)$ حيث x و y عدنان صحيحان.	❖ دورة جوان 2012 - الموضوع الأول ❖ (1) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي قسمة 9^n على 11. (2) ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟ (3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11. (4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11. ❖ دورة جوان 2012 - الموضوع الثاني ❖ نسعي (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$). (1) بين أن العدد 153 حل للجملة (S). (2) إذا كان x_0 حلا ل (S)، بين أن: $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases} \right) \text{ يكافئ } (S)$ (3) حل الجملة (S). (4) يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع ل 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع ل 7 كتب بقي لديه 6 كتب. - إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا، ما عدد هذه الكتب؟ ❖ دورة جوان 2013 - الموضوع الثاني ❖ x و y عدنان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $11x + 7y = 1$ (1) أ- عين الثنائية $(x_0; y_0)$، حل المعادلة (E) التي تحقق: $x_0 + y_0 = -1$
--	--

تحضير امتحان شهادة البكالوريا



السنة الثالثة من التعليم الثانوي

ع.الحمد



https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac



ع.الحمد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد والحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1$ مضاعف للعدد 5. (4) عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد: $3^{4n} + 27^n - 4$ قابلاً للقسمة على 5.	(1) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$، ثم حل المعادلة (E). (2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق: $\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$ ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42. (3) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $x + y - 1 \leq 13$ (4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7. ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة: $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$ ❖ دورة جوان 2017 - الموضوع الثاني - الدورة العادية ❖ (1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $4^{5k} \equiv 1 [11]$ (2) استنتج تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11. (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1$ يقبل القسمة على 11. (4) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3$ قابلاً للقسمة على 11. ❖ دورة جوان 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية ❖ (1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5. (2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.
--	---

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

ع.الحمد

<https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac>

الأستاذ: عبد الحميد



المادة: رياضيات

شعبة رياضيات + تقني رياضي

تمارين محلولة

عبد الحميد

تفعل الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد والحساب

تمارين محلولة



تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولاً:

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

لدينا:

$$PGCD(104; 20) = 4$$

والعدد 4 يقسم العدد 272.

لأن:

$$272 = 68 \times 4$$

ومنه:

المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن:

$$x \equiv 3 [5]$$

إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) نكتب:

$$104x - 20y = 272$$

$$4 \times 26x - 4 \times 5y = 4 \times 68$$

$$26x - 5y = 68 \dots (*)$$

$$26x = 5y + 68$$

$$26x = 5y + 65 + 3$$

$$26x = 5(y + 13) + 3$$

$$26x = 5y' + 3$$

$$26x \equiv 3 [5]$$

حيث: $26 \equiv 1 [5]$

ومنه:

$$x \equiv 3 [5]$$

استنتج حلول المعادلة (E):

لدينا من (1) أ- أن:

$$x \equiv 3 [5]$$

أي:

$$x = 5k + 3 / k \in \mathbb{Z}$$

نعرض $x = 5k + 3$ في المعادلة (*) فنكتب:

$$26(5k + 3) - 5y = 68$$

$$130k + 78 - 5y = 68$$

$$130k + 10 = 5y$$

$$5 \times 26k + 5 \times 2 = 5y$$

نجد:

$$y = 26k + 2 / k \in \mathbb{Z}$$

بكالوريا 2017 العادية - شعبة الرياضيات - الموضوع الأول

النميرين

(1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

حيث x و y عدداً صحيحان.

أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين

أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن:

$$x \equiv 3 [5]$$

ثم استنتج حلول المعادلة (E).

(2) λ عدد طبيعي يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي

أساسه 4، ويكتب $1\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

حيث α و β عدداً طبيعيين.

عين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري.

(3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين

الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017$$

حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$.

الحل

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

(1) أ- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104:

بتطبيق خوارزمية إقليدس، نشكل الجدول التالي:

5	5	حاصل القسمة
4	20	104
0	4	باقي القسمة

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمة الإقليدية هو 4.

ومنه:

القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 هو 4.

ونكتب:

$$PGCD(104; 20) = 4$$

ومنه: حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي: $(\alpha; \beta) = \{(5m + 3; 26m + 2)\} / m \in \mathbb{N}$ لدينا: $0 \leq \alpha \leq 3$ $0 \leq 5m + 3 \leq 3$ $-3 \leq 5m \leq 0$ $-\frac{3}{5} \leq m \leq 0$ أي: $m = 0$ ومنه: $\alpha = 3$ ولدينا: $0 \leq \beta \leq 3$ $0 \leq 26m + 2 \leq 3$ $-2 \leq 26m \leq 1$ $-\frac{1}{13} \leq m \leq \frac{1}{26}$ أي: $m = 0$ ومنه: $\beta = 2$ كتابة λ في النظام العشري: نعوض $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ في المعادلة (1) ثم نتحقق من النتيجة بالتعويض في المعادلة (2) فنكتب: $\lambda = 320\alpha + 16\beta + 1025$ $\lambda = 320 \times 3 + 16 \times 2 + 1025$ نجد: $\lambda = 2017$ التحقق: $\lambda = 216\alpha + 36\beta + 1297$ $\lambda = 216 \times 3 + 36 \times 2 + 1297$ نجد: $\lambda = 2017$	ومنه: حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = \{(5k + 3; 26k + 2)\} / k \in \mathbb{Z}$ (2) تعيين α و β: $\begin{cases} \lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta 01}^4 \\ \lambda = \overline{1\alpha\beta 01}^6 \end{cases}$ لدينا من جهة: $\lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta 01}^4$ حيث: $0 \leq \beta \leq 3, 0 \leq \alpha \leq 3$ ولدينا من جهة أخرى: $\lambda = \overline{1\alpha\beta 01}^6$ حيث: $0 \leq \beta \leq 5, 0 \leq \alpha \leq 5$ ومنه: $0 \leq \beta \leq 3, 0 \leq \alpha \leq 3$ فنكتب من جهة: $\lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta 01}^4$ $\lambda = 1 \times 4^0 + 0 \times 4^1 + \beta \times 4^2 + \alpha \times 4^3 + \alpha \times 4^4 + 1 \times 4^5$ $\lambda = 1 + 0 + 16\beta + 64\alpha + 256\alpha + 1024$ $\lambda = 320\alpha + 16\beta + 1025 \dots (1)$ ونكتب من جهة أخرى: $\lambda = \overline{1\alpha\beta 01}^6$ $\lambda = 1 \times 6^0 + 0 \times 6^1 + \beta \times 6^2 + \alpha \times 6^3 + 1 \times 6^4$ $\lambda = 1 + 0 + 36\beta + 216\alpha + 1296$ $\lambda = 216\alpha + 36\beta + 1297 \dots (2)$ بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب: $320\alpha + 16\beta + 1025 = 216\alpha + 36\beta + 1297$ $320\alpha - 216\alpha + 16\beta - 36\beta = 1297 - 1025$ $104\alpha - 20\beta = 272 \dots (3)$ حيث: $0 \leq \beta \leq 3, 0 \leq \alpha \leq 3$ لاحظ أن المعادلتين (3) و (E) متكافئتان.
--	--

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$ $1009 = 2 \times 504 + 1$ $1009 = 3 \times 336 + 1$ $1009 = 5 \times 201 + 4$ $1009 = 7 \times 144 + 1$ $1009 = 11 \times 91 + 8$ $1009 = 13 \times 77 + 8$ $1009 = 17 \times 59 + 6$ $1009 = 19 \times 53 + 2$ $1009 = 23 \times 43 + 20$ $1009 = 29 \times 34 + 23$ $1009 = 31 \times 32 + 17$ لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة. ومنه: العدد 1009 أولي. تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$ لدينا: معناه: $d = PGCD(a; b)$ حيث: $\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \end{cases}$ ولدينا: $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ أي: $d \times m = a \times b$ بالتعويض نكتب: $d \times m = d \times a' \times d \times b'$ نجد: $m = d \times a' \times b'$ ولدينا حسب نص التمرين أن: $2m - d = 2017$	(3) التحقق أن كلا من 1009 و 2017 عدد أولي: التحقق أن 2017 عدد أولي: لدينا: $\sqrt{2017} = 44,91$ بما أن $\sqrt{2017}$ غير طبيعي، نقسم 2017 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2017}$ على الترتيب. أي: نقسم 2017 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب: $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$ $2017 = 2 \times 1008 + 1$ $2017 = 3 \times 672 + 1$ $2017 = 5 \times 403 + 2$ $2017 = 7 \times 288 + 1$ $2017 = 11 \times 183 + 4$ $2017 = 13 \times 155 + 2$ $2017 = 17 \times 118 + 11$ $2017 = 19 \times 106 + 3$ $2017 = 23 \times 87 + 16$ $2017 = 29 \times 69 + 16$ $2017 = 31 \times 65 + 2$ $2017 = 37 \times 54 + 19$ $2017 = 41 \times 49 + 8$ $2017 = 43 \times 46 + 39$ لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة. ومنه: العدد 2017 أولي. التحقق أن 1009 عدد أولي: لدينا: $\sqrt{1009} = 31,76$ بما أن $\sqrt{1009}$ غير طبيعي، نقسم 1009 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{1009}$ على الترتيب. أي: نقسم 1009 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:
--	--

بالتعويض:

$$2 \times d \times a' \times b' - d = 2017$$

$$d(2a'b' - 1) = 1 \times 2017 \quad (2017 \text{ عدد أولي})$$

نميز حالتين:

$$\begin{cases} d = 2017 \\ 2a'b' - 1 = 2017 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} d = 1 \\ 2a'b' - 1 = 2017 \end{cases}$$

الحالة الأولى: $d = 1$

معناه:

$$2a'b' - 1 = 2017$$

$$2a'b' = 2018$$

$$a'b' = 1009$$

$$a'b' = 1 \times 1009 \quad (1009 \text{ عدد أولي})$$

نميز حالتين:

$$\begin{cases} a' = 1009 \\ b' = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1009 \end{cases}$$

قيم a' و b' هي:

$$(a'; b') = \{(1; 1009), (1009; 1)\}$$

ومنه:

الناتجتين $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d = 1$ هما:

$$(a; b) = \{(1; 1009), (1009; 1)\}$$

الحالة الثانية: $d = 2017$

معناه:

$$2017(2a'b' - 1) = 2017$$

$$2a'b' - 1 = 1$$

$$2a'b' = 2$$

$$a'b' = 1$$

نميز حالة واحدة:

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1 \end{cases}$$

قيم a' و b' هي:

$$(a'; b') = \{(1; 1)\}$$

ومنه:

الناتج $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d = 2017$ هو:

$$(a; b) = \{(2017; 2017)\}$$

نتيجة:

الناتج $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017$$

هي:

$$(a; b) = \{(1; 1009), (1009; 1), (2017; 2017)\}$$

تلخص نتائج السؤال (3) في الجدول التالي:

	الحالة الأولى		الحالة الثانية
d	1	1	2017
a'	1	1009	1
b'	1009	1	1
$a = da'$	1	1009	2017
$b = db'$	1009	1	2017
$m = da'b'$	1009	1009	2017
$2m - d$	2017	2017	2017

جميع الحقوق محفوظة
- BAC -
ع.الحمد

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حولا: $63x + 5y = 159 \dots (E)$ لدينا: $PGCD(63; 5) = 1$ والعدد 1 يقسم العدد 159 (العدد 1 يقسم كل الأعداد)، ومنه: المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$. (2) نبرهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن: $x \equiv 3 [5]$ إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) نكتب: $63x + 5y = 159$ $63x = 159 - 5y$ $63x = 155 + 4 - 5y$ $63x = 5(31 - y) + 4$ $63x = 5y' + 4$ $63x \equiv 4 [5] \quad / \quad (PGCD(63; 5) = 1)$ حيث: $63x \equiv 3x [5]$ فنكتب: $3x \equiv 4 [5] \quad / \quad (PGCD(3; 5) = 1)$ بضرب طرفي الموافقة في العدد 2 نكتب: $2 \times 3x \equiv 2 \times 4 [5]$ $6x \equiv 8 [5]$ حيث: $8 \equiv 3 [5] \quad \text{و} \quad 6x \equiv x [5]$ ومنه: $x \equiv 3 [5]$ استنتج حلول المعادلة (E): لدينا من (2) أن: $x \equiv 3 [5]$ أي: $x = 5k + 3 \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$ نعوض $x = 5k + 3$ في المعادلة (E) فنكتب:	دورة 2017 الاستثنائية - شعبة الرياضيات - الموضوع الأول التمرين نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $63x + 5y = 159 \dots (E)$ (1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حولا. (2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن: $x \equiv 3 [5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E). (3) λ عدد طبيعي يكتب $5\alpha 0\alpha$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\beta 10\beta 0$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري. (4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5. ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد: $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5. حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي. الحل $63x + 5y = 159 \dots (E)$ (1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما: نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 63 و 5: $63 = 5 \times 12 + 3$ $5 = 3 \times 1 + 2$ $3 = 2 \times 1 + 1$ $2 = 1 \times 2 + 0$ آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسومات الإقليدية هو 1. أي: $PGCD(63; 5) = 1$ ومنه: العددان 63 و 5 أوليان فيما بينهما.
--	--

$10 \times 63\beta - 10 \times 5\alpha = 10 \times 159$ $63\beta - 5\alpha = 159$ ونكتب: $63\beta + 5(-\alpha) = 159 \dots (3)$ ولدينا: $63x + 5y = 159 \dots (E)$ بالمطابقة: $\begin{cases} \beta = x \\ \alpha = -y \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \alpha = 63m + 6 \\ \beta = 5m + 3 \end{cases} / m \in \mathbb{N}$ ومنه: حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي: $(\alpha; \beta) = \{(63m + 6; 5m + 3) / m \in \mathbb{N}\}$ لدينا: $0 \leq \alpha \leq 6$ $0 \leq 63m + 6 \leq 6$ $-6 \leq 63m \leq 0$ $-\frac{6}{63} \leq m \leq 0$ أي: $m = 0$ ومنه: $\alpha = 6$ ولدينا: $0 \leq \beta \leq 4$ $0 \leq 5m + 3 \leq 4$ $-3 \leq 5m \leq 1$ $-\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{1}{5}$ أي: $m = 0$ ومنه: $\beta = 3$ قيم α و β هي: $(\alpha; \beta) = \{(6; 3)\}$	$63(5k + 3) + 5y = 159$ $315k + 189 + 5y = 159$ $-315k - 30 = 5y$ $-5 \times 63k - 5 \times 6 = 5y$ نجد: $y = -63k - 6 / k \in \mathbb{Z}$ ومنه: حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = \{(5k + 3; -63k - 6) / k \in \mathbb{Z}\}$ (3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β: $\begin{cases} \lambda = 5\alpha 0\alpha^7 \\ \lambda = \beta 10\beta 0^5 \end{cases}$ لدينا من جهة: $\lambda = 5\alpha 0\alpha^7$ حيث: $0 \leq \alpha \leq 6$ ولدينا من جهة أخرى: $\lambda = \beta 10\beta 0^5$ حيث: $0 \leq \beta \leq 4$ فنكتب من جهة: $\lambda = 5\alpha 0\alpha^7$ $\lambda = \alpha \times 7^0 + 0 \times 7^1 + \alpha \times 7^2 + 5 \times 7^3$ $\lambda = \alpha + 0 + 49\alpha + 1715$ $\lambda = 50\alpha + 1715 \dots (1)$ ونكتب من جهة أخرى: $\lambda = \beta 10\beta 0^5$ $\lambda = 0 \times 5^0 + \beta \times 5^1 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^3 + \beta \times 5^4$ $\lambda = 0 + 5\beta + 0 + 125 + 625\beta$ $\lambda = 630\beta + 125 \dots (2)$ بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب: $50\alpha + 1715 = 630\beta + 125$ $630\beta - 50\alpha = 1715 - 125$ $630\beta - 50\alpha = 1590$
---	---

كتابة $\lambda + 2$ في النظام العشري:
نعوض $\alpha = 6$ في المعادلة (1) ثم نتحقق من النتيجة بتعويض $\beta = 3$ في المعادلة (2) فنكتب:

$$\lambda + 2 = 50\alpha + 1715 + 2$$

$$\lambda + 2 = 50 \times 6 + 1715 + 2$$

نجد:

$$\lambda + 2 = 2017$$

التحقق:

$$\lambda + 2 = 630\beta + 125 + 2$$

$$\lambda + 2 = 630 \times 3 + 125 + 2$$

نجد:

$$\lambda + 2 = 2017$$

(4) أ- دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5:

$$n = 0 : 3^0 \equiv 1 [5]$$

$$n = 1 : 3^1 \equiv 3 [5]$$

$$n = 2 : 3^2 \equiv 4 [5]$$

$$n = 3 : 3^3 \equiv 2 [5]$$

$$n = 4 : 3^4 \equiv 1 [5]$$

ومنه:

$$n = 4p : 3^{4p} \equiv 1 [5]$$

$$n = 4p + 1 : 3^{4p+1} \equiv 3 [5]$$

$$n = 4p + 2 : 3^{4p+2} \equiv 4 [5]$$

$$n = 4p + 3 : 3^{4p+3} \equiv 2 [5]$$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4p$	$4p + 1$	$4p + 2$	$4p + 3$	$p \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل القسمة على 5 العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ يقبل القسمة على 5 معناه:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0 [5]$$

حيث:

$(x; y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

فنكتب:

ومنه:

$$3^{x-y} \equiv 3 [5]$$

ولدينا:

$$1438 \equiv 3 [5]$$

$$1438^{2017} \equiv 3^{2017} [5]$$

$$1438^{2017} \equiv 3^{4 \times 504 + 1} [5]$$

ومنه:

$$1438^{2017} \equiv 3 [5]$$

وحسب نص القرين لدينا:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0 [5]$$

$$3 + 4n + 3 \equiv 0 [5]$$

$$4n + 6 \equiv 0 [5]$$

$$4n + 1 \equiv 0 [5]$$

$$4n \equiv -1 [5]$$

$$4n \equiv 4 [5] / \text{PGCD}(4; 5) = 1$$

$$n \equiv 1 [5]$$

ونكتب:

$$n = 5t + 1$$

ومنه:

قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل القسمة على 5 العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

هي:

$$n = 5t + 1 / t \in \mathbb{N}$$

جميع الحقوق محفوظة
- BAC -
ع. الحامد



(1) حساب u_1 و u_2: لدينا: $\ln(u_1) + \ln(u_2) = 11$ $\ln(u_1 \times u_2) = 11$ $\ln(u_1 \times u_2) = \ln e^{11}$ $u_1 \times u_2 = e^{11}$ ومنه: $u_2 = \frac{e^{11}}{u_1}$ ولدينا: $u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3)$ $u_1 + \frac{e^{11}}{u_1} = e^4(1 + e^3)$ $u_1^2 + e^{11} = e^4(1 + e^3)u_1$ $u_1^2 - e^4(1 + e^3)u_1 + e^{11} = 0 \dots (*)$ نحسب المميز Δ للمعادلة (*): $\Delta = [e^4(1 + e^3)]^2 - 4e^{11}$ $\Delta = e^8(1 + e^3)^2 - 4e^{11}$ $\Delta = e^8(e^6 + 2e^3 + 1) - 4e^{11}$ $\Delta = e^8(e^6 + 2e^3 + 1 - 4e^3)$ $\Delta = e^8(e^6 - 2e^3 + 1)$ $\Delta = (e^4)^2(e^3 - 1)^2$ ومنه: $\Delta = [e^4(e^3 - 1)]^2$ للمعادلة (*) حلين متمميزين u_1' و u_1'' حيث: $u_1' = \frac{e^4(1 + e^3) - e^4(e^3 - 1)}{2}$ $u_1' = \frac{e^4(1 + e^3 - e^3 + 1)}{2}$ نجد: $u_1' = e^4$ $u_1'' = \frac{e^4(1 + e^3) + e^4(e^3 - 1)}{2}$ $u_1'' = \frac{e^4(1 + e^3 + e^3 - 1)}{2}$ نجد: $u_1'' = e^7$	دورة 2016 - شعبة الرياضيات - الموضوع الأول التمرين (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً، حدودها موجبة تماماً، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ (1) أحسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q. (2) نضع: $u_1 = e^4$ و $u_2 = e^3$. أ- عبر عن u_n بدلالة n. ب- نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$ أحسب S_n بدلالة n. (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$. أ- بين أن: $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$. ب- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$. ج- عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n; a_n) = 7$ (4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7. (5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0 [7] \\ n \equiv 0 [5] \end{cases}$ (6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7. الحل لدينا: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً، حدودها موجبة تماماً، معناها: $0 < u_0 < u_1 < u_2 < \dots$
--	---

● إذا كان:

لدينا:

لاحظ أن:

● إذا كان:

لدينا:

لاحظ أن:

ومنه:

استنتاج قيمة الأساس q :

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن:

أ- التعبير عن u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها $q = e^3$ بالعبارة:

حيث:

● إذا كان:

لدينا:

لاحظ أن:

● إذا كان:

لدينا:

لاحظ أن:

ومنه:

استنتاج قيمة الأساس q :

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن:

أ- التعبير عن u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها $q = e^3$ بالعبارة:

حيث:

بالعويض:

$$u_n = e \times (e^3)^n = e \times e^{3n} = e^{3n+1}$$

$$u_n = e^{3n+1}$$

ب- حساب S_n بدلالة n :

لدينا:

$$S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$$

$$S_n = \ln(e) + \ln(e^4) + \ln(e^7) + \dots + \ln(e^{3n+1})$$

$$S_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n + 1)$$

حيث:

S_n هو مجموع $(n + 1)$ حدا من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 3، يحسب كما يلي:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} \times (1 + 3n + 1)$$

نجد:

$$S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.

أ- تبين أن $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$:

لدينا:

$$2S_n = 2 \times \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

$$2S_n = (n+1)(3n+2)$$

$$2S_n = 3n^2 + 5n + 2$$

نجري القسمة الإقليدية لـ $3n^2 + 5n + 2$ على $n + 3$:

$3n^2 + 5n + 2$	$n + 3$
$-3n^2 - 9n$	$3n - 4$
$-4n + 2$	
$4n + 12$	
14	

صفحة 2

فنكتب:

$$\frac{7}{a_n}$$

$$a_n \equiv 0 [7]$$

$$n + 3 \equiv 0 [7]$$

$$n \equiv -3 [7]$$

$$n \equiv 4 [7]$$

ومنه:

$$n = 7k + 4 / k \in \mathbb{N}$$

(4) دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7:

$$n = 0 : 2^0 \equiv 1 [7]$$

$$n = 1 : 2^1 \equiv 2 [7]$$

$$n = 2 : 2^2 \equiv 4 [7]$$

$$n = 3 : 2^3 \equiv 1 [7]$$

ومنه:

$$n = 3p : 2^{3p} \equiv 1 [7]$$

$$n = 3p + 1 : 2^{3p+1} \equiv 2 [7]$$

$$n = 3p + 2 : 2^{3p+2} \equiv 4 [7]$$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 في الجدول التالي:

n	3p	3p + 1	3p + 2	p ∈ ℕ
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

(5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0 [7] \\ n \equiv 0 [5] \end{cases}$$

لدينا:

$$b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n(n+3) - 2 \times \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n(n+3) - (n+1)(3n+2) + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n^2 + 9n - (3n^2 + 5n + 2) + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n^2 + 9n - 3n^2 - 5n - 2 + 1437^{2016} + 1$$

نجد:

$$b_n = 4n + 1437^{2016} - 1$$

فنكتب:

$$2S_n = 3n^2 + 5n + 2$$

$$2S_n = (3n - 4)(n + 3) + 14$$

نجد:

$$2S_n = (3n - 4)a_n + 14$$

معناه:

العدد 14 هو باقي قسمة $2S_n$ على a_n .

حسب الخاصية التالية:

a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث $a \geq b$.
إذا كان r باقي قسمة a على b أي $a = bk + r$.
فإن:

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$$

فإن:

$$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$$

ب- تعيين القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$:

لدينا من (3) أ- أن:

$$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/2S_n \\ d/a_n \\ d/14 \end{cases}$$

القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$ هي القواسم الطبيعية لـ 14.

ومنه:

$$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = d = D_{14} = \{1; 2; 7; 14\}$$

ج- تعيين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:

$$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$$

معناه:

$$\begin{cases} 7/2S_n \\ 7/a_n \end{cases}$$

ولدينا: $4^{12n+1} \equiv (2^2)^{12n+1} [7]$ $\equiv 2^{24n+2} [7]$ $\equiv 2^{3n+2} \times 2^{21n} [7]$ $\equiv 2^{3n+2} \times (2^{3n})^7 [7]$ $\equiv 4 \times (1)^7 [7]$ $4^{12n+1} \equiv 4 [7]$ ولدينا: $52 \equiv 3 [7]$ فنكتب: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3 \times 4 + 3 [7]$ $\equiv 2 - 12 + 3 [7]$ $\equiv -7 [7]$ $\equiv 0 [7]$ ومنه: العدد $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على العدد 7. جميع الحقوق محفوظة - BAC - عالم	تعلم الرياضيات	ولدينا: $1437 \equiv 2 [7]$ $1437^{2016} \equiv 2^{2016} [7]$ $\equiv 2^{3 \times 672} [7]$ $\equiv 1 [7]$ فنكتب: $b_n \equiv 0 [7]$ $4n + 1437^{2016} - 1 \equiv 0 [7]$ $4n + 1 - 1 \equiv 0 [7]$ $4n \equiv 0 [7]$ بما أن 7 و 4 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص، نكتب: $n \equiv 0 [7]$ فتصبح لدينا الجملة التالية: $\begin{cases} n \equiv 0 [7] \\ n \equiv 0 [5] \end{cases}$ بما أن 7 و 5 أوليان فيما بينهما فإن: $n \equiv 0 [7 \times 5]$ أي: $n \equiv 0 [35]$ ومنه: $n = 35k / k \in \mathbb{N}$ (6) تبين أن العدد $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7: العدد $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على العدد 7 معناه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 [7]$ لدينا: $1437 \equiv 2 [7]$ $1437^{9n+1} \equiv 2^{9n+1} [7]$ $\equiv 2^{3n+1} \times 2^{6n} [7]$ $\equiv 2^{3n+1} \times (2^{3n})^2 [7]$ $\equiv 2 \times (1)^2 [7]$ $1437^{9n+1} \equiv 2 [7]$
---	-----------------------	---

تلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 في الجدول التالي:

n	$5p$	$5p+1$	$5p+2$	$5p+3$	$5p+4$	$p \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	[11]

دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 11:

$$n = 0 : 7^0 \equiv 1 [11]$$

$$n = 1 : 7^1 \equiv 7 [11]$$

$$n = 2 : 7^2 \equiv 5 [11]$$

$$n = 3 : 7^3 \equiv 2 [11]$$

$$n = 4 : 7^4 \equiv 3 [11]$$

$$n = 5 : 7^5 \equiv 10 [11]$$

$$n = 6 : 7^6 \equiv 4 [11]$$

$$n = 7 : 7^7 \equiv 6 [11]$$

$$n = 8 : 7^8 \equiv 9 [11]$$

$$n = 9 : 7^9 \equiv 8 [11]$$

$$n = 10 : 7^{10} \equiv 1 [11]$$

ومنه:

$$n = 10k : 7^{10k} \equiv 1 [11]$$

$$n = 10k + 1 : 7^{10k+1} \equiv 7 [11]$$

$$n = 10k + 2 : 7^{10k+2} \equiv 5 [11]$$

$$n = 10k + 3 : 7^{10k+3} \equiv 2 [11]$$

$$n = 10k + 4 : 7^{10k+4} \equiv 3 [11]$$

$$n = 10k + 5 : 7^{10k+5} \equiv 10 [11]$$

$$n = 10k + 6 : 7^{10k+6} \equiv 4 [11]$$

$$n = 10k + 7 : 7^{10k+7} \equiv 6 [11]$$

$$n = 10k + 8 : 7^{10k+8} \equiv 9 [11]$$

$$n = 10k + 9 : 7^{10k+9} \equiv 8 [11]$$

تلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 في الجدول التالي:

n	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	5	2	3	[11]

n	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	10	4	6	9	8	[11]

صفحة 1

دورة 2016 - شعبة الرياضيات - الموضوع الثاني

التمرين

(1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$$

مضاعف للعدد 11.

(2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:

$$7x - 3y = 8$$

حيث x و y عدنان طبيعيان.

أ- حل المعادلة (E).

ب- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية

$(x; y)$ حلا للمعادلة (E).

- ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

ج- جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 [11]$$

الحل

(1) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^n و 7^n على 11:

دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^n على 11:

$$n = 0 : 3^0 \equiv 1 [11]$$

$$n = 1 : 3^1 \equiv 3 [11]$$

$$n = 2 : 3^2 \equiv 9 [11]$$

$$n = 3 : 3^3 \equiv 5 [11]$$

$$n = 4 : 3^4 \equiv 4 [11]$$

$$n = 5 : 3^5 \equiv 1 [11]$$

ومنه:

$$n = 5p : 3^{5p} \equiv 1 [11]$$

$$n = 5p + 1 : 3^{5p+1} \equiv 3 [11]$$

$$n = 5p + 2 : 3^{5p+2} \equiv 9 [11]$$

$$n = 5p + 3 : 3^{5p+3} \equiv 5 [11]$$

$$n = 5p + 4 : 3^{5p+4} \equiv 4 [11]$$

$\begin{cases} 7x - 3y = 8 \\ 7(-2) - 3(-2) = -8 \end{cases}$ يجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب: $7x + 7(-2) - 3y - 3(-2) = 0$ ونكتب: $7(x - 2) - 3(y - 2) = 0$ نجد: $7(x - 2) = 3(y - 2) \dots (*)$ لاحظ أن: - العدد 3 يقسم $7(x - 2)$. - العدد 7 أولي مع العدد 3. حسب مبرهنة غوص فإن: العدد 3 يقسم $(x - 2)$ أي: $x - 2 = 3t \quad / \quad t \in \mathbb{N}$ ومنه: $x = 3t + 2 \quad / \quad t \in \mathbb{N}$ نعوض $x = 3t + 2$ في المعادلة (*): $7(3t + 2) - 3(y - 2) = 8$ $7 \times 3t = 3(y - 2)$ $7t = y - 2$ نجد: $y = 7t + 2 \quad / \quad t \in \mathbb{N}$ ومنه: حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = \{(3t + 2; 7t + 2) \mid t \in \mathbb{N}\}$ (2) - إيجاد القيم الممكنة للعدد d: حيث: - d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y. - $(x; y)$ حلا للمعادلة (E). فنكتب: $PGCD(x; y) = PGCD(3t + 2; 7t + 2) = d$	(1) - نبرهن أن $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11: العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11 معناه نبرهن أن: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0 \pmod{11}$ لدينا: $2016 \equiv 3 \pmod{11}$ $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4} \pmod{11}$ ومنه: $2016^{5n+4} \equiv 4 \pmod{11}$ (أنظر الجدول الأول أعلاه). ولدينا: $1437 \equiv 7 \pmod{11}$ $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4} \pmod{11}$ ومنه: $2016^{5n+4} \equiv 3 \pmod{11}$ (أنظر الجدول الثاني أعلاه). فنكتب: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 2 \times 4 + 3 \pmod{11}$ $\equiv 8 + 3 \pmod{11}$ $\equiv 11 \pmod{11}$ $\equiv 0 \pmod{11}$ ومنه: العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11. (2) - حل المعادلة (E): $7x - 3y = 8 \dots (E)$ حيث x و y عددان طبيعيين. الحل الخاص الظاهر للمعادلة (E) هو الثنائية (2; 2). فنكتب الجملة التالية: $\begin{cases} 7x - 3y = 8 \\ 7(2) - 3(2) = 8 \end{cases}$ بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:
---	---

أي: $\begin{cases} 4/-6t - 4 \\ \text{و} \\ 4/7t + 2 \end{cases}$ وحسب الخواص أيضا نكتب: $4/-6t - 4 + 7t + 2$ نجد: $4/t - 2$ ونكتب: $t - 2 = 4t'$ أي: $t = 4t' + 2$ لدينا: $\begin{cases} x = 3t + 2 = 3(4t' + 2) + 2 = 12t' + 6 + 2 \\ y = 7t + 2 = 7(4t' + 2) + 2 = 28t' + 14 + 2 \end{cases}$ نجد: $\begin{cases} x = 12t' + 8 \\ y = 28t' + 16 \end{cases}$ • إذا كان t' عددا زوجيا ($t' = 2\lambda$). فإن: $PGCD(x; y) = 8 \text{ (مرفوض)}$ • إذا كان t' عددا فرديا ($t' = 2\lambda + 1$). فإن: $PGCD(x; y) = 4 \text{ (مقبول)}$ ومنه: $t' = 2\lambda + 1$ فنكتب: $\begin{cases} x = 12t' + 8 = 12(2\lambda + 1) + 8 = 24\lambda + 20 \\ y = 28t' + 16 = 28(2\lambda + 1) + 16 = 56\lambda + 44 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 24\lambda + 20 \\ y = 56\lambda + 44 \end{cases}$ ومنه: الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$ هي: $(x; y) = \{(24\lambda + 20; 56\lambda + 44) / \lambda \in \mathbb{N}\}$	أي: $\begin{cases} d/3t + 2 \\ \text{و} \\ d/7t + 2 \end{cases}$ حسب الخواص يمكن أن نكتب: $\begin{cases} d/7 \times (3t + 2) \\ \text{و} \\ d/-3 \times (7t + 2) \end{cases}$ أي: $\begin{cases} d/21t + 14 \\ \text{و} \\ d/-21t - 6 \end{cases}$ وحسب الخواص أيضا نكتب: $d/21t + 14 - 21t - 6$ نجد: $d/8$ ومنه: القيم الممكنة لـ d هي القواسم الطبيعية للعدد 8. $d = D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$ تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$: $PGCD(x; y) = PGCD(3t + 2; 7t + 2) = 4$ أي: $\begin{cases} 4/3t + 2 \\ \text{و} \\ 4/7t + 2 \end{cases}$ حسب الخواص يمكن أن نكتب: $\begin{cases} 4/-2(3t + 2) \\ \text{و} \\ 4/7t + 2 \end{cases}$
---	--

2) جـ- إيجاد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 \pmod{11}$$

لدينا:

$$2016 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 3^{7x} \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 3^{7(3t+2)} \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 3^{21t+14} \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 3^{4(5t+3)+t+2} \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 3^{(5t+3)^4} \times 3^2 \times 3^t \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 5^4 \times 3^2 \times 3^t \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 9 \times 9 \times 3^t \pmod{11}$$

$$2016^{7x} \equiv 4 \times 3^t \pmod{11}$$

ولدينا:

$$1437 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 7^{3y} \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 7^{3(7t+2)} \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 7^{21t+6} \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 7^{2(10t+3)+t} \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 7^{(10t+3)^2} \times 7^t \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 2^2 \times 7^t \pmod{11}$$

$$1437^{3y} \equiv 4 \times 7^t \pmod{11}$$

ومنه:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 \pmod{11}$$

$$4 \times 3^t + 4 \times 7^t \equiv 0 \pmod{11}$$

$$4(3^t + 7^t) \equiv 0 \pmod{11}$$

بما أن 4 و 11 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص:

$$3^t + 7^t \equiv 0 \pmod{11}$$

يمكن الاستعانة بجدول البواقي التالي:

$t =$	10α	$10\alpha + 1$	$10\alpha + 2$	$10\alpha + 3$	$10\alpha + 4$
$3^t \equiv$	1	3	9	5	4
$7^t \equiv$	1	7	5	2	3
$3^t + 7^t \equiv$	2	10	3	7	7

$10\alpha + 5$	$10\alpha + 6$	$10\alpha + 7$	$10\alpha + 8$	$10\alpha + 9$	$\alpha \in \mathbb{N}$
1	3	9	5	4	[11]
10	4	6	9	8	[11]
0	7	4	3	1	[11]

من الجدول:
إذا كان:
 $t \equiv 10\alpha + 5$
فإن:
 $3^t \equiv 3^{10\alpha+5} \pmod{11}$
 $3^t \equiv 3^5 \times 3^{10\alpha} \pmod{11}$
 $3^t \equiv 3^5 \times (3^{10})^{2\alpha} \pmod{11}$
 $3^t \equiv 1 \times (1)^2 \pmod{11}$
 $3^t \equiv 1 \pmod{11}$
وأيضاً:
 $7^t \equiv 7^{10\alpha+5} \pmod{11}$
 $7^t \equiv 10 \pmod{11}$
ومنه:
 $3^t + 7^t \equiv 1 + 10 \pmod{11}$
 $3^t + 7^t \equiv 11 \pmod{11}$
 $3^t + 7^t \equiv 0 \pmod{11}$
فنكتب:
$$\begin{cases} x = 3t + 2 = 3(10\alpha + 5) + 2 = 30\alpha + 15 + 2 \\ y = 7t + 2 = 7(10\alpha + 5) + 2 = 70\alpha + 35 + 2 \end{cases}$$

نجد:
$$\begin{cases} x = 30\alpha + 17 \\ y = 70\alpha + 37 \end{cases}$$

ومنه:
الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:
$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 \pmod{11}$$

هي:
$$(x; y) = \{(30\alpha + 17; 70\alpha + 37) / \alpha \in \mathbb{N}\}$$

جميع الحقوق محفوظة
BAC -
عبد الحميد

تبيان أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

نبرهن أن:

$$PGCD\left(\frac{\alpha}{2}; \beta\right) = PGCD(1009; 2017) = 1$$

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 1009 و 2017:

$$2017 = 1 \times 1009 + 1008$$

$$1009 = 1 \times 1008 + 1$$

$$1008 = 1 \times 1008 + 0$$

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمة الإقليدية هو 1.

أي:

$$PGCD(1009; 2017) = 1$$

ومنه:

العددين 1009 و 2017 أوليان فيما بينهما.

(2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة:

$$1009x - 2017y = 1 \dots (E)$$

الحل الخاص الظاهر للمعادلة (E) هو الثنائية $(2; 1)$.

فنكتب الجملة التالية:

$$\begin{cases} 1009x - 2017y = 1 \\ 1009(2) - 2017(1) = 1 \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:

$$\begin{cases} 1009x - 2017y = 1 \\ 1009(-2) - 2017(-1) = -1 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب:

$$1009x + 1009(-2) - 2017y - 2017(-1) = 0$$

ونكتب:

$$1009(x - 2) - 2017(y - 1) = 0$$

نجد:

$$1009(x - 2) = 2017(y - 1) \dots (*)$$

لاحظ أن:

- العدد 2017 يقسم $1009(x - 2)$.

- العدد 2017 أولي مع العدد 1009.

حسب مبرهنة غروص فإن:

العدد 2017 يقسم $(x - 2)$

دورة 2018 - شعبة الرياضيات - الموضوع الثاني

التمرين

(1) α و β عدنان طبيعان بحيث:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

- عين العددين α و β ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

(2) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة:

$$1009x - 2017y = 1$$

(3) عين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} \alpha \equiv 2019 [2017] \\ \alpha \equiv 2019 [1009] \end{cases}$$

(4) أ- n عدد طبيعي، أدرس تبعاً لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:

$$L = \underbrace{111\dots 1}_{\text{2018 مرة}}$$

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

الحل

(1) تعيين العددين α و β :

لدينا:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف ينتج:

$$2\alpha = 4036$$

ومنه:

$$\alpha = 2018$$

نعوض $\alpha = 2018$ في المعادلة الثانية ينتج:

$$2018 - \beta = 1$$

ومنه:

$$\beta = 2017$$

أ.ي: $\begin{cases} k_1 = 1009\lambda \\ k_2 = 2017\lambda \end{cases}$

بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة (I):

$$\alpha = 2017 \times 1009\lambda + 2019$$

ومنه: $\alpha = 2035153\lambda + 2019 / \lambda \in \mathbb{Z}$

ملاحظة: يمكن التحقق بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة (I):

$$\alpha = 1009 \times 2017\lambda + 2019$$

ومنه: $\alpha = 2035153\lambda + 2019 / \lambda \in \mathbb{Z}$

(4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9:

$n = 0 : 7^0 \equiv 1 [9]$
 $n = 1 : 7^1 \equiv 7 [9]$
 $n = 2 : 7^2 \equiv 4 [9]$
 $n = 3 : 7^3 \equiv 1 [9]$

لاحظ أن: دور بواقي القسمة هو 3.

فنكتب:

$n = 3m : 7^{3m} \equiv 1 [9]$
 $n = 3m + 1 : 7^{3m+1} \equiv 7 [9]$
 $n = 3m + 2 : 7^{3m+2} \equiv 4 [9]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 في الجدول التالي:

$n =$	$3m$	$3m + 1$	$3m + 2$	$m \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	4	[9]

(4) ب- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9:

حيث: L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:

$$L = \overbrace{111 \dots 1}^{2018 \text{ مرة}}$$

أ.ي: $x - 2 = 2017k / k \in \mathbb{Z}$

ومنه: $x = 2017k + 2 / k \in \mathbb{Z}$

نعوض $x = 2017k + 2$ في المعادلة (*):

$$1009(2017k + 2 - 2) = 2017(y - 1)$$

$$1009 \times 2017k = 2017(y - 1)$$

$$1009k = y - 1$$

نجد: $y = 1009k + 1 / k \in \mathbb{Z}$

ومنه: حلول المعادلة (E) هي:

$$(x; y) = \{(2017k + 2; 1009k + 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(3) تعيين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} \alpha \equiv 2019 [2017] \\ \alpha \equiv 2019 [1009] \end{cases}$$

أ.ي: $\begin{cases} \alpha = 2017k_1 + 2019 \\ \alpha = 1009k_2 + 2019 \dots (I) \end{cases}$

بالمطابقة نجد:

$$2017k_1 = 1009k_2 \dots (*)$$

معناه: 1009 يقسم $2017k_1$

من (1) لدينا: 2017 و 1009 أوليان فيما بينهما

ومنه: (حسب مبرهنة غوص)

$$k_1 = 1009t_1$$

بتعويض $k_1 = 1009t_1$ في المعادلة (*): نجد:

$$k_2 = 2017t_2$$

نعوض k_1 و k_2 في المعادلة (*): نجد:

$$t_1 = t_2 = \lambda$$

لدينا:

$$L = \overline{111 \dots 1}^7$$

$$L = 1 \times 7^0 + 1 \times 7^1 + 1 \times 7^2 + \dots + 1 \times 7^{2017}$$

$$L = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2017}$$

حيث:

L هو مجموع 2018 حدا من حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها

الأول $7^0 = 1$ وأساسها $q = 7$.

يعطى L كما يلي:

$$L = 1 \times \frac{7^{2018} - 1}{7 - 1}$$

نجد:

$$L = \frac{7^{2018} - 1}{6}$$

ونكتب:

$$42L = 42 \times \frac{7^{2018} - 1}{6}$$

$$42L = 7(7^{2018} - 1)$$

نجد:

$$42L = 7^{2019} - 7$$

لاحظ أن:

$$2019 = 3 \times 673$$

العدد 2019 يكتب على الشكل $3m$ حيث $m = 673$.

فنكتب:

$$7^{2019} \equiv 7^{3m} [9]$$

$$7^{2019} \equiv 1 [9]$$

$$7^{2019} - 7 \equiv 1 - 7 [9]$$

$$42L \equiv -6 [9]$$

نجد:

$$42L \equiv 3 [9]$$

ومنه:

بإني قسمة العدد $42L$ على 9 هو 3.

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

ع.الحميد

صفحة 3

حل المعادلة (E):

لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6(-19) - 7(-19) = 19 \end{cases}$$

حيث x و y عدنان صحيحان.

بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:

$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6(19) - 7(19) = -19 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب:

$$6x + 6(19) - 7y - 7(19) = 0$$

ونكتب:

$$6(x + 19) - 7(y + 19) = 0$$

نجد:

$$6(x + 19) = 7(y + 19) \dots (*)$$

بما أن:

$$6(x + 19) \text{ العدد } 7 \text{ يقسم}$$

وأيضاً:

$$\text{العدد } 7 \text{ أولي مع العدد } 6$$

فإن: (حسب مبرهنة غوص)

$$\text{العدد } 7 \text{ يقسم } (x + 19)$$

أي:

$$x + 19 = 7k \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

ومنه:

$$x = 7k - 19 \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

نعوض $x = 7k - 19$ في المعادلة (*):

$$6(7k - 19 + 19) = 7(y + 19)$$

$$6 \times 7k = 7(y + 19)$$

$$6k = y + 19$$

نجد:

$$y = 6k - 19 \quad / \quad t \in \mathbb{Z}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x; y) = \{(7k - 19; 6k - 19) / k \in \mathbb{Z}\}$$

دورة 2016 - شعبة التقني رياضي - الموضوع الأول

التمرين

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$:

$$6x - 7y = 19 \dots (E)$$

حيث x و y عدنان صحيحان.(1) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) بحيث:

$$x_0 = y_0, \text{ ثم حل المعادلة (E).}$$

(2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$$

ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42.(3) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \leq 13$$

(4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليديةللعدد 5^n على 7.ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$$

الحل

(1) إيجاد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E):

$$6x - 7y = 19 \dots (E)$$

حيث x و y عدنان صحيحان.

لدينا:

$$x_0 = y_0$$

نعوض x بـ x_0 و y بـ x_0 في المعادلة (E):

$$6x_0 - 7x_0 = 19$$

$$-x_0 = 19$$

نجد:

$$\begin{cases} x_0 = -19 \\ y_0 = -19 \end{cases}$$

ومنه:

الحل الخاص للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$ هو:

$$(x_0; y_0) = \{(-19; -19)\}$$

(3) تعيين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \leq 13$$

معناه:

$$-13 \leq x + y - 1 \leq 13$$

$$-13 \leq 7k - 19 + 6k - 19 - 1 \leq 13$$

$$-13 \leq 13k - 39 \leq 13$$

$$39 - 13 \leq 13k \leq 13 + 39$$

$$26 \leq 13k \leq 52$$

$$\frac{26}{13} \leq k \leq \frac{52}{13}$$

نجد:

$$2 \leq k \leq 4$$

قيم k هي:

$$k = \{2; 3; 4\}$$

نلخص قيم x و y في الجدول التالي:

k	2	3	4
$x = 7k - 19$	-5	2	9
$y = 6k - 19$	-7	-1	5

ومنه:

الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \leq 13$$

هي:

$$(x; y) = \{(-5; -7), (2; -1), (9; 5)\}$$

(4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7:

$$n = 0 : 5^0 \equiv 1 [7]$$

$$n = 1 : 5^1 \equiv 5 [7]$$

$$n = 2 : 5^2 \equiv 4 [7]$$

$$n = 3 : 5^3 \equiv 6 [7]$$

$$n = 4 : 5^4 \equiv 2 [7]$$

$$n = 5 : 5^5 \equiv 3 [7]$$

$$n = 6 : 5^6 \equiv 1 [7]$$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 6.

(2) استنتاج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} \lambda = 7k_1 + 24 \\ \lambda = 6k_2 + 5 \end{cases} \dots (I)$$

بالمطابقة:

$$7k_1 + 24 = 6k_2 + 5$$

أي:

$$6k_2 - 7k_1 = 24 - 5$$

نجد:

$$6k_2 - 7k_1 = 19$$

من (1) نستنتج أن حلول هذه المعادلة هي:

$$\begin{cases} k_2 = 7k' - 19 \\ k_1 = 6k' - 19 \end{cases} / k' \in \mathbb{Z}$$

نعوض $k_1 = 6k' - 19$ في المعادلة الأولى من الجملة (I):

$$\lambda = 7k_1 + 24$$

$$\lambda = 7(6k' - 19) + 24$$

$$\lambda = 42k' - 133 + 24$$

نجد:

$$\lambda = 42k' - 109 / k' \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة:

نصل إلى نفس النتيجة إذا عوضنا $k_2 = 7k' - 19$ في المعادلة الثانية من الجملة (I).

تعيين باقي قسمة العدد λ على 42:

لدينا من (2) أن:

$$\lambda = 42k' - 109$$

فنكتب:

$$\lambda \equiv -109 [42]$$

$$\lambda \equiv -67 [42]$$

$$\lambda \equiv -25 [42]$$

نجد:

$$\lambda \equiv 17 [42]$$

ومنه:

باقي قسمة العدد λ على 42 هو 17.

فكتب:

$n = 6m : 5^{6m} \equiv 1 [7]$
 $n = 6m + 1 : 5^{6m+1} \equiv 5 [7]$
 $n = 6m + 2 : 5^{6m+2} \equiv 4 [7]$
 $n = 6m + 3 : 5^{6m+3} \equiv 6 [7]$
 $n = 6m + 4 : 5^{6m+4} \equiv 2 [7]$
 $n = 6m + 5 : 5^{6m+5} \equiv 3 [7]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 في الجدول التالي:

$n =$	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	$m \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

(4) ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$$

حسب الموافقة الثانية من الجملة:

$$n \equiv 1437 [6]$$

$$n \equiv 3 [6]$$

نجد:

$$n = 6\alpha + 3 / \alpha \in \mathbb{N}$$

حسب الموافقة الأولى من الجملة:

$$n - 5^n \equiv 2020 [7]$$

$$n - 5^n \equiv 4 [7]$$

$$6\alpha + 3 - 5^{6\alpha+3} \equiv 4 [7]$$

$$6\alpha + 3 - 6 \equiv 4 [7]$$

$$6\alpha - 3 \equiv 4 [7]$$

$$6\alpha \equiv 7 [7]$$

$$6\alpha \equiv 0 [7]$$

بما أن 7 و 6 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص:

$$\alpha \equiv 0 [7]$$

ونكتب:

$$\alpha = 7p / p \in \mathbb{N}$$

بالتعويض نكتب:

$$n = 6\alpha + 3$$

$$n = 6 \times 7p + 3$$

نجد:

$$n = 42p + 3 / p \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$$

هي:

$$n = 42p + 3 / p \in \mathbb{N}$$

تعليم الرياضيات

جميع الحقوق محفوظة
- BAC -
ع. الحميد

نضع:

$$k = 2n^2 - 6n + 4$$

ومنه:

$$\alpha = \beta k + (-10)$$

تذكر الخاصية التالية:

a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث $a \geq b$

إذا كان r باقي قسمة a على b أي $a = bk + r$

فإن:

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$$

ملاحظة:

يمكن تمديد هذه الخاصية إلى الأعداد الصحيحة.

ومنه: (حسب الخاصية)

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$$

طريقة أخرى:

نضع:

$$PGCD(\alpha, \beta) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ \text{و} \\ d/\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/2n^3 - 14n + 2 \\ \text{و} \\ d/(n+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/(2n^2 - 6n + 4)(n+3) - 10 \dots \times (-1) \\ \text{و} \\ d/(n+3) \dots \times (2n^2 - 6n + 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/-(2n^2 - 6n + 4)(n+3) + 10 \\ \text{و} \\ d/(2n^2 - 6n + 4)(n+3) \end{cases}$$

دورة 2013 - شعبة الرياضيات - الموضوع الأول

النميرين

(1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث:

$$\beta = n + 3 \text{ و } \alpha = 2n^3 - 14n + 2$$

أ- بين أن:

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$$

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب- ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$ ؟

ج- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha, \beta) = 5$$

(2) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$$

الحل

(1) أ- نبيان أن $PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(\beta, 10)$

لدينا:

$$\begin{cases} \alpha = 2n^3 - 14n + 2 \\ \beta = n + 3 \end{cases}$$

نجري القسمة الإقليدية لـ $2n^3 - 14n + 2$ على $n + 3$:

$2n^3 - 14n + 2$	$n + 3$
$-2n^3 - 6n^2$	$2n^2 - 6n + 4$
$-6n^2 - 14n + 2$	
$6n^2 + 18n$	
$4n + 2$	
$-4n - 12$	
-10	

فنكتب:

$$\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$$



(1) جـ- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha, \beta) = 5$$

معناه:

$$5/\beta$$

أي:

$$5/n+3$$

ونكتب:

$$n+3 \equiv 0 [5]$$

$$n \equiv -3 [5]$$

$$n \equiv 2 [5]$$

أي:

$$n = 5p + 2 / p \in \mathbb{N}$$

- إذا كان p عددا زوجيا ($p = 2\lambda$).

فإن:

$$PGCD(\alpha; \beta) = 5 \text{ (مقبول)}$$

- إذا كان p عددا فرديا ($p = 2\lambda + 1$).

فإن:

$$PGCD(\alpha; \beta) = 10 \text{ (مرفوض)}$$

ومنه:

$$p = 2\lambda / \lambda \in \mathbb{N}$$

فنكتب:

$$n = 5 \times 2\lambda + 2$$

نجد:

$$n = 10\lambda + 2 / \lambda \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha, \beta) = 5$$

هي:

$$n = 10\lambda + 2 / \lambda \in \mathbb{N}$$

توضيح:

p	0	1	2	3	4	5
$n = 5p + 2$	2	7	12	17	22	27
$\alpha = 2n^2 - 14n + 2$	-10	590	3290	9590	20990	38990
$\beta = n + 3$	5	10	15	20	25	30
$d = PGCD(\alpha; \beta)$	5	10	5	10	5	10

تذكر الخاصيتين التاليتين:

d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.

إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n :

d يقسم ma و d يقسم $n\beta$

d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.

إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n :

d يقسم $ma + n\beta$

ومنه: (حسب الخاصيتين)

$$d / -(2n^2 - 6n + 4)(n + 3) + 10 + (2n^2 - 6n + 4)(n + 3)$$

نجد:

$$d/10$$

بما أن:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \\ d/10 \end{cases}$$

فإن:

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$$

(1) ب- إيجاد القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$:

نضع:

$$PGCD(\alpha; \beta) = d$$

ولدينا من (1) - أن:

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$$

أي:

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \\ d/10 \end{cases}$$

القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha; \beta)$ هي القواسم الطبيعية لـ 10.

ومنه:

$$PGCD(\alpha; \beta) = d = \{1; 2; 5; 10\}$$



نعرض n بـ $10t + 2$ فنكتب:

$$1 + 4^{10t+2} + 10t + 2 \equiv 0 [11]$$

$$4^{2(5t+1)} + 10t + 3 \equiv 0 [11]$$

$$(4^{5t+1})^2 + 10t + 3 \equiv 0 [11]$$

$$(4)^2 + 10t + 3 \equiv 0 [11]$$

$$5 + 10t + 3 \equiv 0 [11]$$

$$10t + 8 \equiv 0 [11]$$

$$10t \equiv -8 [11]$$

$$10t \equiv -19 [11]$$

$$10t \equiv -30 [11]$$

بما أن 11 و 10 أوليان فيما بينهما، فإنه يمكن قسمة طرفي الموافقة على العدد 10:

$$t \equiv -3 [11]$$

$$t \equiv 8 [11]$$

أي:

$$t = 11k' + 8$$

نعرض t بـ $11k' + 8$ في عبارة n فنكتب:

$$n = 10(11k' + 8) + 2$$

نجد:

$$n = 110k' + 82$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$$

هي:

$$n = 110k' + 82 / k' \in \mathbb{N}$$

جميع الحقوق محفوظة
- BAC -
ع. الحاميد

(2) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11:

$$n = 0 : 4^0 \equiv 1 [11]$$

$$n = 1 : 4^1 \equiv 4 [11]$$

$$n = 2 : 4^2 \equiv 5 [11]$$

$$n = 3 : 4^3 \equiv 9 [11]$$

$$n = 4 : 4^4 \equiv 3 [11]$$

$$n = 5 : 4^5 \equiv 1 [11]$$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 5.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$n = 5m : 4^{5m} \equiv 1 [11]$$

$$n = 5m + 1 : 4^{5m+1} \equiv 4 [11]$$

$$n = 5m + 2 : 4^{5m+2} \equiv 5 [11]$$

$$n = 5m + 3 : 4^{5m+3} \equiv 9 [11]$$

$$n = 5m + 4 : 4^{5m+4} \equiv 3 [11]$$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 في الجدول التالي:

$n =$	$5m$	$5m + 1$	$5m + 2$	$5m + 3$	$5m + 4$	$m \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]

(2) ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$$

الموافقة الثانية من الجملة:

$$n \equiv 2 [10]$$

أي:

$$n = 10t + 2$$

الموافقة الأولى من الجملة:

$$4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11]$$

ونكتب:

$$(4^5)^n + 4^n + n \equiv 0 [11]$$

$$1^n + 4^n + n \equiv 0 [11]$$

$$1 + 4^n + n \equiv 0 [11]$$

تلخص بواقي قسمة العدد 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

(2) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5:

حيث:

$$A = 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}$$

لدينا:

$$2017 \equiv 2 [5]$$

$$2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3} [5]$$

حسب الجدول أعلاه:

$$2^{4n+3} \equiv 3 [5]$$

ومنه:

$$2017^{4n+3} \equiv 3 [5]$$

ولدينا:

$$2016 \equiv 1 [5]$$

$$2016^{8n} \equiv 1^{8n} [5]$$

ومنه:

$$2016^{8n} \equiv 1 [5]$$

ولدينا:

$$2014 \equiv 4 [5]$$

$$2014 \equiv 2^2 [5]$$

$$2014^{2n+1} \equiv (2^2)^{2n+1} [5]$$

$$2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2} [5]$$

حسب الجدول أعلاه:

$$2^{4n+2} \equiv 4 [5]$$

ومنه:

$$2014^{4n+2} \equiv 4 [5]$$

فنكتب:

$$A \equiv 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} [5]$$

$$A \equiv 3 - 2 \times 1 + 4 [5]$$

$$A \equiv 3 - 2 + 4 [5]$$

$$A \equiv 5 [5]$$

$$A \equiv 0 [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5 هو 0.

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

التمرين

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.

(2) نضع:

$$A = 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}$$

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5 حيث n عدد طبيعي.

(3) بين أن العدد 131 أولي.

(4) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$$

حيث: $d = \text{PGCD}(a; b)$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$.

ب- عين قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$ ثم استنتج النتائج $(a; b)$.

الحل

(1) دراسة بواقي قسمة العدد 2^n على 5:

لدينا:

$$n = 0 : 2^0 \equiv 1 [5]$$

$$n = 1 : 2^1 \equiv 2 [5]$$

$$n = 2 : 2^2 \equiv 4 [5]$$

$$n = 3 : 2^3 \equiv 3 [5]$$

$$n = 4 : 2^4 \equiv 1 [5]$$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$n = 4k : 2^{4k} \equiv 1 [5]$$

$$n = 4k + 1 : 2^{4k+1} \equiv 2 [5]$$

$$n = 4k + 2 : 2^{4k+2} \equiv 4 [5]$$

$$n = 4k + 3 : 2^{4k+3} \equiv 3 [5]$$

بواقي قسمة العدد 2^n على 5 هي:

$$r = \{1; 2; 3; 4\}$$



نجد: $m = d \times a' \times b'$ بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة السابقة نكتب: $da'db' = 5da'b'$ نجد: $d = 5$ بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة السابقة نكتب: $3da'b' + 7d = 2^n - 48$ $d(3a'b' + 7) = 2^n - 48$ $5(3a'b' + 7) = 2^n - 48$ $2^n = 5(3a'b' + 7) + 48$ $2^n = 5k' + 48$ معناه: $2^n \equiv 48 [5]$ أي: $2^n \equiv 3 [5]$ من جدول البواقي نجد: $n = 4k + 3$ ومنه: الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$ هي: $n = 4k + 3 / k \in \mathbb{N}$ (4) - بتعيين قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$: لدينا: $7 < n < 15$ $7 < 4k + 3 < 15$ $7 - 3 < 4k < 15 - 3$ $4 < 4k < 12$ $\frac{4}{4} < k < \frac{12}{4}$ $1 < k < 3$ نجد: $k = 2$	(3) البرهان أن العدد 131 أولي: لدينا: $\sqrt{131} \approx 11,44$ بما أن $\sqrt{131}$ غير طبيعي، نقسم 131 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{131}$ على الترتيب. أي: نقسم 131 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب: $\{2; 3; 5; 7; 11\}$ فنكتب: $131 \equiv 1 [2]$ $131 \equiv 2 [3]$ $131 \equiv 1 [5]$ $131 \equiv 5 [7]$ $131 \equiv 10 [11]$ لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة. ومنه: العدد 131 أولي. (4) - بتعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$ حيث: $m = PPCM(a; b) \text{ و } d = PGCD(a; b)$ لدينا: $d = PGCD(a; b)$ معناه: $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} / PGCD(a'; b') = 1$ ولدينا: $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ أي: $d \times m = a \times b$ بالتعويض نكتب: $d \times m = d \times a' \times d \times b'$
--	---

• إذا كان $a' = 1$ و $b' = 131$: بالتعويض: $\begin{cases} a = da' = 5 \times 1 \\ b = db' = 5 \times 131 \end{cases}$ نجد: $\begin{cases} a = 5 \\ b = 655 \end{cases}$ • إذا كان $a' = 131$ و $b' = 1$: بالتعويض: $\begin{cases} a = da' = 5 \times 131 \\ b = db' = 5 \times 1 \end{cases}$ نجد: $\begin{cases} a = 655 \\ b = 5 \end{cases}$ ومنه: الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية من أجل $n = 11$ هي: $(a; b) = \{(5; 655), (655; 5)\}$ جميع الحقوق محفوظة - BAC - ع.الحميد	نعرض قيمة $k = 2$ في عبارة $n = 4k + 3$ نجد: $n = 11$ ومنه: $n = 11$ هي قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$. استنتاج الثنائيات $(a; b)$: حسب المعادلة الثانية من الجملة السابقة نكتب: $3da'b' + 7d = 2^n - 48$ $d(3a'b' + 7) = 2^n - 48$ حيث: $n = 11 \text{ و } d = 5$ فنكتب بالتعويض: $5(3a'b' + 7) = 2^{11} - 48$ $5(3a'b' + 7) = 2048 - 48$ $5(3a'b' + 7) = 2000$ $3a'b' + 7 = \frac{2000}{5}$ $3a'b' + 7 = 400$ $3a'b' = 400 - 7$ $3a'b' = 393$ $a'b' = \frac{393}{3}$ $a'b' = 131$ من (3) لدينا أن: العدد 131 أولي. فنكتب: $a'b' = 1 \times 131$ نميز حالتين: $\begin{cases} a' = 131 \\ b' = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 131 \end{cases}$ قيم a' و b' هي: $(a'; b') = \{(1; 131), (131; 1)\}$ ولدينا:
---	--

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1} = 2^{n+2} + 1$ »

لدينا من الفرضية:

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

$$2 \times a_n = 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 1$$

$$2a_n = 2^{n+1+1} + 2$$

$$2a_n = 2^{n+2} + 2$$

$$2a_n - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1$$

$$2a_n - 1 = 2^{n+2} + 1$$

$$a_{n+1} = 2^{n+2} + 1$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »(2) البحث إن كان a_n أولي مع a_{n+1} :

لدينا من المعطيات أن:

$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

أي:

$$2a_n - a_{n+1} = 1$$

ونكتب:

$$(2)a_n + (-1)a_{n+1} = 1$$

تذكر مبرهنة بيزو:

يكون عدداً a_n و a_{n+1} أوليين فيما بينهما إذا فقط إذاوجد عدداً صحيحان u و v حيث:

$$ua_n + va_{n+1} = 1$$

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

النميرين

(1) (a_n) و (b_n) متاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

(2) هل العدداً a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما؟(3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1438} على 5.(4) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2a_n - b_n = 5$$

ب- استنتج عبارة b_n بدلالة n .ج- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n, b_n)$.د- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(a_n, b_n) = 5$$

الحل

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

لدينا:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$$

لتكن الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \end{cases} \text{ (من المعطيات)}$$

و

$$2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

لاحظ أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني.

صفحة 1

ومنه: (حسب مبرهنة بيزو)
العددان a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.
ونكتب:
 $PGCD(a_n; a_{n+1}) = 1$
(3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5:
لدينا:
 $n = 0 : 2^0 \equiv 1 [5]$
 $n = 1 : 2^1 \equiv 2 [5]$
 $n = 2 : 2^2 \equiv 4 [5]$
 $n = 3 : 2^3 \equiv 3 [5]$
 $n = 4 : 2^4 \equiv 1 [5]$
لاحظ أن:
دور بواقي القسمة هو 4.
فنكتب:
من أجل كل عدد طبيعي n :
 $n = 4k : 2^{4k} \equiv 1 [5]$
 $n = 4k + 1 : 2^{4k+1} \equiv 2 [5]$
 $n = 4k + 2 : 2^{4k+2} \equiv 4 [5]$
 $n = 4k + 3 : 2^{4k+3} \equiv 3 [5]$
بواقي قسمة العدد 2^n على 5 هي:
 $r = \{1; 2; 3; 4\}$
نلخص بواقي قسمة العدد 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5:
لدينا:
 $\begin{cases} 2017 \equiv 2 [5] \\ 1438 = 4 \times 359 + 2 = 4k + 2 / k = 359 \end{cases}$
فنكتب:
 $2017 \equiv 2 [5]$
 $2017^{1438} \equiv 2^{1438} [5]$
 $2017^{1438} \equiv 2^{4k+2} [5]$

من جدول البواقي لدينا:
 $2^{4n+2} \equiv 4 [5]$
نجد:
 $2017^{1438} \equiv 4 [5]$
ومنه:
باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5 هو 4.
(4) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
 $2a_n - b_n = 5$
لدينا من المعطيات:
 $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$
لتكن $Q(n)$ الخاصية:
« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_n - b_n = 5$ »
التحقق من صحة الخاصية $Q(0)$:
لدينا من أجل $n = 0$:
(من المعطيات) $2a_0 - b_0 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
لاحظ أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني.
ومنه:
الخاصية $Q(0)$ محققة.
نفرض أن الخاصية $Q(n)$ صحيحة.
أي:
« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_n - b_n = 5$ »
ونبرهن أن الخاصية $Q(n+1)$ صحيحة.
أي:
« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_{n+1} - b_{n+1} = 5$ »
لدينا من الفرضية:
 $2a_n - b_n = 5$
 $2 \times (2a_n - b_n) = 2 \times 5$
 $2(2a_n) - 2b_n = 10$
 $2(2a_n) - 2b_n - 3 = 10 - 3$
 $2(2a_n) - (2b_n + 3) = 7$

ونكتب أيضا: $d/2a_n - b_n$ نجد: $d/5$ القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n; b_n)$ هي القواسم الطبيعية لـ 5. ومنه: $PGCD(a_n; b_n) = d = D_5 = \{1; 5\}$ تذكر الخاصيتين التاليتين: d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم. إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n: d يقسم ma و d يقسم $n\beta$ d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم. إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n: d يقسم $ma + n\beta$ (4) د- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $PGCD(a_n, b_n) = 5$ معناه: $\begin{cases} d/a_n \\ , \\ d/b_n \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a_n \equiv 0 [5] \\ b_n \equiv 0 [5] \end{cases}$ بالتعويض: $\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0 [5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0 [5] \end{cases}$ من الموافقة الأولى: $\begin{aligned} 2^{n+1} + 1 &\equiv 0 [5] \\ 2^{n+1} &\equiv -1 [5] \\ 2^{n+1} &\equiv 4 [5] \\ 2 \times 2^n &\equiv 4 [5] \end{aligned}$	(4) ب- استنتاج عبارة b_n بدلالة n: لدينا من (4) أ- أن: $2a_n - b_n = 5$ أي: $b_n = 2a_n - 5$ ولدينا من (1) أن: $a_n = 2^{n+1} + 1$ نعوض a_n بـ $2^{n+1} + 1$ في عبارة b_n فنكتب: $\begin{aligned} b_n &= 2(2^{n+1} + 1) - 5 \\ b_n &= 2 \times 2^{n+1} + 2 - 5 \\ b_n &= 2^{n+1+1} - 3 \end{aligned}$ ومنه: $b_n = 2^{n+2} - 3$ (4) ج- تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n, b_n)$: نضع: $PGCD(a_n, b_n) = d$ معناه: $\begin{cases} d/a_n \\ , \\ d/b_n \end{cases}$ ونكتب حسب الخواص: $\begin{cases} d/2a_n \\ , \\ d/-b_n \end{cases}$
---	--

بما أن 5 و 2 أوليان فيما بينهما فإن:

$$2^n \equiv 2 \pmod{5}$$

من جدول البواقي لدينا:

$$2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5}$$

بالمطابقة ينتج:

$$n = 4k + 1 / k \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$\text{PGCD}(a_n ; b_n) = 5$$

هي:

$$n = 4k + 1 / k \in \mathbb{N}$$

ملاحظة:

نصل إلى نفس النتيجة انطلاقا من الموافقة الثانية كما يلي:

$$2^{n+2} - 3 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$2^{n+2} \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^2 \times 2^n \equiv 3 \pmod{5}$$

$$4 \times 2^n \equiv 3 \pmod{5}$$

$$4 \times 2^n \equiv 8 \pmod{5}$$

بما أن 5 و 4 أوليان فيما بينهما فإن:

$$2^n \equiv 2 \pmod{5}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

تعليم الرياضيات

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

ع.الحميد

بواقي قسمة العدد 3^n على 10 هي:

$$r = \{1; 3; 7; 9\}$$

تلخص بواقي قسمة العدد 3^n على 10 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	[10]

(2) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$$

لدينا:

$$33 \equiv 3 [10]$$

$$33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2} [10]$$

$$\equiv 3^2 \times 3^{16n} [10]$$

$$\equiv 9 \times 3^{4 \times 4n} [10]$$

$$\equiv 9 \times (3^4)^{4n} [10]$$

$$\equiv 9 \times (1)^{4n} [10]$$

$$\equiv 9 \times 1 [10]$$

$$\equiv 9 [10]$$

ومنه:

$$33^{16n+2} \equiv 9 [10]$$

ولدينا:

$$109 \equiv 9 [10]$$

$$109 \equiv 3^2 [10]$$

$$109^{8n+1} \equiv (3^2)^{8n+1} [10]$$

$$\equiv 3^{16n+2} [10]$$

$$\equiv 9 [10]$$

ومنه:

$$109^{8n+1} \equiv 9 [10]$$

بالتعويض:

$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 9 - 2 \times 9 - 11 [10]$$

$$\equiv 9 - 18 - 11 [10]$$

$$\equiv -20 [10]$$

$$\equiv -10 [10]$$

$$\equiv 0 [10]$$

ومنه:

$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$$

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

النميرين

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$$

(3) عين الأعداد الطبيعية n حيث:

$$10 < n \leq 25 \text{ و } 7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$$

(4) العدد الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 3 على

الشكل $\overline{xx02102^3}$ ويكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9

على الشكل $\overline{y67y^9}$.

أ- عين x و y .

ب- أكتب A في النظام العشري.

ج- أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

الحل

(1) دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10:

لدينا:

$$n = 0 : 3^0 \equiv 1 [10]$$

$$n = 1 : 3^1 \equiv 3 [10]$$

$$n = 2 : 3^2 \equiv 9 [10]$$

$$n = 3 : 3^3 \equiv 7 [10]$$

$$n = 4 : 3^4 \equiv 1 [10]$$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$n = 4k : 3^{4k} \equiv 1 [10]$$

$$n = 4k + 1 : 3^{4k+1} \equiv 3 [10]$$

$$n = 4k + 2 : 3^{4k+2} \equiv 9 [10]$$

$$n = 4k + 3 : 3^{4k+3} \equiv 7 [10]$$

أي:

$$\begin{cases} A = 972x + 65 \\ A = 730y + 549 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

$$972x - 730y = 484$$

تلخص قيم x و y في الجدول التالي:

$972x - 730y = 484$			
x	1	2	$0 < x < 3$
y	$\notin \mathbb{N}$	2	$0 < y < 9$

ومنه:

$$(x; y) = \{(2; 2)\}$$

(4) ب- كتابة A في النظام العشري:

لدينا:

$$A = 972x + 65$$

$$A = 972 \times 2 + 65$$

نجد:

$$A = 2009$$

(4) ج- كتابة A في النظام ذي الأساس 7:

2009	7					
0	287	7				
	0	41	7			
		6	5	7		
			5	0		

ومنه:

$$A = \overline{5600}_7$$

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عالم محمد

(3) تعيين الأعداد الطبيعية n حيث:

$$10 < n \leq 25 \text{ و } 7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$$

لدينا:

$$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$$

$$7 \times 3 \times 3^n - 1 \equiv 0 [10]$$

$$21 \times 3^n - 1 \equiv 0 [10]$$

$$3^n - 1 \equiv 0 [10]$$

$$3^n \equiv 1 [10]$$

نلاحظ من الجدول أن $[10] \equiv 3^n \equiv 1$ إذا كان $n = 4k$.

لدينا:

$$10 < n \leq 25$$

$$10 < 4k \leq 25$$

$$\frac{10}{4} < k \leq \frac{25}{4}$$

$$2,5 < k \leq 6,25$$

ومنه:

$$k \in \{3; 4; 5; 6\}$$

قيم n موضحة في الجدول التالي:

k	3	4	5	6
$n = 4k$	12	16	20	24

(4) أ- نعين x و y :

A العدد الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 3 على الشكل $\overline{xx02102}_3$ ويكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $\overline{y67y}_9$.

لدينا:

$$\begin{cases} A = \overline{xx02102}_3; 0 < x < 3 \\ A = \overline{y67y}_9; 0 < y < 9 \end{cases}$$

من جهة:

$$A = 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 0 \times 3^4 + x \times 3^5 + x \times 3^6$$

ومن جهة أخرى:

$$A = y \times 9^0 + 7 \times 9^1 + 6 \times 9^2 + y \times 9^3$$

صفحة 2

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عالم محمد