

تمرين 1 (05 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 0، 0، 1، 1 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام -2، -2، 2 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين -1، -1. الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد.

(1) نعتبر الحادثتين: A: "سحب ثلاث كريات من نفس اللون" و B: "سحب كرية واحدة بيضاء على الأقل".

احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) نقترح اللعبة التالية: إذا سحب اللاعب ثلاث كريات جُءاء أرقامها موجب تماما يربح x نقطة (x عدد طبيعي)، إذا سحب اللاعب ثلاث كريات جُءاء أرقامها سالب تماما يربح نقطة واحدة، وإذا سحب اللاعب ثلاث كريات جُءاء أرقامها معدوما يخسر ثلاث نقاط. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح أو خسارة اللاعب.

(أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) يبين أن الأمل الرياضي هو $E(X) = \frac{4x-32}{21}$ ، ثم أوجد أصغر قيمة لـ x حتى تكون اللعبة مربحة.

(3) نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع. احسب عدد الحالات الممكنة لسحبها بحيث جُءاء أرقامها يساوي 4. (في كل التمرين، تُحسب الاحتمالات على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين 2 (07 نقاط)

I - عيّن على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3-4i$. استنتج حلول المعادلة: $(z-1-i)^2 = 3-4i$.

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -1+2i$ ، $z_B = 3$ و $z_C = 3+2\sqrt{5}i$.

(1) احسب كلا من $|z_B - z_A|$ و $|z_C - z_B|$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

(2) اكتب كلا من $(z_A + z_B)$ و $(z_C - z_B)$ على الشكل الأسّي ثم يبين أن: $\left(\frac{z_A + z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1442} - \left(\frac{z_C - z_B}{2\sqrt{5}}\right)^{2021} = 0$.

(3) لتكن D نقطة من المستقيم (BC) تختلف عن C لاحقتها z_D .

(أ) يبين أن $z_D = 3 + \alpha i$ ، حيث α عدد حقيقي، ثم عيّن العدد الحقيقي α حتى يكون $AB = BD$.

(ب) استنتج طبيعة المثلث ACD والعناصر المميزة للدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة به ثم ارسمها. (استعمل α الموجود سابقا)

(4) لتكن النقطة E لاحقتها z_E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة B.

(أ) يبين أن $z_E = 7 - 2i$ ، ثم عيّن بدقّة طبيعة الرباعي ADEC وارسمه.

(ب) عيّن وأنشئ المجموعة $(\mathcal{C}')$ للنقط $M(z)$ حيث: $\|\vec{MA} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME}\| = \|\vec{MA} - \vec{MC} + \vec{MD} - \vec{ME}\|$.

(5) F و G نقطتان لاحقتهم z_F و $z_G = z_F + 2$. عيّن z_F حتى يكون المثلث المباشر AFG قائم في A ومتساوي الساقين.

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 4x + 1 - \frac{6}{x} + 3\ln x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) احسب $g'(x)$ ، ثم استنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(3) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \frac{3\ln x}{x+2}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسّر النتيجة هندسيا ثم بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$. استنتج وجود مستقيما مقاربا مائلا (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(2) أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = -1 - \frac{2}{x} + \ln x$.

أ) بيّن أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ب) بيّن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4,3 < \alpha < 4,4$.

ج) بيّن أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا (Δ') موازيا للمستقيم (Δ) معادلته $y = -x + \frac{3}{\alpha}$.

(4) ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ ، المستقيم (Δ) والمماس (Δ') . نأخذ $f(\alpha) = -3,6$.

(5) استعمل $(\mathcal{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $mx + 2m - \ln x = 0$ حلين متمايزين.

(6) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول u_0 ، حيث $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(-u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n < -1$.

ب) بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.



ومنه الجذرين التربيعيين هما: $z-i$ و $-z+i$
 $z-1-i = z-i$ يعني $(z-1-i)^2 = 3-4i$
 أو $z-1-i = -z+i$ ومنه:

$$z_2 = 3 \quad , \quad z_1 = -1+2i$$

$$|z_B - z_A| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (1 \text{ II})$$

$$|z_C - z_B| = |2\sqrt{5}i| = 2\sqrt{5}$$

ومن هنا المثلث ABC متساوي الساقين.

$$z_A + z_B = z + 2i = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

$$z_C - z_B = 2\sqrt{5}i = 2\sqrt{5} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{z_A + z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1442} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442} = e^{i\frac{1442\pi}{4}} = e^{i(360\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\left(\frac{z_C - z_B}{2\sqrt{5}}\right)^{2021} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2021} = e^{i\frac{2021\pi}{2}} = e^{i(1010\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\left(\frac{z_A + z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1442} - \left(\frac{z_C - z_B}{2\sqrt{5}}\right)^{2021} = 0$$

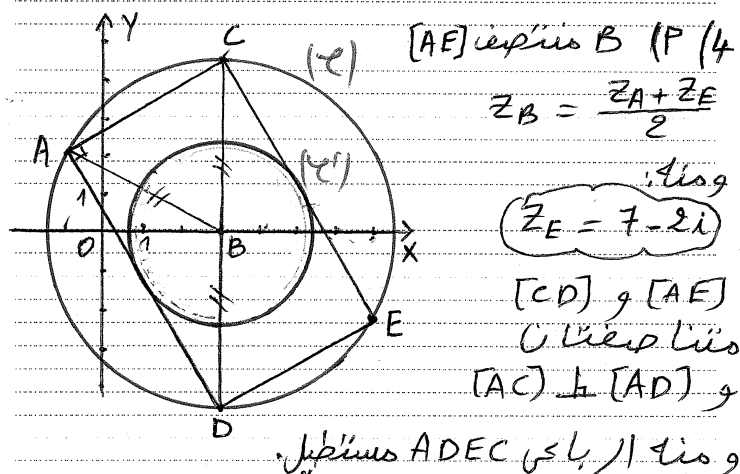
$$\operatorname{Re}(z_D) = 3 \text{ و } \operatorname{Re}(z_C) = \operatorname{Re}(z_B) = 3 \quad (3)$$

$$BD = |z_D - z_B| = |\alpha i| = \sqrt{\alpha^2} \text{ و } AB = \sqrt{20}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{20} \text{ أي } \alpha^2 = 20 \text{ يعني } AB^2 = BD^2$$

$$z_D = 3-2\sqrt{5}i \text{ ومنه } z_D \neq z_C \text{ لأن } \alpha \neq 2\sqrt{5}$$

(ب) المتوسط المتعلق بالوتر [CD] طوله نصف CD أي: $AB = BC = BD$ ومنه ACD قائم في A. الدائرة (ع) مركزها B ونصف قطرها $AB = 2\sqrt{5}$



$$\| \vec{MA} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} \| = \| \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{MB} + \vec{BE} \|$$

$$= \| 4\vec{MB} + \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD} + \vec{BE} \| = 4\vec{MB}$$

تصحيح الفرض للفصل الثاني 2021

تمرين 1: حسب المطلوب

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84} \quad (1)$$

$$P(B) = 1 - \frac{C_5^3}{C_9^3} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(3 \text{ حراء}) \quad P(A \cap B) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84} \quad \left(\frac{P(A)}{P(A \cap B)} \right)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{84} + \frac{10}{84} - \frac{1}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

$$X = \{-3; 1; x\} \quad (2)$$

$$P(X = -3) = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_2^2 \times C_1^1}{C_3^3} = \frac{49}{84} = \frac{7}{12}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^2 + C_2^3}{C_9^3} = \frac{19}{84}$$

$$P(X = x) = \frac{C_4^3 + C_4^4 \times C_3^3}{C_9^3} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$$

x_i	-3	1	x
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{4}{21}$

$$E(X) = -3 \times \frac{7}{12} + \frac{19}{84} + \frac{4x}{21} \quad (ب)$$

مربعة يعني $E(X) > 0$ $E(X) = 4x - 32$
 $x > 8$ ومنه $x = 9$

$$-1x - 2x^2 \text{ أو } 1x^2 \times 2 \quad (3)$$

$$3(A_1^1 \times A_2^2) + 6(A_1^1 \times A_1^1 \times A_2^2) = 36$$

تمرين 2:

$$I \text{ لنحل المعادلة: } z^2 = 3-4i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3-4i \text{ أي } (x+iy)^2 = 3-4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \text{ أو } x = 2 & (2) + (1) \\ y = -1, x = 2 \text{ و } y = 1, x = -2 & (3) \end{cases}$$

$$R'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+2}{x^2} > 0 \quad (P \ 3)$$

وحيث R متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$
 ب) R مستمرة ومتزايدة تماماً على $]4/3, 4/4[$
 $R(4/3) \approx -0,0065 < 0$ و $R(4/4) \approx 0,027 > 0$
 حسب مبرهنه القيم المتوسطة فإن اعداد
 $R(x) = 0$ تقبل حل واحد α حيث $4/3 < \alpha < 4/4$

$$\frac{-g(x_0)}{(x_0+2)^2} = -1 \quad \text{أي} \quad f'(x_0) = -1$$

$$3(-1 - \frac{2}{x_0} + \ln x_0) = 0 \quad \text{أي} \quad -3 - \frac{6}{x_0} + 3 \ln x_0 = 0$$

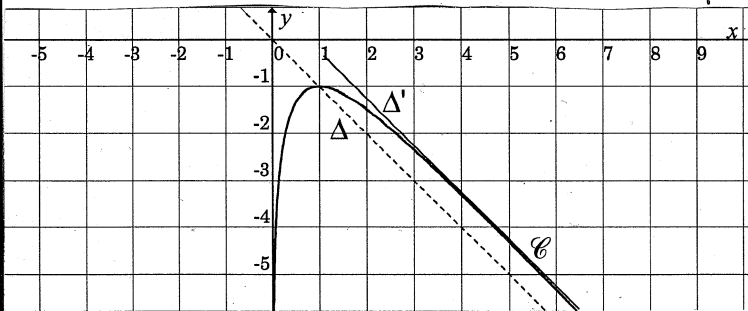
$$3R(x_0) = 0 \quad \text{وحيث} \quad x_0 = \alpha$$

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = -1(x - \alpha) - \alpha + \frac{3 \ln \alpha}{\alpha + 2}$$

$$\ln \alpha = \frac{\alpha + 2}{\alpha} : \ln \alpha = 1 + \frac{2}{\alpha} \quad \text{وحيث} \quad R(\alpha) = 0$$

$$y = -x + \alpha - \alpha + 3 \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha(\alpha + 2)} \right) = -x + \frac{3}{\alpha}$$

14



$$3m - x = \frac{3 \ln x}{x+2} - x \quad \text{وحيث} \quad m = \frac{\ln x}{x+2} \quad (5)$$

$$y = -x + 3m : \text{تقاطع (5) مع المستقيمات}$$

$$0 < 3m < \frac{3}{\alpha}$$

$$\text{وحيث} \quad 0 < m < \frac{1}{\alpha}$$

$$(P \ 6) : n=0 : -4 \leq M_0 < -1 \quad \text{مستقيمة}$$

$$\text{نرضى أن } -4 \leq M_n < -1 \quad \text{ونبرهن } -4 \leq M_{n+1} < -1$$

$$f(x) \leq f(-U_n) < f(1) \quad \text{وحيث} \quad 1 < -M_n \leq 4$$

$$\text{أو أن } f \text{ متناقصة تماماً على }]1, 4[$$

$$\text{وحيث} \quad -4 \leq -4 + \ln 2 \leq M_{n+1} < -1$$

$$\text{وحيث} \quad -4 \leq M_n < -1 \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$M_{n+1} - M_n = f(-U_n) - U_n = \frac{3 \ln(-U_n)}{-U_n + 2} \quad (ب)$$

$$0 < \ln(-U_n) \leq \ln 4 \quad \text{وحيث} \quad 1 < -U_n \leq 4$$

$$\text{و كذا} \quad 3 < -U_n + 2 \leq 6$$

$$\text{وحيث} \quad M_{n+1} - M_n > 0 \quad \text{كأن } (M_n) \text{ متزايدة تماماً}$$

$$(\Rightarrow) (M_n) \text{ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l \quad \text{أي} \quad f(l) = l \quad \text{وحيث} \quad 3 \ln(-l) = 0$$

$$\text{في الة خبر: } (l = -1) \quad \text{عبد المطلب}$$

$$\| \vec{MA} - \vec{MC} + \vec{MD} - \vec{ME} \| = \| \vec{CM} + \vec{MA} + \vec{EM} + \vec{MD} \|$$

$$= \| \vec{CA} + \vec{ED} \| = \| 2\vec{CA} \|$$

لدينا: $4MB = 2AC$ أي $MB = \frac{AC}{2}$
 وحيث (C') هي الدائرة التي مركزها B وقطرها AC

ب) ليكن γ الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
 صورة G بواسطة هذا الدوران:

$$(Z_G - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{2}} (Z_F - Z_A) \quad \text{بمعنى:}$$

$$Z_F + 2 - Z_A = i(Z_F - Z_A)$$

$$Z_F = \frac{Z_A - iZ_A - 2}{1 - i} = \frac{-2 + i}{1 - i} \quad \text{وحيث}$$

تمرين 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 1 - \frac{6}{x} + 3 \ln x) = +\infty \quad (1 - I)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 1 - \frac{6}{x} + 3 \ln x) = -\infty$$

$$x > 0 \quad g'(x) = (2x + 4 + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x}) > 0 \quad (2)$$

وحيث g متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$

$$g(1) = 0 \quad \text{وحيث} \quad g(x) \text{ إشارة } \frac{1}{x} \rightarrow + \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad (P \ 1 - II)$$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادله $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{3 \ln x}{x(1 + \frac{2}{x})} \right) = -\infty$$

$$\text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{x(1 + \frac{2}{x})} = 0 \quad (ب)$$

وحيث (C) يقبل مستقيماً مقارباً معادله $y = -x$

(ج) إشارة $(f(x) + x)$ من إشارة $\ln x$ وحيث

$x > 1$: (C) يقع أعلى (D)

$0 < x < 1$: (C) يقع أسفل (D)

(C) يقطع (D) عند $A(1, -1)$

$$f'(x) = -1 + 3 \left[\frac{\frac{x+2}{x} - \ln x}{(x+2)^2} \right] = -1 + \frac{3 + \frac{6}{x} - 3 \ln x}{(x+2)^2} \quad (P \ 2)$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 1 + \frac{6}{x} - 3 \ln x}{(x+2)^2} = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$$

ب) $x > 1$: f متناقصة تماماً، $0 < x < 1$: f متزايدة تماماً

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$

جدول
تغييرات
الالة f