

تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدريب

نص التمرين :

- (1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
 ب) إستنتج باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 .
- (2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$.
- (3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .
- (4) فيما يلي نفرض : $n=9$.
 نعتبر x و y عددين صحيحين و لتكن المعادلة (E) حيث : $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$.
 أ) عين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y) .
 ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E) .
- (5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ماهي القيم الممكنة لـ d ؟ ، حيث : $d = PGCD(x, y)$.
 ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكون العددين x و y أوليان فيما بينهما .

حل مقترح للتمرين :

- (1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد : $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$ و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة العدد 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

- ب) نعلم أن : $1440 \equiv 5[7]$ أي أن : $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$.

(*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6 : $2019 \equiv 3[6]$ أي : $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$ لكن نعلم أنه من أجل كل

عدد طبيعي n يكون : $3^n \equiv 3[6]$ و منه : $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي : $2019^{2020} = 6k + 3$.

إذن : $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي : $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6 .

- (2) لدينا : $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن : $(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1)$ هو مجموع حدود لمتتالية هندسية

أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه : $4 \left(1 \times \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} \right) \equiv 3[7]$ أي : $5^{n-1} - 1 \equiv 3[7]$ أي : $5^{n-1} \equiv 4[7]$

و منه يكون : $n-1=6k+2$ إذن : $n=6k+3$ مع $(k \in \mathbb{N})$.

(3 أ) لنبين أن : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

(*) لنحسب $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$:

$$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2 \times \frac{(n+1)!}{(n+1-2)! \times 2!} + \frac{(n+3)!}{(n+3-2)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = (n+1)n + (n+3)(n+2) = n^2 + n + n^2 + 2n + 3n + 6$$

و منه : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$ إذن : هو المطلوب .

(ب) لنعين قيم n بحيث يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 \equiv 0[7]$.

لدينا : $2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$ أي : $2(n^2 + 3n + 3) \equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون : $n^2 + 3n + 3 \equiv 0[7]$

أي : $n^2 + 3n \equiv -3[7]$ و منه : $n^2 + 3n \equiv 4[7]$.

يمكن الإستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7) :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n \equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^2 + 3n \equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

و بالتالي يكون : $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$ أي : $n=7k+1$ أو $n=7k+3$ مع $(k \in \mathbb{N})$.

(4) لدينا : $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$.

(أ) لنعين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \times 2!} = 45 \text{ و } A_{12}^2 = \frac{12!}{10!} = 132$$

نعلم أن : $45x - 132y = 15$ (E) تصبح : $15x - 44y = 5$ ، إذن المعادلة (E) تصبح : $45x - 132y = 15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن : $PGCD(45, 132) = 3$ و 3 يقسم 15 .

(ب) لدينا : $45x - 132y = 15$ أي تصبح : $15x - 44y = 5$ أي : $44y = 15x - 5$ أي : $44y = 5(3x - 1)$

لدينا : 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غوص فإن : 5 يقسم y

و بالتالي يكون : $y = 5k$ أي : $y \equiv 0[5]$ هو المطلوب .

(*) لنحل المعادلة (E) :

نبحث أولا عن الحل الخاص أي : $y = 5$ و منه : $44 \times 5 = 5(3x - 1)$ أي : $44 = 3x - 1$ إذن : $x = 15$.

و منه : $(x_0, y_0) = (15, 5)$.

لدينا : $\begin{cases} 15x - 44y = 5 \\ 15(15) - 44(5) = 5 \end{cases}$ بالطرح نجد : $15(x - 15) = 44(y - 5)$ بما أن 15 أولي مع 44 و حسب مبرهنة

غوص نستنتج أن : $\begin{cases} x - 15 = 44k \\ y - 5 = 15k \end{cases}$ إذن : $x = 44k + 15$ و $y = 15k + 5$.

و منه : $(x, y) = (44k + 15, 15k + 5)$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.