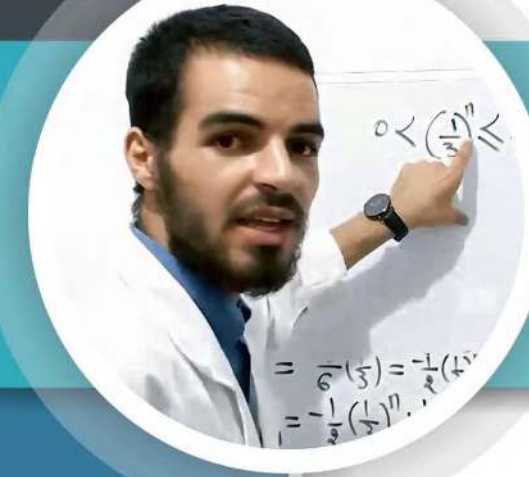


تمارين شاملة في الدوال

وفق البرنامج الوزاري
2021 / 2020

الأستاذ
عبد الرحمان
للرياضيات



تمارين شاملة في الدوال:

- العددية
- الأسية
- اللوغارتمية

النحبات + الاشتقاقية + دراسة دوال: كثير الحدود، جذرية، ناطقة وصماء

قناة لتعليم الرياضيات لمختلف الأطوار

بدروس و تمارين قيمة وبشرح مفصل ومبسط ودقيق

كما يمكنكم الاتصال بنا على  أو  أو 

FB.COM/ABDOU.MATH17

التمرين الأول

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة a المشار إليها في كل من الدوال المعرفة بـ:

- $f_1(x) = x^2; a = 1$
- $f_2(x) = x^2 + 1; a = 2$
- $f_3(x) = 3x + 1; a = 0$
- $f_4(x) = x^2 + x; a = -1$
- $f_5(x) = \frac{1}{x+1}; a = 2$
- $f_6(x) = \frac{x}{x+2}; a = -1$
- $f_7(x) = \frac{x+1}{x+3}; a = 1$
- $f_8(x) = \frac{1}{x} + 2; a = -1$
- $f_9(x) = \sqrt{x}; a = 1$
- $f_{10}(x) = \sqrt{x+3}; a = 6$
- $f_{11}(x) = \sqrt{-x-1} + 2; a = -1$
- $f_{12}(x) = \sqrt{2x}; a = 2$

التمرين الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس لمنحني كل دالة من الدوال المعرفة كإيلي في النقطة ذات الفاصلة x_0 :

- $f(x) = -3x^3 + x - 4; x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}; x_0 = -2$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} + 2; x_0 = 3$
- $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}; x_0 = 0$

التمرين الثالث

a, b و c أعداد حقيقية.

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مسَـرٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين الأعداد a, b, c و c بحيث المنحني (C_f) يشمل النقطة $A(1; -3)$ ويقبل في النقطة $B(0; 1)$ مماساً موازياً للمستقيم ذو المعادلة: $y = -6x$.

التمرين الرابع

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية تحقق:

$$f'(3) = 3 \quad f(1) = 2 \quad f'(-2) = -3$$

- عين الدالة f .

التمرين الخامس

احسب مشتقة كل دالة من الدوال المعرفة كإيلي:

- $f_1(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 5x$
- $f_2(x) = \frac{3x^2 + 6x - 3}{4}$
- $f_3(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
- $f_4(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$
- $f_5(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$
- $f_6(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$
- $f_7(x) = \frac{x-3}{x^2 - 8x + 16}$
- $f_8(x) = (2x+1)^2$
- $f_9(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x+3}$
- $f_{10}(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$
- $f_{11}(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3}$
- $f_{12}(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$
- $f_{13}(x) = \sin x + 3\cos x$
- $f_{14}(x) = \tan x$
- $f_{15}(x) = (\sin x)(\cos x)$
- $f_{16}(x) = \cos^2 x$
- $f_{17}(x) = \frac{1}{\cos x}$
- $f_{18}(x) = \frac{1}{\tan x}$
- $f_{19}(x) = \frac{1 + \sin x}{3 + \cos x}$
- $f_{20}(x) = \sin(3x - 2)$
- $f_{21}(x) = \cos(-5x - 5)$
- $f_{22}(x) = \sqrt{2x} + 2$

التمرين السادس

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1-x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4-x^2}{x-2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1-x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+2}{x^2 + x} + \frac{3x+1}{x^2 - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

التمرين السابع

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 9 \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x+1)^2 - 5x^2 + 3)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 3}{x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 2x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x^2 - x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x+1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2-x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-1} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{3\sqrt{x} + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}+2} \right)$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

التمرين الثامن

احسب النهايات التالية:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 3x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{9x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 1}$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1} \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}} \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

احسب نهايات كل من الدوال المعرفة بالعبارات أدناه عند أطراف مجموعة تعريفها مفسراً النتائج هندسياً:

$$\bullet f_1(x) = \frac{1}{x-2} ; D_1 =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\bullet f_2(x) = 2 - \frac{1}{x^2} ; D_2 =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\bullet f_3(x) = \frac{2x}{1-x} ; D_3 =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\bullet f_4(x) = \frac{x^2+4}{x^2+x-2} ; D_4 =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\bullet f_5(x) = \frac{-x+1}{x^2+1} ; D_5 =]-\infty; +\infty[$$

$$\bullet f_6(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} ; D_6 =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2- احسب $f'(x)$ (حيث f' الدالة المشتقة للدالة f).

3- ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- أ- أثبت أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (T) والمنحنى (C_f) .

5- بين أن النقطة $\Omega(0; 2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) .

6- مثل بيانياً (C_f) .

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسّر ذلك هندسياً.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- عَيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) ، مع حامل محوري الإحداثيات.

4- أ- بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن: $(4-x) \in D$

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ (C_f) .

5- مثل بيانياً (C_f) .

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

3- مثل بيانياً (C_f) .

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- عَيّن إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات.

3- أ- برهن أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تماثل لـ (C_f) .

ب- عَيّن معادلة للمماس (T) في النقطة ω .

4- مثل بيانياً كل من (T) و (C_f) .

5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانياً وحسب قيم m عدد إشارة حلول المعادلة : $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

a و b عدداً حقيقيين.

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- عَيّن العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- احسب $f(5), f(1), f(0)$ و $f(-2)$.

4- اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .

6- مثل بيانياً كل من (T) و (C_f) .

التمرين السادس عشر

a و b عددا حقيقيان.
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- عين العددين a و b بحيث: (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة التي ترتيبها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقاربا له.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- عين إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات.
- 4- بين أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي -2 يطلب تعيين معادلتيهما.
- 5- مثل بيانيا (C_f) .

التمرين السابع عشر

a و b عددا حقيقيان.
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- عين العددين a و b بحيث (C_f) يقبل عند النقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.
ب- بين أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته.
- 4- عين إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات.
- 5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 6- برهن أن نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) هي مركز تناظر لـ (C_f) .
- 7- عين معادلة للمماس (T) في النقطة w .
- 8- مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

التمرين الثامن عشر

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- احسب $g(0)$ و $g(\frac{1}{2})$.

3- أ- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

II. هي الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ كيلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

ونسَمي (Γ) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

2- عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا

3- احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

4- شكل جدول تغيرات الدالة f .

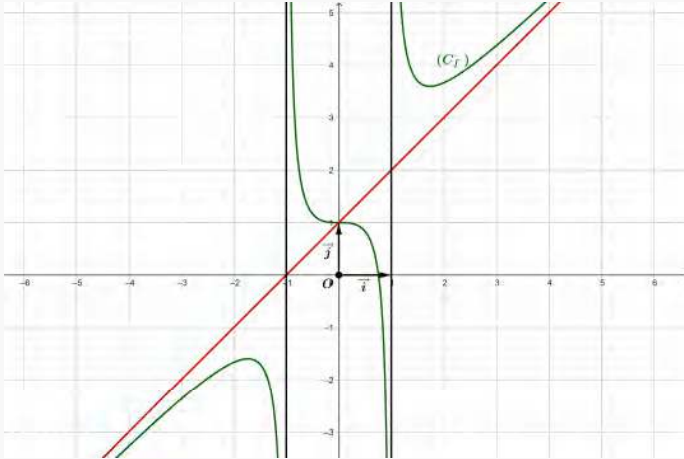
5- مثل بيانياً (Γ) .

التمرين التاسع عشر

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كيلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل المقابل:



1- بقراءة بيانية - دون استعمال عبارة الدالة f - أوجد مايلي:

أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- معادلة المسقيمت المقاربة للمنحنى (C_f) .

ج- إشارة $f(\frac{1}{2})$.

2- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

3- أ- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

4- من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، احسب $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كيلي:

$$g(x) = f(|x|)$$

ونسَمي (C_g) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g في الصفر.

2- بين أن الدالة g زوجية.

3- انطلاقا من (C_f) مثل بيانيا (C_g) ، اشرح طريقة الإنشاء.

4- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$|x|^3 + (1 - |m|)(x^2 - 1) = 0$$

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; 3[$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$.

2- ادرس إتجاه الدالة f على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

4- أوجد فواصل النقاط التي تكون فيها المستقيمات المماسية لـ (C_f) موازية للمستقيم (d) .

5- مثل بيانيا (C_f) .

التمرين الواحد وعشرون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$ حيث a, b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في جوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلته.

2- ادرس تغيرات f .

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}[$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4- مثل بيانيا (C_f) .

5- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x^3 - (m+1)x^2 + m + 1 = 0$.

II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x| - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أثبت أن الدالة h زوجية. فسّر ذلك هندسيا.

2- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- مثل بيانيا (C_h) .

التمرين الثاني وعشرون

a و b عددا حقيقيان.

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- عيّن العددين a و b بحيث: المنحنى (C_f) يمر من النقطة $A(0; 3)$ ويقبل فيها مماسا معاملا توجيهه 4.

II. نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

1- عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2 + 1}$.

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x + 3$.

4- أثبت أن (C_f) يقبل ثلاث نقاط إنعطاف يطلب تعيينها.

5- بين أن النقطة $A(0; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6- أثبت أن (C_f) يقبل مماسين معاملا توجيههما 2.

7- مثل بيانيا (C_f) والمستقيم (Δ) .

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = 4x + m$.

التمرين الثالث وعشرون

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]2.19; 2.20[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن: $f(\alpha) = \frac{3(\alpha + 2)}{\alpha^2 - 1}$ ، ثم أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-1} .

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5- مثل بيانيا المستقيم (Δ) ، ثم المنحنى (C_f) .

III. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة h في 0.

2- بين أن الدالة h زوجية.

3- بين كيف يمكن تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه.

التمرين الرابع وعشرون

a و b عددا حقيقيان. I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل المقابل:

- 1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 3- أ- بين أن: $f(a) = a - \frac{2}{a^2+1}$
ب- أوجد حصرا للعدد $f(a)$.
- 4- أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d ، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.
ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 5- أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل تقطعي إنعطاف يُطلب تعيينهما.
- 6- بين أنه يوجد مماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الترتيب -2 ، يُطلب كتابة معادلتيهما.
- 7- مثل بيانيا المماسين (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $m(x^2+1)+2=0$.

التمرين السادس وعشرون

I. تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- بين أن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ذات الفاصلة 1 مركز تناظر، يُطلب تعيين ترتيبتها.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- أ- عين الأعداد الحقيقية a و b ، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{x}{x-1}$
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.
ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 4- بين أنه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) عموديان على المستقيم ذو المعادلة: $y = -4x$ ، يُطلب تعيين معادلة كلٍّ منهما.
- 5- مثل بيانيا كل من (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 6- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$3x^2 + (5 - |m - 1|)x + (|m - 1| - 4) = 0$$

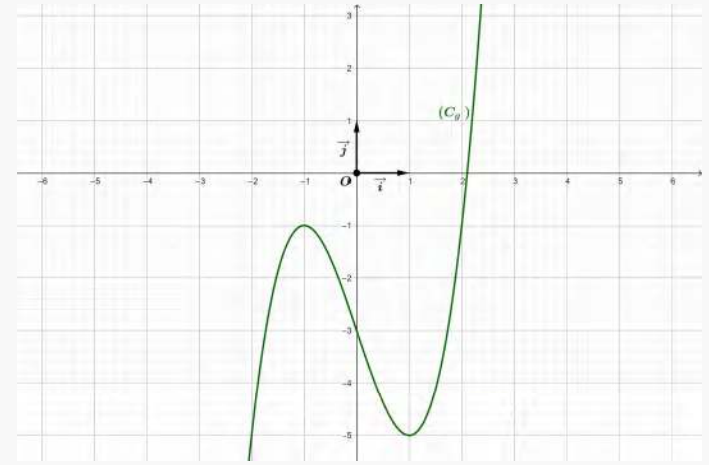
II. تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$ -عبارة $h(x)$ غير مطلوبة-

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.
ب- ادرس بطريقتين مختلفتين، اتجاه تغير الدالة h .
ج- شكّل جدول تغيرات الدالة h .
- 2- بين أن الدالة h زوجية، ثم فسّر ذلك هندسيا.
- III. تعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كالتالي: $k(x) = 2xf'(x^2)$ -عبارة $k(x)$ غير مطلوبة-
- 1- ادرس إشارة $k(x)$.
- 2- برهن حسابيا بطريقتين مختلفتين أن الدالة k فردية، ثم فسّر ذلك هندسيا.

التمرين السابع وعشرون

الأجزاء I، II و III مستقلة.



1- باستعمال المنحنى (C_g) الممثل في الشكل السابق. عين a و b و c .

2- بين أن المعادلة $x^3 - 3x - 3 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in \left] 2; \frac{5}{2} \right[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$
2- عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 3- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- 4- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- بين أن: $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- 6- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 7- مثل بيانياً المستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

التمرين الخامس وعشرون

I. تعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in]-1; 0[$.
ب- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1} .
- 3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- 4- بين أن: $\alpha^2 = -3 - \frac{4}{\alpha - 1}$.
- II. تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. باستعمال العدد المشتق. احسب النهايتين التاليتين:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3} \bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin(x) \cdot \sin(\alpha)}{x - \alpha} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2021} - 1}{x - 1}$$

II. أوجد قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & ; x \geq 1 \\ ax - x & ; x < 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$.

III. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في α .

- حدد النهايات الآتية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a+x^2)}{x} \bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha}$$

التمرين الثامن وعشرون

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[2.25; 2]$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

I. f دالة معرفة على $\{-1; 1\}$ كإيلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسمي (C_f) منحنيا البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5- بين أن: $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1}$ ، ثم أوجد حصرًا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(\beta; 0)$ حيث: $-1.25 < \beta < -1.5$.

7- مثل بيانيًا (C_f) .

III. تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{\beta\}$ كإيلي:

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة h ، ثم مثل (C_h) بيانيًا.

2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيًا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = |m - 1|$.

3- n وسيط حقيقي. ناقش بيانيًا وحسب قيم n عدد حلول المعادلة: $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ حيث: $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4- γ وسيط حقيقي. ناقش بيانيًا وحسب قيم γ عدد حلول المعادلة $f(x) = \sin(\gamma)$ حيث: $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

التمرين التاسع وعشرون

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-3; -4]$.

ب- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\frac{n}{10} \leq \alpha \leq \frac{n+1}{10}$.

ج- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
2- بين أن: $a^3 = -3a - 2$.
II. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كإيلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

ونسمي (C_f) منحنيا البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4- بين أن: $f(\alpha) = -\frac{3}{\alpha + 1}$ ثم استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

5- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -2$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب- اكتب معادلة للمماس (T) .

7- مثل بيانيًا المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

8- m وسيط حقيقي. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة: $0 = (m+2)(x+1)^2 - 3x - 1$ حلين مختلفين في الإشارة.

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[-1; -2]$ ، ثم عَيِّن حصاراً لـ α سعته 10^{-1} .
- 3- نعتبر كثير الحدود التالي: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$.
- أ- تحَقِّق من أن: $p(1) = 0$.
- ب- بين أن المعادلة $x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0$ تقبل حلاً وحيداً β على $\mathbb{R}$ ثم تحَقِّق أن: $0.2 < \beta < 0.3$.
- ج- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x) = 0$.
- د- بين أنه يوجد مماسان لـ (C_f) يمران بالنقطة $B(0; \frac{1}{2})$.
- 4- اكتب معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و -1 على الترتيب.
- 5- أ- برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلته.
- ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- 6- برهن أن النقطة $I(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- 7- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.
- 8- مثل بيانياً كل من المستقيمين (T_1) و (T_2) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 9- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = |f(x)|$$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
- ب- فسر كيف يمكن تمثيل (C_g) انطلاقاً من (C_f) .
- 2- مثل بيانياً (C_g) .

التمرين الواحد وثلاثون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x + 2)}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- 2- أ- احسب $f'(x)$.
- ب- ادرس إشارة $f'(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟
- ج- شكّل جدول تغيراتها.
- 3- عَيِّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = a(x - 1)^2 + \frac{b}{2(x + 2)}$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ ثم فسر ذلك هندسياً.
- 2- ادرس الوضع النسبي بين (C_g) و (C_f) .
- 3- اعتماداً على جدول تغيرات الدالة f . ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.

II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2(x + 2)}$$

التمرين الثاني وثلاثون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x - 2)}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1- أ- احسب: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 3- أ- برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - \frac{3}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .
- 4- بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- 5- بين أنه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما $\frac{3}{2}$ ، يُطلب تعيين معادلة كل منهما.
- 6- تحَقِّق من أن نقطتي التماس (T_1) و (T_2) مع المنحنى (C_f) متناظرتين بالنسبة لمركز تناظر (C_f) .
- 7- مثل بيانياً (C_f) .

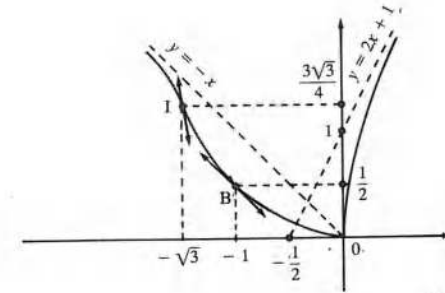
II. نعتبر الدالة الوسيطة f_m ذات المتغير x والوسيط الحقيقي m المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كإيلي:

$$f(x) = \frac{4x^2 + (m + 8)x - m + 4}{2(x - 2)}$$

ونسَمي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي إليها جميع المنحنيات (C_{f_m}) .
- 2- ماهو المنحنى الذي يشمل $A(\frac{7}{4}; 0)$.

I. (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$. الشكل المقابل يوضح ذلك:



- بقراءة بيانية. أوجد مايلي، مع التبرير:

- أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ب- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
- ج- $f'(-1)$ و $f''(-\sqrt{3})$
- د- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$

II. تعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 2- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، احسب: $g'(x)$.
- ب- عين إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة g .
- 4- m وسيط حقيقي. انطلاقاً من جدول تغيرات الدالة g ، ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x) = |m - 2|$.

I. تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 احسب الدالة المشتقة للدالة f .
- 2- بين أنه من أجل $x < 0$ لدينا: $f'(x) < 0$.
- 3- بين أنه من أجل $x \geq 0$ لدينا: $f'(x) < 0$.
- 4- بين أنه من أجل كل $x < 0$ لدينا: $f(x) + 3x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.
- 5- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 3x - 1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 6- بين أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا: $f(x) + x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.
- 7- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 8- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1.3 < \alpha < 1.4$.
- ب- احسب $f(0)$.
- 9- مثل بياناً (C_f) .

II. تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x) = (f(x))^2$$

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$
- 2- ادرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

I. تعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

- 1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$.
- II. تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
- ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 3- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .
- 4- مثل بياناً (C_f) .
- 5- m وسيط حقيقي. ناقش بياناً حسب قيم m عدد إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $f(x) = x + m$.
- III. تعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$k(x) = f(x^2)$$

- 1- ادرس إتجاه تغير الدالة k بطريقتين مختلفتين.
- 2- شكّل جدول تغيرات الدالة k .

I. تعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right]$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{2x - 1}}{x}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $\frac{1}{2}$ من اليمين، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- 2- ادرس تغيرات الدالة f .
- 3- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; 2[$: $|f'(x)| < 1$.
- 4- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; 2[$: $f'''(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 \sqrt{2x - 1}^3}$.
- 5- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة نقطة انعطاف، يُطلب تعيين إحداثياتها.
- 6- مثل بياناً (C_f) .
- 7- m وسيط حقيقي. ناقش بياناً حسب قيم m عدد إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x + \sqrt{2x - 1} - mx = 0$.
- II. 1- حل في المجال $[0; \pi]$ المتراجحة: $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.
- 2- تعتبر الدالة k المعرفة على $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ بـ:

$$k(x) = f(\sin x)$$

- أ- ادرس إتجاه تغير الدالة h بطريقتين مختلفتين.
- ب- شكّل جدول تغيرات الدالة h .

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب تغيرات الدالة f .
- 2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 3- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ احسب: $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟
- 5- بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1 < \alpha < 2$.
- 6- مثل بيانيا المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة h في 0، ثم فسّر ذلك هندسيا.
- 2- بين أن الدالة h زوجية.
- 3- انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h) .

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 2]$ بـ:

$$f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في -2، ثم في 2 من اليسار.
ب- فسّر ذلك هندسيا.
- 2- احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس إشارتها.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- حل في المجال $[0; 2]$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 5- اكتب معادلة للمماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 6- مثل بيانيا (C_f) .

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$f(x) = (1 - x) \sqrt{1 - x^2}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{j}\| = 4cm$.

- 1- أ- احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟
ب- فسّر النتيجة هندسيا

$$2- \text{بين أنه من أجل كل } x \text{ من }]-1; 1[: f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- 3- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1; 1]$.
- 4- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 6- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .
- 7- مثل بيانيا المستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $[-1; 1]$ بـ:

$$g(x) = (1 - x) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}$$

- 1- بين أن منحنى الدالة g هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلّب تعيينه ثم مثله بيانيا.
- 2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x) = e^m$.

m وسيط حقيقي يختلف عن 4.

نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f_m(x) = \frac{2x^2 + mx + 2}{(x + 1)^2}$$

ونسَمي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- 2- ادرس حسب قيم m كل من: $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$ ، ثم فسّر ذلك هندسيا.
- 3- أ- ادرس حسب قيم m اتجاه تغير الدالة f_m .
ب- حسب قيم m ، شكّل جدول تغيرات الدالة f_m .
- 4- بين أنه توجد مستقيمات مماسية ل (C_{f_m}) موازية لحامل محور القواصل في نقطة، يطلّب تعيينها.
- 5- برهن أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر من نقطة وحيدة ثابتة، يطلّب تعيين إحداثياتها.
- 6- أوجد نقط تقاطع (C_{f_m}) مع محوري الإحداثيات.
- 7- مثل بيانيا وفي نفس المعلم كل من (C_{f_8}) و $(C_{f_{-4}})$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x - e^{-x}$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$.

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 - أ - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب - عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$; ثم قسّر النتيجة هندسياً.

3 - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 - بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كانت $g(x) = 0$ ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5 - مثل بيانياً (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2 - انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h) .

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$.

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$.

3 - أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب - عين $(\ln 3) - f''$ دون حساب عبارة $f''(x)$ - برّ إيجابتك.

4 - أ - بين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.

ب - بين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.

5 - ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

7 - بين أن النقطة $I(\ln(3); \ln(3))$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

8 - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-2; -1]$. ثم عين حصراً للعدد α سعته 10^{-1} .

9 - أنشئ المستقيمين (Δ_1) ، (Δ_2) ، المماس (T) والمنحني (C_f) .

10 - ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي غير المدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$.

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(3x - 2)$ - عبارة $g(x)$ غير مطلوبة -.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ثم بين أن: $3f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)$.

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

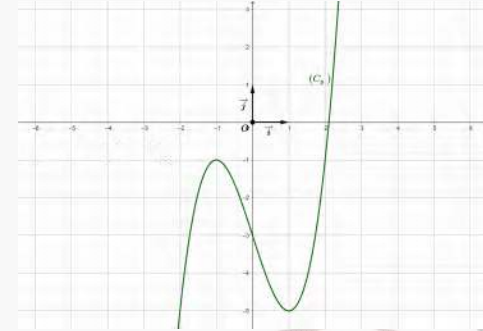
دراسة دوال أسية

4 - تحقق من أن: $y = \frac{3a^2}{4}x - \frac{a^2(a+2)}{4}$ معادلة للمستقيم (D).

التمرين الثالث

(I) a, b, c أعداد حقيقية.

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x + c$.
ونسعي تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، كما في الشكل أدناه:



1 - بقراءة بيانية، أوجد مايلي:

أ- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
ب- $g'(0)$ و $g(0)$

2- مآ سبق، أوجد: a, b, c .

3- نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_f) منحنيا البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

ب- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

4- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) يمر من المبدأ، يطلب كتابة معادلة له.

5- بين أن: $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم أوجد حصراً لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

7- مثل بيانياً المماس (T) ، ثم المنحنى (C_f) .

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x + 1}$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$. ماذا استنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- برهن أن النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

3- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$. ماذا استنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

4- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.76 < \alpha < -2.77$.

5- أ- احسب $f(0)$

ب- مثل بيانياً (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(4x + 1)$ -عبارة $g(x)$ غير مطلوبة-.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2- تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $4f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$

3- استنتج معادلة المماس (T) للمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

4- تحقق من أن: $y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$ معادلة للمماس (T) .

(III) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسعي (C_k) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة k زوجية.

2- أ- بين كيف يمكن تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) .

ب- انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2- أ- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب- انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h) .

التمرين الخامس

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.8 < \beta < -1.9$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كيلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ ، ثم فسّر ذلك هندسياً.
- 2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.
- 3- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 4- عيّن دون حساب كل من: $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$ و $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 5- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصراً لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .
- 6- تعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^x - xe^x - 1$
 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.
 - نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$.
 - تحقّق من أن: $p(0) = 0$.
- 8- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.
- ب- اكتب معادلة للمماس (T) .
- ج- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T) ، ماذا استنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟
- 9- نأخذ: $1.195 \simeq f(\beta)$ ، مثل بياناً للمستقيم (T) ، ثم المنحنى (C_f) .
- 10- m وسيط حقيقي، ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$.

التمرين السادس

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي: $g(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

ونسَمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة g' .
- 2- احسب $g'(1)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.
- 3- ادرس تغيرات الدالة g .
- 4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مقارب لـ (C_g) بجوار $(-\infty)$.
- ب- ادرس وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.
- 5- أ- بين أن المنحنى (C_g) يقبل مماساً (D) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.
- ب- اكتب معادلة المماس (D) .
- 6- بين أن المنحنى (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $2 < \alpha < 1.9$ و $-0.5 < \beta < -0.6$.
- 6- أنشئ (Δ) ، (D) ثم المنحنى (C_g) .
- 3- نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماماً m التالية: $(E): g(x) = 2x + \ln m$.
- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/BkfbE-ti_I . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

التمرين السابع

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$.
- ب- استنتج أن الدالة f فردية.

2- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب- ماذا استنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

6- مثل بياناً (C_f) .

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://youtu.be/lSpzGlcRII0> . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

التمرين الثامن

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -2e^{-2x} + e^{-x} + 1$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- ب- بين أن: $f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{4 - e^x}{e^{2x}}$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$.
- 5- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 6- احسب $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ - النتيجة مدوّرة إلى 10^{-2} .
- 7- مثل بياناً (C_f) على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- 8- m وسيط حقيقي.
- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = m + 2$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://youtu.be/fj5eqmiZ5hw> . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كالتالي :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

4 - بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

5 - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلّب تعيين إحداثيتها.

6 - مثل بيانياً المنحنى (C_f) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كالتالي : $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كالتالي : $f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$ ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2 - بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 - بين أن : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلّب تعيين معادلته.

- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يطلّب تعيينها. اكتب معادلة المماس (T) .

6 - مثل بيانياً كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) . علماً أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1 حيث

$0.2 < x_0 < 0.1$ و $1.5 < x_1 < 1.6$.

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كالتالي :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1}$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $h(x) = f(x+1) + 2$.

ب- بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$.

2- أ- بين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل بسيط يطلّب تعيينه.

ب- مثل بيانياً المنحنى (C_h) .

3- m وسيط حقيقي غير معدوم.

دراسة دوال لوغاريتمية

(T_m) مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|)x + 1$.

أ- برهن أن جميع المستقيمت (T_m) تشمل نقطة ثابتة وحيدة يُطلب تعيينها.

ب- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $h(x) = \ln(|m|)x + 1$.

التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x & ; x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{2(\ln(x))^2} & ; x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ونُسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.

2 ادرس تغيرات الدالة f .

3 - أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) مقاربا مائلا بمحاور $(-\infty)$ يطلب تعيين معادلته.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

4 - حل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ ، ماذا نستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

5 - بين أن (C_f) يقطع حامل محور القواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

6 - هل توجد مماسات لـ (C_f) تمر من مبدأ المعلم ($O; \vec{i}, \vec{j}$) ؟ برر إجابتك.

7 - مثل بياناً كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$.

ونُسمي (C_h) منحنياً البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1 - بين أن الدالة h زوجية.

2 - اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3 - مثل بياناً المنحنى (C_h) موضحاً طريقة الإنشاء.

4 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية: $h(x) = -(m^2 + a)$ حيث a عدد حقيقي.

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - حل المعادلة $g(x) = 0$.

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونُسمي (C_f) منحنياً البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1 - أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$.

ونُسمي (C_h) منحنياً البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1 - ادرس تغيرات الدالة h .

2 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، فسر النتيجة هندسياً.

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h).

3 - بين أن (C_h) يقبل A نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

4 - اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

5 - احسب $f(e)$ ، ماذا استنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

6 - مثل بياناً المنحنيين (C_f) و (C_h) مع المستقيم (T) في نفس المعلم.

7 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - (\ln x) - 2e^m = 0 \dots\dots\dots (F)$$

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (F).

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

<https://youtu.be/yUL3lFE2UG4> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

التمرين الخامس

(I) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - [-1; 1]$ بمجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	++	0	-	0	++	+
$f(x)$	$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$					$+\infty$

ونُسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 - علماً أن الدالة f فردية:

أ- عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ ، و $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$.

ج- أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2- نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

أ- مثل بياناً كل من المستقيم (d) والمنحنى (C_f). - نأخذ: $\sqrt{3} \simeq 1.7$ و $f(\sqrt{3}) \simeq 3$.

3- نرض أن عبارة $f(x)$ هي من الشكل: $f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية.

أ- باستعمال نتائج الجدول أعلاه بين أن: $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = 1$.

4- ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$.

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ كالتالي: $g(x) = \ln(f(x))$.

1- ادرس تغيرات الدالة g .

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

- 1- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.
- ب- بين أن الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.
- 2- استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$ (لاحظ أن: $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$).
- 3- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $[1; +\infty[$ فإن: $\frac{8}{\sqrt{x}} \geq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \geq 0$ ، ثم استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://www.youtube.com/watch?v=PBETbFpwiMI&t=4s> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln x + x - 3$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2.21 < \alpha < 2.2$.
- 3- عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2)$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- أ- احسب: $f'(x)$ ، ثم ادرس إشارتها.
- ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 3- عين دون حساب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 4- بين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.
- 5- حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- 6- بأخذ: $-0.66 \leq f(\alpha) \leq 0$ ، مثل بياناً المنحنى (C_f) ، على المجال $]0; 10[$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

<https://www.youtube.com/watch?v=9e3zBhsbjnU> . الأستاذ عبد الرحمن للرياضيات

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g .
- 2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.
- ب- تحقق من أن: $1.32 < \alpha < 1.31$.
- 3- عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- 4- برهن أن: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 2- بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- 3- شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 4- بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$.
- 5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(III) • نسعي (Γ) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \ln x$.

- النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 2)$.
- نقطة M من المنحنى (Γ) فاصلتها x .

- 1- بين أن المسافة AM تعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$.
- 2- نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.
أ- برهن أن للدالتين f و k نفس إجهاد التغير على المجال $]0; +\infty[$.
- ب- برهن أن المسافة AM أصغر من P نقطة من (Γ) ، يُطلب تعيين إحداثياتها.
- ج- برهن أن: $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
- 3- هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P ؟ برّر إجابتك.

الحل

I.

1. [لحل دراسة تغيرات الدالة \$g\$](#)

النهايات

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 + \ln x) \\ &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 + \ln x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

المشتقة : الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

إشارة المشتقة وإجهاد التغير

إن $g'(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.
جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. [لحل تبين أن المعادلة \$g\(x\) = 0\$ تقبل حلاً وحيداً \$\alpha\$ في المجال \$\]0; +\infty\[\$](#)

لدينا من جدول التغيرات الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $0 < \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4 **🔗 تبين أن:** $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 \dots \dots (1)$$

ومع سبق وجدنا:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2 \dots \dots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - (2 - \alpha^2))^2$$

يكافئ:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

5 **🔗 استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:**

من جدول تغيرات الدالة f لدينا:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

.III

1 **🔗 تبين أن المسافة AM تعطى بـ:** $AM = \sqrt{f(x)}$ على المجال $]0; +\infty[$

لدينا: M نقطة من (Γ) معناه إحداثياتها هما: $(x; \ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (- (2 - \ln x))^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

2 **🔗 أ- برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$:**

هنا نستعمل اتجاه تغير مركب دالتين -عد لدروس السنة الثانية ستجد هذا بالتفصيل-

$$u(x) = \sqrt{x};]0; +\infty[$$

لاحظ أن: $f = u \circ k$.

نعلم أن الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ والدالة f موجبة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي فإن L و k نفس اتجاه التغير.

ملاحظة: يمكنك اشتقاق الدالة k لتجد أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ وتقوم بدراسة إشارتها ومن ثم اتجاه التغير.

🔗 التحقق من أن: $1.31 < \alpha < 1.32$

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$. إذن $1.31 < \alpha < 1.32$.

3 **🔗 تبين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:**

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

4 **🔗 برهان أن:** $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ يكافئ:

$$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

يكافئ:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

.II

1 **🔗 حساب:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (2 - \ln x)^2) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (2 - \ln x)^2) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2 **🔗 تبين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:**

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 \left(-\frac{1}{x} \right) (2 - \ln x) \\ &= 2x - \frac{2}{x} (2 - \ln x) \\ &= \frac{2x^2 - 4 + 2 \ln x}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

بما أن: $0 < \frac{2}{x}$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3 **🔗 تكمّل جدول تغيرات الدالة f :**

الحلج ب- برهان أنَّ المسافة AM أصغر في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثياتها

بما أنَّ لـ f و k نفس اتجاه التغير على المجال $0; +\infty$ فإنَّ: الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $\alpha = x$ وبالتالي المسافة أصغر لما $\alpha = x$ إذن:

$$P(\alpha; \ln \alpha)$$

يكافئ:

$$P(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

الحلج ج- برهن أنَّ: $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= |\alpha| \sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

3 الحلج هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للنحنى (Γ) في النقطة P؟ برِّإجابتيك.

لنبدأ أولاً بميل المستقيم المماس لـ (Γ) في النقطة P هو:

$$h'(\alpha) = \ln'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AP) هو:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \\ &= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\ &= \frac{-\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكر أنَّه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداؤ ميلهما يساوي -1.

لدينا: $-1 = -\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$ وبالتالي المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للنحنى (Γ) في النقطة P.

التحريث التاسع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $g(x) = xe^x - x + 1$

1 - ادرس تغيرات الدالة g' .

2 - احسب $g'(0)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - بين أنَّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \geq 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$

ونسعي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 - بين أنَّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

3 - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 - احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

5 - احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنحنى (C_f) ؟

6 - نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $u(x) = e^x + x - 2$.

أ - بين أنَّ المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1 < \alpha < 0$ ، ثمَّ عيّن حصرًا لـ α سعته 10^{-1} .

ب - استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.

7 - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

8 - أ - بين أنَّ المنحنى (C_f) يقبل مماساً (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب - برّر لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

ج - أوجد حصرًا للعدد $\alpha - f(\alpha)$ (تُدور النتائج إلى 10^{-2}).

د - اكتب معادلة المماس (δ) .

هـ - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.

9 - اكتب معادلة المماس (T) للنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

10 - مثل بيانياً كل من المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدالة $\ln(-x)$ والمنحنى (C_f) .

11 - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$.

11 - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = x + l$.

12 - (T_n) مستقيم ذو المعادلة $x - (e^n - e^{n-1}) = y - (2e^n - e^{n-1})$.

أ - برهن أنَّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثياتها.

ب - ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(x) = (2e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$$

(III) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي:

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right)$$

ونسعي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - بين أنَّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنَّ: $h(x) = -f(x) + 1$.

2 - أ - بين أنَّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يُطلب تعيينهما.

ب - مثل بيانياً المنحنى (C_h) .

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية: (E) $x(e^x - 1) - m = 0$ حيث $x \neq -1$.

- باستعمال المنحنى (C_h) ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(IV) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = h(2x - 2) + f(\alpha)$ - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة - .

1 - ادرس تغيرات الدالة k .

2 - تحقّق من أنَّ $1 = k\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)$ ، ثمَّ بين أنَّ: $k\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$.

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحنى الدالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha + 2}{2}$.

4 - تحقّق من أنَّ: $3 + \alpha - 2x = y$ معادلة للمستقيم (D) .

5 - احسب $k(-1)$.

(V) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي:

$$p(x) = f(|x|)$$

ونسعي (C_p) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - أ - احسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x^2}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة p ؟

ب - فسّر النتيجة هندسياً.

2 - أ - من أجل كل x عدد حقيقي، احسب $p(x) - p(-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة p ؟

ب - فسّر النتيجة هندسياً.

3 - اكتب $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

4 - باستعمال المنحنى (C_f) ، مثل بيانياً المنحنى (C_p) مبيناً طريقة الإنشاء.

(VI) نعتبر الدالة q المعرفة على المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ كيلي:

$$q(x) = k(\tan x)$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	$+$
$g'(x)$	-1	$-1 - e^{-2}$	$+\infty$

2  حساب $g'(0)$ ثم استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g'(0) = e^0 + (0)e^0 - 1 = 0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كاليلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

3  تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \geq 0$

حساب نهايات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 1$ ومنه : $g(x) - 1 \geq 0$.

الجزء الثاني

1  حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(xe^x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x - x + 1) = +\infty$$

2  تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3  شكل جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) > 0$ ومنه جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي :

ونسعي (C_q) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 - أ - ادرس بطريقتين مختلفتين اتجاه تغير الدالة q .

ب - شكّل جدول تغيراتها .

3 - حل في المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ المعادلة : $\tan x = -1$.

4 - اكتب معادلة المماس (L) للمنحني (C_q) في النقطة ذات الترتيب $f(a) + f(-4) - 1$.

المحل

الجزء الأول

1  دراسة تغيرات الدالة g'

حساب المشتقة الأولى g'

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

حساب نهايات الدالة g'

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + xe^x - 1) = -1$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + xe^x - 1) = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

حساب المشتقة الثانية g''

الدالة g' معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(x + 2)$$

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x + 2$ لأن $e^x > 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

إتجاه تغير الدالة g'

- لـ : $x \in]-\infty; -2]$ لدينا : $g''(x) \leq 0$ ومنه الدالة g' متناقصة .

- لـ : $x \in [-2; +\infty[$ لدينا : $g''(x) \geq 0$ ومنه الدالة g' متزايدة .

جدول تغيرات الدالة g'

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u(x)$	-2	-0.79	-0.57	-0.35	-0.10	0.14

إذن : $0.4 < \alpha < 0.5$.

الحل استنتاج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

7 الحل دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

لدينا : $f(x) - x = \ln(xe^x - x + 1) - x$

نضع : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $s(x) = \ln(xe^x - x + 1) - x$

لدينا : $s(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$.

الدالة s معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$s'(x) = f'(x) - 1 = \frac{g'(x)}{g(x)} - 1 = \frac{g'(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{e^x + xe^x - 1 - xe^x + x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{e^x + x - 2}{xe^x - x + 1} = \frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأن $g(x) > 0$ ومنه جدول تغيرات الدالة s يكون كالتالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$s'(x)$	-	0	+
$s(x)$	$+\infty$	$s(\alpha)$	$+\infty$

لدينا بما سبق : $f(1) = 1$: يكفي : $f(1) - 1 = 0$: يكفي : $s(1) = 0$ وكذلك : $g(0) = 1$: يكفي : $\ln g(0) = \ln 1$: يكفي : $s(0) = 0$.

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تلخص في الدول التالي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$s(x) = f(x) - x$	+	0	-	0	+
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ)	

- $(C_f) \cap (\Delta) = \{O(0;0)\}$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{M(1;1)\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4 الحل حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ثم تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(xe^x - x + 1) - \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{xe^x - x + 1}{-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(-e^x + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) ومنحنى الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$.

5 الحل حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(xe^x - x + 1) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(xe^x \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right)\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(xe^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

6 الحل تبين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0 < \alpha < 1$

الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $u'(x) = e^x + 1$ ولدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) > 0$. وكذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - 2) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - 2) = -\infty$

جدول تغيرات الدالة u

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	+	
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

لدينا : $u(1) = e - 1$ و $u(0) = -2$

الدالة u مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[0;1]$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

α حيث $0 < \alpha < 1$.

الحل تبين حصراً α سعته 10^{-1}

بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها

تذكير

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1.

(δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 معناه $f'(x_0) \times -1 = -1$ أي $f'(x_0) = 1$ أي:
 $\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = 1$ يكافئ: $\frac{e^{x_0} + x_0 e^{x_0} - 1}{x_0 e^{x_0} - x_0 + 1} = 0$ يكافئ: $\frac{e^{x_0} + x_0 e^{x_0} - 1}{x_0 e^{x_0} - x_0 + 1} = 0$ يكافئ: $\frac{u(x_0)}{g(x_0)} = 0$ وبما أن: $x_0 = \alpha$ فإن $g(x_0) > 0$ ومنه $u(x_0) = 0$ ومنه $x_0 = \alpha$.
 إذن (δ) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$.

التبرير لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ لأن جداء ميليهما يساوي -1. والمستقيم (δ) أيضا عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ من معطيات التبرير.

ونعلم أنه يتوازي مستقيمان إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.

فما يوجب إلى أن المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

لدينا: $u(\alpha) = 0$ يكافئ: $e^\alpha + \alpha - 2 = 0$ ومنه: $e^\alpha = 2 - \alpha$

ولدينا: $f(\alpha) = \ln(\alpha e^\alpha - \alpha + 1) = \ln(\alpha(2 - \alpha) - \alpha + 1)$ ومنه: $f(\alpha) = \ln(-\alpha^2 + \alpha + 1)$

لدينا: $(1) \quad 0.4 < \alpha < 0.5$ ، بتربيع الطرفين نجد: $(0.4)^2 < \alpha^2 < (0.5)^2$

بضرب كل من المتراجحتين (1) و (2) في العدد -1 نجد: $-(0.4)^2 > -\alpha^2 > -(0.5)^2$

بجمع (1) مع (4) طرف بطرف نجد: $-(0.5)^2 + 0.4 < -\alpha^2 + \alpha < -(0.4)^2 + 0.5$

بإضافة العدد 1 للمتراجحة (5) نجد $-(0.5)^2 + 0.4 + 1 < -\alpha^2 + \alpha + 1 < -(0.4)^2 + 0.5 + 1$

بما أن الدالة $\ln x$ $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ فإن:

$$\ln(-(0.5)^2 + 0.4 + 1) < \ln(-\alpha^2 + \alpha + 1) < \ln(-(0.4)^2 + 0.5 + 1) \quad (6)$$

بجمع (6) مع (3) طرف بطرف نجد:

$$\ln(-(0.5)^2 + 0.4 + 1) - 0.5 < \ln(-\alpha^2 + \alpha + 1) - \alpha < \ln(-(0.4)^2 + 0.5 + 1) - 0.4$$

ومنه: $-0.11 < f(\alpha) - \alpha < -0.36$

كتابة معادلة المماس (δ)

$$y_\delta = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = 1(x - \alpha) + f(\alpha) = x + f(\alpha) - \alpha$$

حساب $f(1)$ و $f(-2)$

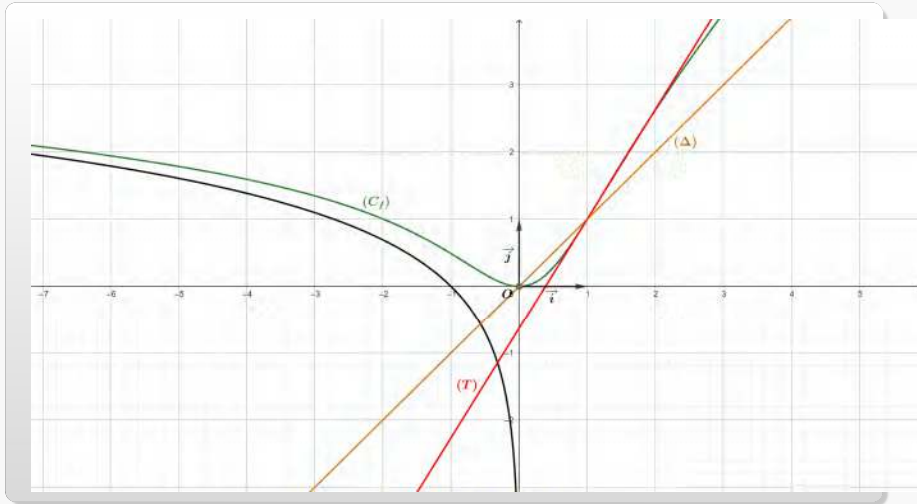
$$f(1) = \ln(1e^1 - 1 + 1) = 1$$

$$f(-2) = \ln(-2e^{-2} + 2 + 1) \simeq 1$$

كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T = f'(1)(x - 1) + f(1) = (2 - e^{-1})x + (e^{-1} - 1)$$

إنشاء: المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)



إنشاء: المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)

11

المنافشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$

حلول المعادلة $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $(2 - e^{-1})x + a$. ومنه:

- لـ $a < e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً.

- لـ $a = e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً هو: $x = 1$.

- لـ $a > e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً.

12

المنافشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي I عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = x + I$

حلول المعادلة $f(x) = x + I$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $x + I$. ومنه:

- لـ $f(\alpha) - \alpha < I$ المعادلة لا تقبل حلول.

- لـ $f(\alpha) - \alpha = I$ المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً هو: $x = \alpha$.

- لـ $f(\alpha) - \alpha > I$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماماً.

- لـ $I = 0$ المعادلة تقبل حلين هما: $x = 0$ و $x = 1$.

- لـ $I > 0$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

13

البرهان أن جميع المستقيمت (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثياتها

فرض أن المستقيمت (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A(x_1; y_1)$ معناه: $(2e^n - e^{n-1})x_1 - (e^n - e^{n-1})y_1 = 0$ يكافئ: $y_1 = (e^n(2 - e^{-1})x_1 - (e^n(1 - e^{-1})))$ الأخيرة هو e^n .

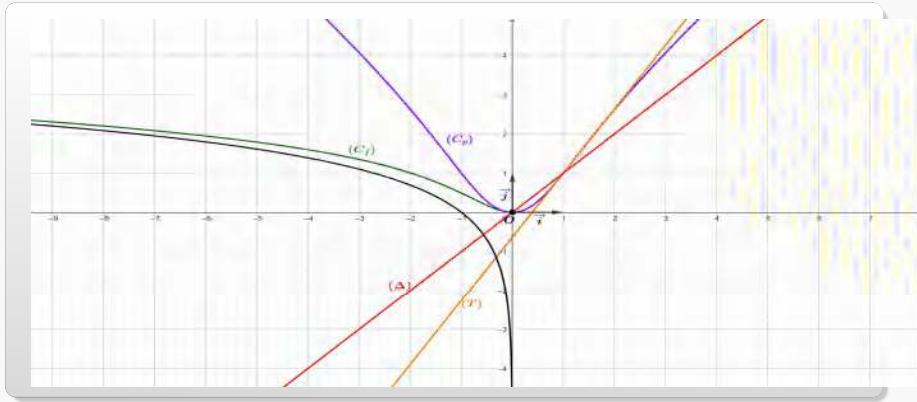
نعلم أنه ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي: $(2 - e^{-1})x_1 - (1 - e^{-1}) = 0$ ومنه: $\begin{cases} x_1 = \frac{1 - e^{-1}}{2 - e^{-1}} \\ y_1 = 0 \end{cases}$

ومنه جميع المستقيمت (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A(\frac{1 - e^{-1}}{2 - e^{-1}}; 0)$

المنافشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = (2e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$

أولاً وقبل البدء في هذه المناقشة يجب إيجاد قيمة n حتى يكون المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) .

المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) معناه: $e^n(2 - e^{-1}) = 1$ ومنه قيمة n حتى يتوازي المستقيمان (T_n) و (Δ) هي: $n = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-1}}\right)$



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_p)

الجزء السادس

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} k(x) = -\infty$ لأن : $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ و $\cos(x) = 0^+$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} k(x) = -\infty$ لأن : $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $\cos(x) = 0^-$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$$

التفسير الهندسي

• معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_q)

• معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_q)

2. دراسة بطريقتين مختلفتين اتجاه تغير الدالة q

الطريقة 1 هنا نستخدم فقط مشتقة الدالة k وإشارتها .

$$q'(x) = \tan' x \cdot k'(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot k'(\tan x)$$

لدينا : $k'(\tan x) = 0$ أي : $\tan x = 1$ يكافئ : $\sin x = \cos x$ يكافئ : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبما

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ فإن } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

- لما $\tan x \in]-\infty; 1]$ أي : $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ لدينا : $k'(\tan x) \geq 0$ معناه : $q'(x) \geq 0$ ومنه الدالة q متزايدة .

- لما $\tan x \in [1; +\infty[$ أي : $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ لدينا : $k'(\tan x) \leq 0$ معناه : $q'(x) \leq 0$ ومنه الدالة q متناقصة .

الطريقة 2 هنا نستخدم اتجاه تغير دالة مركبة .

لدينا : $q = k \circ v$ حيث v دالة معرفة كالتالي : $v : x \mapsto \tan x$

- الدالة k متزايدة على المجال $]-\infty; 1]$ لما $\tan x \leq 1$ أي : $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ والدالة $\tan$ متزايدة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

(لأن $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدالة q متزايدة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ أي : $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

- الدالة k متناقصة على المجال $[1; +\infty[$ و $\tan x \geq 1$ أي : $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ والدالة $\tan$ متزايدة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$

(لأن $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدالة q متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$

4. التحقق من أن : $y = -2x + \alpha + 3$ معادلة للمستقيم (D)

$$y = f'(\alpha)(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{e^\alpha + \alpha e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1$$

$$= \frac{2 - \alpha + \alpha(2 - \alpha) - 1}{\alpha(2 - \alpha) - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = \frac{-\alpha^2 + \alpha - 1}{-\alpha^2 - \alpha - 1}(\alpha + 2 - 2x) + 1 = -2x + \alpha + 3$$

5. حساب $k(-1)$

$$k(-1) = h(2(-1) - 2) + f(\alpha) = h(-4) + f(\alpha) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$$

الجزء الخامس

1. حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدالة p

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(xe^x - x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x(e^x - 1) + 1)}{x} \cdot (e^x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-xe^{-x} + x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x(-e^{-x} + 1) + 1)}{x} \cdot (-e^{-x} + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x(-e^{-x} + 1) = 0 \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = 1$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = 0$ نستنتج أن الدالة p قابلة للاشتقاق في الصفر .

تفسير النتيجة هندسيا

نفسر النتيجة السابقة هندسيا بأن المنحنى (C_p) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل معادلته هي : $y = f(0) = 0$

حساب $p(x) - p(-x)$ ، والاستنتاج بالنسبة للدالة p

من أجل كل x و $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ لدينا : $p(x) - p(-x) = f(|x|) - f(|-x|) = f(|x|) - f(|x|) = 0$ نستنتج أن الدالة p زوجية .

تفسير النتيجة هندسيا

نفسر النتيجة السابقة هندسيا بأن المنحنى (C_p) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) محور تناظر .

2. كتابة $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$p(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ f(-x); x \leq 0 \end{cases}$$

3. باستخدام المنحنى (C_f) ، إنشاء المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء

لما $x \geq 0$: (C_p) ينطبق على (C_f) . لما $x \leq 0$: نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب .

