

لإثبات أن $\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) نتبع إحدى الطُرق التالية :



❖ نضع : $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ عبارة **تغيير المعلم**

❖ نعوض في $y = f(x)$

❖ نجد Y بدلالة X أي $Y = g(X)$ و هي معادلة في المعلم $(\omega, \vec{l}, \vec{j})$

❖ نثبت أن الدالة g فردية.

الطريقة 1:

الطريقة 2 : من أجل $x \in D_f : 2\alpha - x \in D_f$ و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

الطريقة 3 : من أجل $x \in D_f : \alpha - x \in D_f$ و $\alpha + x \in D_f$ و $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

مركز تناظر

$\omega(2; 3)$

$f(x) = \frac{3x}{x-2}$

(1)

الطريقة 1 : نضع :

$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$ لدينا :

$Y + 3 = \frac{3(X+2)}{(X+2)-2}$ منه :

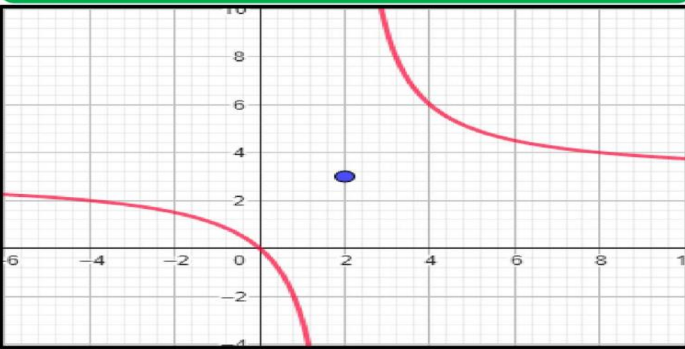
$Y + 3 = \frac{3X+6}{X}$ منه :

$Y + 3 = 3 + \frac{6}{X}$ منه :

$Y = \frac{6}{X}$ منه :

معادلة (C_f) في المعلم $(\omega, \vec{l}, \vec{j})$

منه النقطة $\omega(2; 3)$ مركز تناظر لـ (C_f)



2AS

$\omega(2; 3)$

$f(x) = \frac{3x}{x-2}$

(1)

مركز تناظر

$$f(4-x) = \frac{3(4-x)}{(4-x)-2} = \frac{12-3x}{-x+2} = \frac{3x-12}{x-2}$$

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

$$f(4-x) + f(x) = 6$$

$$f(4-x) + f(x) = \frac{3x-12}{x-2} + \frac{3x}{x-2} = \frac{6x-12}{x-2} = \frac{6(x-2)}{(x-2)} = 6$$

$f(4-x) + f(x) = 6$ منه $\omega(2; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$$f(2-x) = \frac{3(2-x)}{(2-x)-2} = \frac{6-3x}{-x} = \frac{-6+3x}{x}$$

$$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$$

$$f(2-x) + f(2+x) = 6$$

$$f(2+x) = \frac{3(2+x)}{(2+x)-2} = \frac{6+3x}{x}$$

$$f(2-x) + f(2+x) = \frac{-6+3x}{x} + \frac{6+3x}{x} = \frac{6x}{x} = 6$$



$f(2-x) + f(2+x) = 6$ منه $\omega(2; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

مركز تناظر

$$\omega(-1; 1) \quad f(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad (2)$$

الطريقة 1 :

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1 \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$y = \frac{x+2}{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$Y + 1 = \frac{X - 1 + 2}{X - 1 + 1} \quad \text{منه :}$$

$$Y + 1 = \frac{X + 1}{X} \quad \text{منه :}$$

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X} \quad \text{منه :}$$

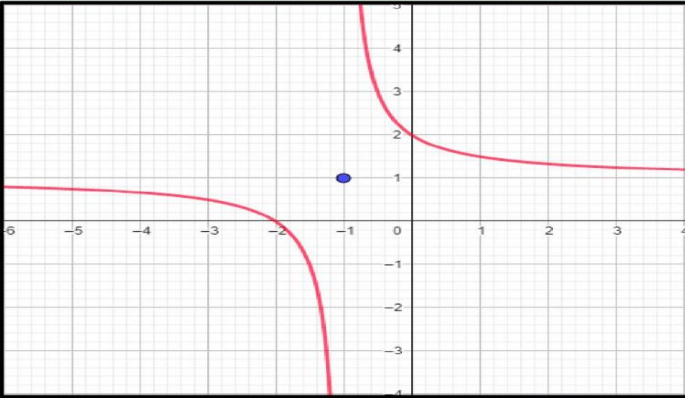
$$Y = \frac{1}{X} \quad \text{منه :}$$

معادلة (C_f) في المعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{نضع : } g(X) = \frac{1}{X} \\ g(-X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -g(X)$$

الدالة g فردية

منه النقطة $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)



2AS

$\omega(-1; 1)$

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

(2)

مركز تناظر

$$f(-2-x) = \frac{-2-x+2}{-2-x+1} = \frac{-x}{-1-x} = \frac{x}{1+x}$$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)} = 2$$

$f(-2-x) + f(x) = 2$ منه $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$$f(-1-x) = \frac{-1-x+2}{-1-x+1} = \frac{-x+1}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f(-1+x) = \frac{-1+x+2}{-1+x+1} = \frac{x+1}{x}$$

$$f(-1-x) + f(-1+x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

$f(-2-x) + f(x) = 2$ منه $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$$f(\alpha-x) + f(\alpha+x) = 2\beta$$

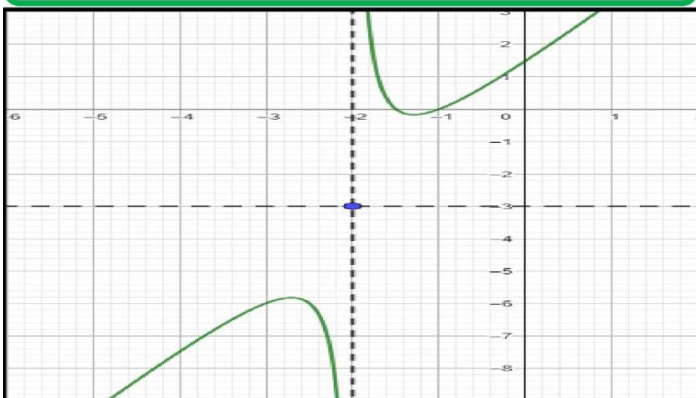
$$f(-1-x) + f(-1+x) = 2$$



$$\text{نضع : } g(X) = 2X + \frac{1}{X} \\ g(-X) = -2X + \frac{1}{-X} = -\left(2X + \frac{1}{X}\right) = -g(X)$$

الدالة g فردية

منه النقطة $\omega(-2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f)



مركز تناظر

$$\omega(-2; -3) \quad f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2} \quad (3)$$

الطريقة 1 :

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y - 3 \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2} \quad \text{لدينا :}$$

$$Y - 3 = \frac{2(X - 2)^2 + 5(X - 2) + 3}{(X - 2) + 2} \quad \text{منه :}$$

$$Y - 3 = \frac{2X^2 - 8X + 8 + 5X - 10 + 3}{X} \quad \text{منه :}$$

$$Y - 3 = \frac{2X^2 - 3X + 1}{X} \quad \text{منه :}$$

$$Y - 3 = 2X - 3 + \frac{1}{X} \quad \text{منه :}$$

معادلة (C_f) في المعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ منه $Y = 2X + \frac{1}{X}$

$\omega(-2; -3)$

$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2} \quad (3)$

مركز تناظر

$f(-4 - x) + f(x) = 6$

$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

الطريقة 2 :

ش 1 : من أجل $x \in D_f$ أي $x \neq -2$ فإن $-x \neq 2$ منه : $-4 - x \neq -2$ إذن $2\alpha - x \in D_f$

$$f(-4-x) = \frac{2(-4-x)^2 + 5(-4-x) + 3}{(-4-x) + 2} = \frac{2(16 + x^2 + 8x) - 20 - 5x + 3}{-x - 2} = \frac{2x^2 + 11x + 15}{-x - 2} = \frac{-2x^2 - 11x - 15}{x + 2}$$

$$f(-4-x) + f(x) = \frac{-2x^2 - 11x - 15}{x + 2} + \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2} = \frac{-6x - 12}{x + 2} = \frac{-6(x + 2)}{x + 2} = -6$$



$f(-4 - x) + f(x) = -6$ منه $\omega(-2; -3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$\omega(-2; -3)$

$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2} \quad (3)$

مركز تناظر

$f(-2 - x) + f(-2 + x) = -6$

$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

الطريقة 3 :

$$f(-2-x) = \frac{2(-2-x)^2 + 5(-2-x) + 3}{(-2-x) + 2} = \frac{2(4 + x^2 + 4x) - 10 - 5x + 3}{-x} = \frac{8 + 2x^2 + 8x - 7 - 5x}{-x} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{-x} = \frac{-2x^2 - 3x - 1}{x}$$

$$f(-2+x) = \frac{2(-2+x)^2 + 5(-2+x) + 3}{(-2+x) + 2} = \frac{2(4 + x^2 - 4x) - 10 + 5x + 3}{x} = \frac{8 + 2x^2 - 8x - 7 + 5x}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$$

$$f(-2-x) + f(-2+x) = \frac{-2x^2 - 3x - 1}{x} + \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{-6x}{x} = -6$$



$f(-2 - x) + f(-2 + x) = -6$ منه $\omega(-2; -3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

لإثبات أن $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) نتبع إحدى الطرق التالية:



❖ نضع : $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y \end{cases}$ **عبارة تغيير المعلم**
❖ نعوض في $y = f(x)$
❖ نجد Y بدلالة X أي $Y = g(X)$ و هي معادلة في المعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$
❖ نثبت أن الدالة g زوجية.

الطريقة 2 : من أجل $x \in D_f : 2\alpha - x \in D_f$ و $f(2\alpha - x) = f(x)$

الطريقة 3 : من أجل $x \in D_f : \alpha - x \in D_f$ و $\alpha + x \in D_f$ و $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

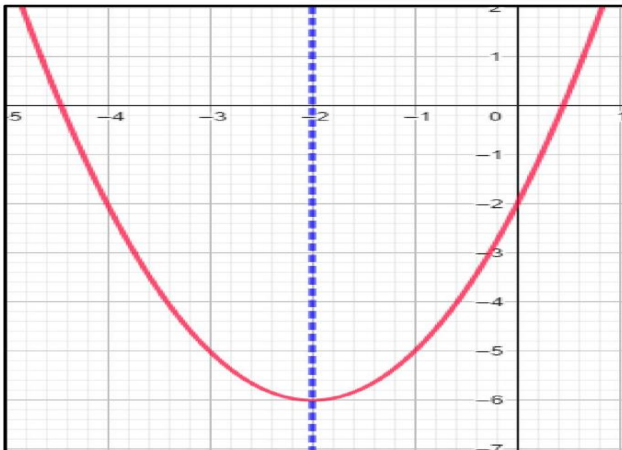
$$x = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

(1)

محور تناظر

الطريقة 1 :



نضع : $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$

لدينا : $y = x^2 + 4x + 3$

$$Y = (X - 2)^2 + 4(X - 2) + 3$$

$$Y = X^2 - 4X + 4 + 4X - 8 + 3$$

$$Y = X^2 - 1 \quad (\omega, \vec{i}, \vec{j}) \text{ في المعلم } (C_f)$$

نضع : $g(X) = X^2 - 1$

$$g(-X) = (-X)^2 - 1$$

$$g(-X) = X^2 - 1$$

$$g(-X) = g(X) \quad \text{الدالة } g \text{ زوجية}$$

منه المستقيم $x = -2$ محور تناظر لـ (C_f)



2AS

$$x = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

(1)

محور تناظر

من أجل $x \in \mathbb{R} : -4 - x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-4 - x) &= (-4 - x)^2 + 4(-4 - x) + 3 \\ &= 16 + 8x + x^2 - 16 - 4x + 3 \\ &= x^2 + 4x + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ط 2 : $f(2\alpha - x) = f(x)$

$f(-4 - x) = f(x)$

$f(-4 - x) = f(x)$ منه $x = -2$ محور تناظر للمنحنى (C_f)



$$\begin{aligned} f(-2 - x) &= (-2 - x)^2 + 4(-2 - x) + 3 \\ &= 4 + 4x + x^2 - 8 - 4x + 3 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

ط 3 : $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

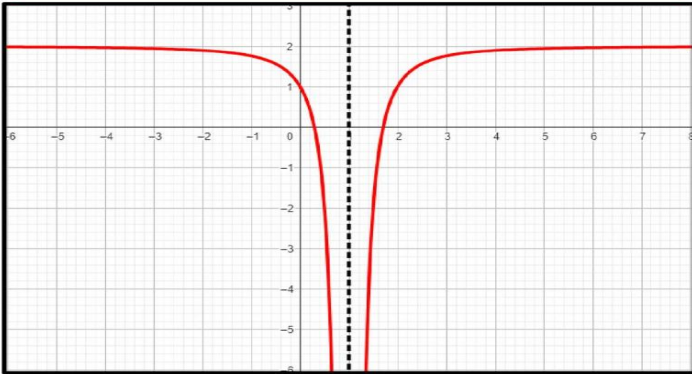
$f(-2 - x) = f(-2 + x)$

$$\begin{aligned} f(-2 + x) &= (-2 + x)^2 + 4(-2 + x) + 3 \\ &= 4 - 4x + x^2 - 8 + 4x + 3 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$f(-2 - x) = f(-2 + x)$ منه $x = -2$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

ندفع : $g(X) = \frac{2X^2 + 7}{x^2}$
 $g(-X) = \frac{2(-X)^2 + 7}{(-X)^2} = \frac{2X^2 + 7}{X^2} = g(X)$
 الدالة g زوجية

منه المستقيم $x = 1$ محور تناظر لـ (C_f)



محور تناظر

$x = 1$ $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$ (2)

الطريقة 1 : نضع : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

لدينا : $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$

منه : $Y = \frac{2(X+1)^2 - 4(X+1) + 1}{X^2}$

منه : $Y = \frac{2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4 + 1}{X^2}$

منه : $Y = \frac{2X^2 + 7}{X^2}$

معادلة (C_f) في المعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$



$x = 1$

$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$ (2)

محور تناظر

$f(2-x) = f(x)$

$f(2\alpha - x) = f(x)$

الطريقة 2 :

ش 1 : من أجل $x \in D_f$ أي $x \neq 1$ فإن $-x \neq -1$: منه $2-x \neq 1$ إذن $2-x \in D_f$

ش 2 : $f(2-x) = \frac{2(2-x)^2 - 4(2-x) + 1}{(2-x-1)^2} = \frac{2(4+x^2-4x) - 8+4x+1}{(1-x)^2}$

$= \frac{8+2x^2-8x-7+4x}{(x-1)^2}$
 $= \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$
 $= f(x)$



$f(2-x) = f(x)$ منه $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

$x = 1$

$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}$ (2)

محور تناظر

$f(1-x) = f(1+x)$

$f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

الطريقة 3 :

$f(1-x) = \frac{2(1-x)^2 - 4(1-x) + 1}{(1-x-1)^2} = \frac{2(1+x^2-2x) - 4+4x+1}{(-x)^2}$

$= \frac{2+2x^2-4x-3+4x}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$

$f(1+x) = \frac{2(1+x)^2 - 4(1+x) + 1}{(1+x-1)^2} = \frac{2(1+x^2+2x) - 4-4x+1}{(x)^2}$

$= \frac{2+2x^2+4x-3-4x}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$



$f(1-x) = f(1+x)$ منه $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f)



$$x = -3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

(3)

محور تناظر

الطريقة 1 :

$$\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y \end{cases} \text{ نضع :}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 10} \text{ لدينا}$$

$$Y = \sqrt{(X - 3)^2 + 6(X - 3) + 10}$$

$$Y = \sqrt{X^2 - 6X + 9 + 6X - 18 + 10}$$

$$Y = \sqrt{X^2 - 1} \text{ معادلة } (C_f) \text{ في المعلم } (\omega, \vec{i}, \vec{j})$$

$$g(X) = \sqrt{X^2 + 1} \text{ نضع :}$$

$$g(-X) = \sqrt{(-X)^2 + 1}$$

$$g(-X) = \sqrt{X^2 + 1}$$

$$g(-X) = g(X) \text{ الدالة } g \text{ زوجية}$$

منه المستقيم $x = -3$ محور تناظر لـ (C_f)

2AS

$$x = -3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

(1)

محور تناظر

من أجل $x \in \mathbb{R} ; -6 - x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-6 - x) &= \sqrt{(-6 - x)^2 + 6(-6 - x) + 10} \\ &= \sqrt{36 + 12x + x^2 - 36 - 6x + 10} \\ &= \sqrt{x^2 + 6x + 10} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$f(2\alpha - x) = f(x) \text{ ط 2 :}$$

$$f(-6 - x) = f(x)$$

$f(-6 - x) = f(x)$ منه $x = -3$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

$$\begin{aligned} f(-3 - x) &= \sqrt{(-3 - x)^2 + 6(-3 - x) + 10} \\ &= \sqrt{9 - 6x + x^2 - 18 + 6x + 10} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$f(\alpha - x) = f(\alpha + x) \text{ ط 3 :}$$

$$f(-3 - x) = f(-3 + x)$$

$$\begin{aligned} f(-3 + x) &= \sqrt{(-3 + x)^2 + 6(-3 + x) + 10} \\ &= \sqrt{9 - 6x + x^2 - 18 + 6x + 10} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$f(-3 - x) = f(-3 + x)$ منه $x = -3$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

يُبين بثلاث طرق مختلفة أن $\Omega(a; b)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) في كل حالة من الحالات التالية :

$$\Omega(2; 3)$$

$$f(x) = \frac{3x}{x - 2}$$

$$\Omega(-1; 1)$$

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$$

$$\Omega(-2 - 3)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2}$$

التمرين 09 :

يُبين بثلاث طرق مختلفة أن $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C_f) في كل حالة من الحالات التالية :

$$x = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$x = 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$x = -3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

التمرين 10 :