

الواجب المنزلي رقم ②

التمرين 01:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 2x$ ، و (C_f) منحناها البياني في مستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[1; +\infty[$ و $]-\infty; 1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع، ارسم (C_f) .

③ أنشئ في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g حيث:

$$g(x) = |f(x)|$$

④ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي حلول المعادلتين (E) و (F) حيث:

$$g(x) = m \dots (F) \quad \text{و} \quad f(x) = m \dots (E)$$

التمرين 02:

ليكن P كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$

① بيّن أن $\frac{3}{2}$ جذر P

② أوجد الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (2x - 3)(ax^2 + bx + c)$$

③ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

④ ادرس إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج إشارة: $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$

⑤ عيّن حلول المتراجحة:

$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$$

التمرين 03:

نعتبر كثير الحدود P_m حيث:

$$f_m(x) = (2m - 1)x^3 + (5m - 5)x^2 + (4m - 8)x + m - 4$$

① بيّن أن P_m يقبل القسمة على $x + 1$ مهما كانت قيمة m .

② أوجد كثير الحدود Q_m الذي يحقق: $P_m(x) = (x + 1)Q_m$

③ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$

④ عين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متمايضة.

ب/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

ج/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة.

◆ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (E):

- لما $m < -1$ المعادلة لا تقبل حلول
- لما $m = -1$ المعادلة تقبل حل مضاعف
- لما $m > -1$ المعادلة تقبل حلين
- ◆ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (F):
- لما $m < 0$ المعادلة لا تقبل حلول
- لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلين
- لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل أربع حلول
- لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلين وحل مضاعف
- لما $m > 1$ المعادلة تقبل حلين

◀ حل التمرين 02: [6.5 نقطة]

① تبين أن $\frac{3}{2}$ جذر لـ P :

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 13\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27\left(\frac{3}{2}\right) - 18 = 0$$

② ايجاد الأعداد الحقيقية a, b و c :

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x - 3)(ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow P(x) &= 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ \Rightarrow P(x) &= 2ax^3 + (2b - 3a)x^2 + (2c - 3b)x - 3c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = -13 \\ 2c - 3b = 27 \\ -3c = -18 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

③ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$$P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

• لدينا: $2x - 3 = 0$ معناه $x = \frac{3}{2}$

• نحل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$

لدينا: $\Delta = 1$ ومنه: $x = 2$ أو $x = 3$ إذن: $s = \left\{\frac{3}{2}; 2; 3\right\}$

④ دراسة إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$		
$2x - 3$	-	0	+	+	+		
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

- استنتاج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$:

لدينا: $2 < \frac{2022}{2021} < \frac{3}{2}$ إذن $P\left(\frac{2022}{2021}\right) < 0$

⑤ تعيين حلول المتراجحة: $2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$:

$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 13x^2 < -27x + 18 \Rightarrow P(x) < 0$$

إذن: $s =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]2; 3[$

◀ حل التمرين 01: [7 نقطة]

① دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f(x) = x^2 - 2x = \left(x + \frac{-2}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{4(1)} = (x - 1)^2 - 1$$

• لما $x \in [1; +\infty[$ نفرض أن $x_1 > x_2$

ومنه: $x_1 - 1 < x_2 - 1$

ومنه: $(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$

ومنه: $(x_1 - 1)^2 - 1 < (x_2 - 1)^2 - 1$

ومنه: $f(x_1) < f(x_2)$

إذن الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$

• لما $x \in]-\infty; 1]$ نفرض أن $x_1 > x_2$

ومنه: $x_1 - 1 < x_2 - 1$

ومنه: $(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$

ومنه: $(x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1$

ومنه: $f(x_1) > f(x_2)$

إذن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$

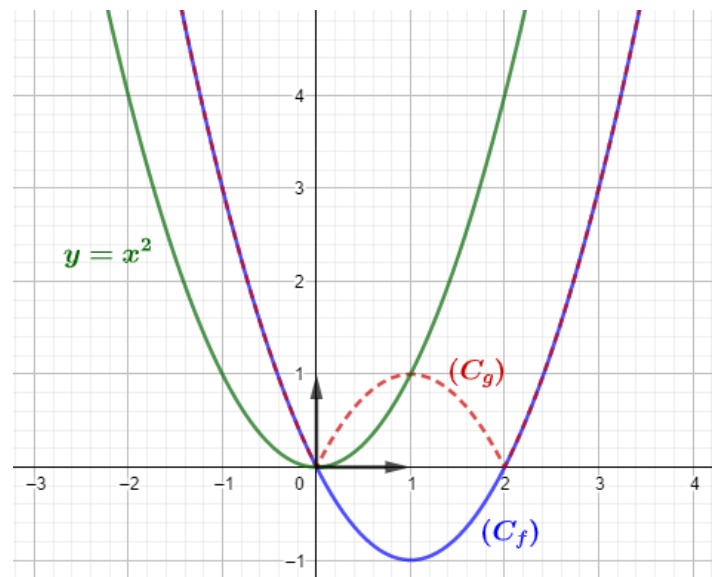
وعليه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		-1	

② رسم (C_f) ، بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع:

لدينا: $f(x) = (x - 1)^2 - 1$

(C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بشعاع إنسحاب $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

③ إنشاء منحنى الدالة g حيث: $g(x) = |f(x)|$:

④ المناقشة البيانية:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-8}{7}$	0	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$*$	+	+	0	-	0	+
$**$	+	-	-	-	-	+
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$	+	-	0	+	0	+

إذن:

$$s = \left] -\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right[\cup \left] -\frac{8}{7}; 0 \right[\cup \left] \frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty \right[$$

4 تعيين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متميزة:

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متميزة

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ تقبل حلين

أي: $\Delta > 0$

أي: $(3m-4)^2 - 4(2m-1)(m-4) > 0$

أي: $m^2 + 12m > 0$ أي: $m(m+12) > 0$

x	$-\infty$	-12	0	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	$+$

إذن: $s =]-\infty; -12[\cup]0; +\infty[$

ب/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا:

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$

أي: $\Delta < 0$ إذن: $s =]-12; 0[$

ج/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة تماماً:

المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة تماماً

معناه المعادلة $Q(x) = 0$ تقبل حلين سالبين تماماً

أي: $\Delta > 0$ و $\frac{m-4}{2m-1} > 0$ و $\frac{-(3m-4)}{2m-1} < 0$

لدينا: $\Delta > 0$ لما: (1) $s =]-\infty; -12[\cup]0; +\infty[$

ولدينا: $\frac{m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$m-4$	-	-	0	+
$2m-1$	-	+	+	+
$\frac{m-4}{2m-1}$	+	-	0	+

لما: (2) $m \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[$

ولدينا: $\frac{-(3m-4)}{2m-1} < 0$ أي $\frac{3m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3m-4$	-	-	0	+
$2m-1$	-	+	+	+
$\frac{3m-4}{2m-1}$	+	-	0	+

لما: (3) $m \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

تقاطع المجالات (1) و (2) و (3) هو:

$m \in]-\infty; -12[\cup]4; +\infty[$

حل التمرين 03: [6.5 نقطة]

1 تبين أن P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كان m :

P_m يقبل القسمة على $x+1$ معناه -1 جذر له:

$$P_m(-1) =$$

$$= -(2m-1) + (5m-5) - (4m-8) + m - 4$$

$$= -2m + 1 + 5m - 5 - 4m + 8 + m - 4$$

$$= 0$$

إذن P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كانت قيمة m

2 إيجاد كثير الحدود Q_m :

من القسمة الاقليدية وجدنا أن:

$$Q_m(x) = (2m-1)x^2 + (3m-4)x + (m-4)$$

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

$$\text{لدينا: } \frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$

$$\frac{7x^3 + 15x^2 + 8x}{x^3 - 4x - 3} \geq 0 \quad \text{تكافئ:}$$

$$\frac{x(7x^2 + 15x + 8)}{x^3 - 4x - 3} \geq 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$\bullet \text{ نحلل } (7x^2 + 15x + 8)$$

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x = -\frac{8}{7}$ أو $x = -1$

ومنه: $7x^2 + 15x + 8 = 7(x+1)\left(x + \frac{8}{7}\right)$

إذن: $7x^2 + 15x + 8 = (x+1)(7x+8)$

• نلاحظ أن -1 جذر لـ $x^3 - 4x - 3$

$$\text{إذن: } x^3 - 4x - 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

بعد النشر والمطابقة

$$\text{نجد أن: } x^3 - 4x - 3 = (x+1)(x^2 - x - 3)$$

نحلل: $(x^2 - x - 3)$

لدينا: $\Delta = 13$ ومنه: $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ أو $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$$\text{إذن: } x^3 - 4x - 3 = (x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$\text{إذن: } \frac{x(7x^2 + 15x + 8)}{x^3 - 4x - 3} \geq 0$$

تكافئ:

$$\frac{x(x+1)(7x+8)}{(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$$

$$\text{أي: } \frac{x(7x+8)}{\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$$

ومنه جدول الإشارة:

نضع:

$$x(7x+8) \dots (*)$$

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \dots (**)$$