



أسئلة
الدوال الأصلية
و الحساب التكاملي
في البكالوريا
مع حلولها
لشعبة : علوم تجريبية
من 2008 إلى 2019

أسئلة الروال الأصلية والكاميرات

التمرين [1] [إباك 2008] [1م]

- g الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.
- H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان .
- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

التمرين [2] [إباك 2008] [2م]

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$.
- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .
- عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق $F(1) = 2$.

التمرين [3] [إباك 2009] [1م]

- k الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$ ، (C_k) تمثيلها البياني .
- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$.

التمرين [4] [إباك 2009] [2م]

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .
- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

التمرين [5] [إباك 2011] [1م]

- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
- α عدد حقيقي . بين أن الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.
- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ، ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

التمرين [6] [إباك 2011] [2م]

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = e^x - ex - 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني .
- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ ، $x = 0$. $\alpha \in]1,75; 1,76[$ و يحقق $f(\alpha) = 0$.
- أثبت أن : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين [7] [إباك 2012] [1م]

- f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي : $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .
- لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
- بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

التمرين [8] [باك 2012] [2م]

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

• h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.
ب- إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين [9] [باك 2015] [1م]

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

• F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

(1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

(2) بين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين [10] [باك 2015] [2م]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

• تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

• إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين [11] [باك 2016] [الدورة الأولى] [1م]

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

• أ- جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$).

ج- عين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $I_n > 2$.

التمرين [12] [باك 2016] [الدورة الأولى] [2م]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

• h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً وفسر النتيجة هندسياً.

ب- أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

التمرين [13] [باك 2016] [الدورة الثانية] [1م]

f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

• بين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

• أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين [14] [باك 2017] [الدورة العادية] [2م]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

⊙ F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين [15] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [2م]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

(γ) المنحنى الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$.

⊙ ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$.

التمرين [16] [باك 2018] [1م]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

⊙ باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $xe^{-x} \mapsto x$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

⊙ أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتهما: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

التمرين [17] [باك 2018] [2م]

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

⊙ n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .

التمرين [18] [باك 2019] [1م]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$. (C_f) تمثيلها البياني .

⊙ H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ: $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب- أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين: $x = 3$ و $x = 4$.

حلول مقترمة

حل مقترح للتمرين [1]

- g الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.
- الدالة H العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان .
- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$.
- الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$ ،
- H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$ معناه : $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ ومنه نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.
- لدينا : $g(x) = g(x) + 1 - 1 = H'(x) + 1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = H(x) + x + c$.
- الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي : $G(x) = (x + 2)e^{-x} + x + 2$.

حل مقترح للتمرين [2]

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x + 1)^2}$.
- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + a + \frac{b}{(x - 1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .
- $$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^3 + 1}{(x + 1)^2} = x + 1 + \frac{1}{(x + 1)^2}$$
- تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق $F(1) = 2$.
- الدالة f مستمرة على $]-1; +\infty[$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1) = 2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ :
- $$F(x) = \int_1^x \left(t + 1 + \frac{1}{(t + 1)^2} \right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{t + 1} \right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x + 1} + 1$$
- ومنه : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

حل مقترح للتمرين [3]

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$.
- $$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(-x + \frac{4}{x + 1} \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{4}{x + 1} \right) dx$$
- $$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x + 1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x + 1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4 \ln 3$$

حل مقترح للتمرين [4]

- f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .
- حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.
- $$S = \int_0^1 [(x - 1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x + 1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين [5]

الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
 • تبين أن الدالة h بحيث $h(x) = (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x - \alpha)$ على المجال $[\alpha; +\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $[\alpha; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $[\alpha; +\infty[$:

$$h'(x) = 1 \times \ln(x - \alpha) + \frac{1}{x - \alpha} \times (x - \alpha) - 1 = \ln(x - \alpha)$$

• التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ ،
 تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$ ،
 وبالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ من الشكل :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x] = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$

حل مقترح للتمرين [6]

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$. (C_f) تمثيلها البياني .

• حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين
 معادلتيهما : $x = \alpha$ ، $x = 0$.

$$A(\alpha) = -\int_0^\alpha f(x) dx = -\int_0^\alpha (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x\right]_0^\alpha = 1 - \left(e^\alpha - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha\right)$$

• إثبات أن : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$ (ua هي وحدة المساحات)

لدينا : $f(\alpha) = 0$ و منه $e^\alpha - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^\alpha = e\alpha + 1$ وبالتالي :

$$A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$$

حل مقترح للتمرين [7]

الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

• لتكن g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

تبين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

ومنه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

حل مقترح للتمرين [8]

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

• h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني: $h'(x) = xe^x$ ، ومنه بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $b = -1$. أي $h(x) = (x - 1)e^x$.

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(x) = 1 - xe^x$ ومنه دالة أصلية للدالة g من الشكل: $G(x) = x - (x - 1)e^x$.

حل مقترح للتمرين [9]

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

• تبين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ يعني: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ تكافئ: $x = 1$ أو $x = e^2$ ، ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

• تبين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$:

نضع: $u(x) = x \ln x - x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $u'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$.

ومنه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left(\ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t} \right) dt = \left[t \ln t - t - 2t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 - 2 \ln t \right]_1^x = (2 + x) \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 3x$$

حل مقترح للتمرين [10]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

• التحقق: من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

• إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

ومنه $f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2}$.

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل: $F(x) = \frac{1}{2} \left[-f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c$.

أي: $F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c$.

حل مقترح للتمرين [11]

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0; +\infty[$ من الشكل: $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

ب- حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$) .

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x - 1)] dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) ومنه $n > e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

حل مقترح للتمرين [12]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

أ- h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني: من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x) = h(x)$.

الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد: $a = -1$ ، $b = -5$ و $c = -7$ أي $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$.

(2) أ- حساب التكامل: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

ب- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$.

حل مقترح للتمرين [13]

f الدالة المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

أ- تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $] -1; +\infty[$.

نضع: $h(x) = \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ ، الدالة h قابلة للاشتقاق على $] -1; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in] -1; +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \left(\frac{1}{x+1} \right) \times \left(\frac{-1}{x+1} \right) = \frac{1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right]_0^1 = \frac{1 + (2e - 1) \ln 2}{2}$$

حل مقترح للتمرين [14]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

• F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2 e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) \text{ u.a.}$$

حل مقترح للتمرين [15]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني . (γ) المنحنى الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$.

• n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n .$$

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(-\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(\frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي $l : l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$.

حل مقترح للتمرين [16]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

• تعيين دالة أصلية للدالة $xe^{-x} \mapsto x$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

الدالة $xe^{-x} \mapsto x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$.

$$\text{نضع } u(t) = t \text{ ، } v'(t) = e^{-t} \text{ ومنه } u'(t) = 1 \text{ ، } v(t) = -e^{-t}$$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = [-te^{-t}]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومن الدالة الأصلية للدالة $xe^{-x} \mapsto x$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي: $F(x) = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$.

• حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

$$A = \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} \text{ (u.a.)}$$

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

• n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = n$ و $x = 1$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

لدينا : $I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) dx = \left[\ln(1 + x \ln x) \right]_1^n = \ln(1 + n \ln n)$ (لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1} - I_n$

لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$

ومن أجل $n > 1$: $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$ وبالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]2; +\infty[\cup]2; 3]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$. (C_f) تمثيلها البياني .

(1) H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t) = \ln(t)$ ، $v'(t) = 1$ و منه $u'(t) = \frac{1}{t}$ ، $v(t) = t$ ،

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x) = [t \ln t]_3^x - \int_3^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 3 \ln 3 - \int_3^x dt = x \ln x - 3 \ln 3 - [t]_3^x$$

ومنه $H(x) = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$ أي $H(x) = x \ln x - 3 \ln 3 - (x - 3)$

ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين : $x = 3$ و $x = 4$.

$$A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} + \ln x \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + \int_3^4 \ln x dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + H(4) = [\ln|x-2|]_3^4 + H(4)$$

ومنه $A = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)(u.a)$ أي $A = \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3$

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020