

يجد أغلب التلاميذ مشكلة في اختيار طريقة ازالة حالة عدم التعيين ، سأحاول في هذا الملف تفصيل هذا على شكل مجموعات و هذا حسب حالة عدم التعيين المتحصل عليها و شكل عبارة الدالة .
في الأخير أنصح بالمجموعة الأولى ، أما البقية حاول التمرن من أجل تحسين مستواك و رفع مستوى ذكائك .

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة الأولى :

نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ و $(-\infty)$.

أمثلة :

$$\begin{array}{l|l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \bullet 2 & \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \bullet 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \bullet 4 & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty \bullet 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \bullet 6 & \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \bullet 5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty \bullet 8 & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty \bullet 7 \end{array}$$

نهاية دالة ناطقة :

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ و $(-\infty)$.

أمثلة :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 5x - 1}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \frac{-2}{3} \bullet 2 \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \bullet 1 \right.$$

نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a :

أمثلة :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \bullet 2 \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x - 1}{1 - x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \bullet 1 \right.$$

المجموعة الثانية :

حساب النهاية عند عدد و الحصول على ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$: و هنا نختار الطريقة حسب شكل العبارة :

1-دالة ناطقة : نستعمل الاختزال :

مثلا : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و لإزالتها :

• نقوم بتحليل كل من $x^2 - 1$ و $x^2 + 2x - 3$ اما بالقسمة الاقليدية أو المتطابقات الشهيرة ثم نقوم بالاختزال.

$$g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

2-دالة بجذر نستعمل المرافق :

ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$ و نزيلها باستعمال المرافق.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3-دالة جيبيية : نستعمل النهايات الشهيرة .

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و نستعمل النهايات الشهيرة و هذا مروراً ببعض العلاقات المثلثية أو تبديل المتغير

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \bullet 1$$

للحصول على شكل نهاية شهيرة .

نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ نهاية شهيرة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(y)}{y} = 3 \times 1 = 3$$

في هذه المجموعة هناك طريقة مشتركة بين كل الأشكال و هي طريقة العدد المشتق ، مثلا :

ح.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$ نزيلها باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x \mapsto \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

نضع $g(x) = \cos(x)$ و منه : $g'(x) = -\sin(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = -\sin(0) = 0$$

المجموعة الثالثة :

هي الأشكال التالية : $\lim_{x \rightarrow \infty} a\sqrt{bx^n + \dots} \pm a'x^{n/2} + \dots$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} a\sqrt{bx^n + \dots} \pm a'\sqrt{b'x^n + \dots}$ مع ج.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$:

و هنا نختار اما التحليل أو المرافق حسب المعاملات :

1-الشكل : $\lim_{x \rightarrow \infty} a\sqrt{bx^n + \dots} \pm a'\sqrt{b'x^n + \dots}$ نميز حالتين :

❖ اذا كان $|a|\sqrt{|b|} = |a'|\sqrt{|b'|}$ نستعمل المرافق :

مثلا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$ هي ج.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$ (نزيليها باستعمال المرافق).

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-2)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = 0$$

❖ اذا كان $|a|\sqrt{|b|} \neq |a'|\sqrt{|b'|}$ نستعمل التحليل :

مثلا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{2x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \sqrt{2 + \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

2-الشكل $\lim_{x \rightarrow \infty} a\sqrt{bx^n + \dots} \pm a'x^{n/2} + \dots$ نميز حالتين :

❖ اذا كان $|a|\sqrt{|b|} = |a'|\sqrt{|b'|}$ نستعمل المرافق :

مثلا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$ هي ج.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$ (نزيليها باستعمال المرافق)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} = 0$$

❖ اذا كان $|a|\sqrt{|b|} \neq |a'|\sqrt{|b'|}$ نستعمل التحليل :

مثلا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x)$ هي ج.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$ (نزيليها باستعمال التحليل)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1) = -\infty.$$

❖ هناك بعض الأمثلة التي يستعمل فيها المرافق لكن تبقى حالة عدم تعيين أخرى و هنا نكمل بالمرافق :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 1})$ هي ج.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$ و نزيليها باستعمال المرافق.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2 - 1}{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{2}{2} = 1$$

هي ج.ع.ت أخرى من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و نزيليها باستعمال التحليل :

المجموعة الرابعة :

هي الأشكال التالية : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^m + \dots + c\sqrt{x} + d}{\lim_{x \rightarrow \infty} a'x^{n'} + b'x^{m'} + \dots + c'\sqrt{x} + d}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n \pm bx^m \pm \dots \pm c\sqrt{x} + d$ مع ح.ع.ت من الشكل

$+\infty - \infty$: و هنا نستعمل **التحليل** : (هي شبيهة بكثير الحدود و الناطقة لكنها تحتوي على $\sqrt{x}$)

مثال 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x}$. حالة عدم التعين من الشكل : $+\infty - \infty$ و لإزالتها نقوم بالتحليل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

مثال 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{x+\sqrt{x}-3} \right)$ ح.ع.ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و نزيلها بالتحليل باستخراج x كعامل مشترك ثم الاختزال .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{x+\sqrt{x}-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}})} \right) = 1$$

المجموعة الخامسة :

هي نهاية دالة مركبة و يمكن التعرف عليها من خلال أمثلة : $\sqrt{ax^n + bx^m + \dots}$; $\sqrt[n]{\dots}$; $\cos\left(\frac{\dots}{\dots}\right)$

مثال 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$ • 1 نهاية دالة مركبة.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

إن : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = +\infty$

مثال 2 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ نهاية دالة مركبة.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ إن :

مثال 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right)$ نهاية دالة مركبة.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ إن :

الأستاذ بلجودي حمو

المجموعة السادسة :

النهاية بالحصر و يوجه التلميذ اليها غالبا ، ترد غالبا في البكالوريا لحساب نهاية متتالية :
مثال :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x-2} \quad \text{بـ}]2; +\infty[$$

$$-1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x-2} \quad \text{من }]2; +\infty[$$

الحل

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{من }]2; +\infty[$$

$$\frac{1}{x-2} > 0 \quad \text{من }]2; +\infty[\quad \text{نضرب كل الأطراف في } \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{-1}{x-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-2} \quad \text{أي: } \frac{-1}{x-2} \leq \frac{\cos(x)}{x-2} \leq \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{-1}{x-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-2} \quad \text{لدينا مما سبق :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x-2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{حسب مبرهنة الحصر نستنتج أن}$$

الأستاذ بلجودي حمـو

- وفق الله كل التلاميذ و الأساتذة -