

5min CHABANE Oussama Maths

Maths

أدب و فلسفة + لغات أجنبية

3as

المنهاج العددي

أصدار ديسمبر 2020

اعداد الأستاذ شعبان أسامة

تلمسان - 0775737163



Facebook/ Telegram/ instagram / Google : 5min Maths
www.dzexams.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

”

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي لشعبة أداب و فلسفة و لغات أجنبية

محور المتتاليات العددية وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصص مساعدتك على التحضير الجيد لاجتياز بكالوريا دورة 2021 ، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة , في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير



أهدي هذا العمل المتواضع لعائلي الكريمة أولا التي سهرت دائما على نجاحي بعد توفيق المولى عز و جل.

و ثانيا لجميع تلاميذي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم

الاستاذ شعبان اسامة



مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة
بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس

2. تطبيقات

3. تمارين محلولة

4. تمارين البكالوريا 2008-2019

ملخص الدرس

المتتاليات الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p + (n - p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

🔔 عدد الحدود = دليل الالحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان: $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ و منه:

• إذا كان r سالبا تماما $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة.

• إذا كان r موجبا تماما $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة.

• إذا كان r معدوما $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

المتتاليات الرتبية

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

(u_n) رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

(u_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$

(u_n) ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$

تمرين:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1 .

2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

الحل:

1. $u_1 = -3(1) + 2 = -1$ و $u_0 = -3(0) + 2 = 2$

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$ ،

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا : $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$

المتتاليات الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p \times q^{n-p}$

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

 عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها q .

نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه:

* إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

* إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

* إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2.

تمرين:

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3 .

2. أحسب، بدلالة r ، الحد العام v_n .

3. أحسب، بدلالة r ، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

الحل:

1. $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$ ، $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$

2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$ و منه: $S = 3 \times \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1)$

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$ عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين	تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{أو} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين

$$u_n = u_p \times q^{n-p}, \quad p \text{ و } n$$

$$\text{حالات خاصة: } u_n = u_0 \times q^n \text{ و } u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$$

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها q .

نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه:

* إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان

$0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

* إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

* إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2.

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$.

4. أحسب v_2 و v_3 .

5. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n .

6. أحسب، بدلالة n ، المجموع

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

الحل:

$$3. \quad v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$$

$$v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$$

$$4. \quad v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$\text{و منه: } S = 3 \times \left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = -3(1 - 2^n) = 3(2^n - 1)$$

$$u_n = u_p + (n - p)r, \quad p \text{ و } n$$

$$\text{حالات خاصة: } u_n = u_0 + nr \text{ و } u_n = u_1 + (n - 1)r$$

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ ، ومنه:

• إذا كان r سالبا تماما $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة.

• إذا كان r موجبا تماما $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة.

• إذا كان r معدوما $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n + 2$.

4. أحسب u_0 و u_1 .

5. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

6. أحسب، بدلالة n ، المجموع

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

الحل:

$$4. \quad u_0 = -3(0) + 2 = 2 \text{ و } u_1 = -3(1) + 2 = -1$$

5. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

6. لدينا:

$$= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$$

$$S = \frac{(n+1)(4 - 3n)}{2} \text{ و منه}$$

تطبيق 1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} .

2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

الحل:

$$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199 ، u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11 ، u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2 ، u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$$

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1 ، u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$$

تطبيق 2:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:

$$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 2 + 1 = -3$$

$$u_2 = -2u_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$$

$$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 7 + 1 = -13$$

تطبيق 3:

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2 .

2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1} .

الحل:

$$v_2 = 2v_1 + 5 = 2(-1) + 5 = 3 \quad \text{و} \quad v_1 = 2v_0 + 3 = 2(-3) + 5 = -1$$

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + 5 = 2(2v_n + 5) + 5$$

$$\text{و منه } v_{n+2} = 4v_n + 15$$

$$\text{من } v_{n+1} = 2v_n + 5 \text{ نستنتج أن } v_n = 2v_{n-1} + 5 \text{ و بالتالي } 2v_{n-1} = v_n - 5$$

$$\text{و منه } v_{n-1} = \frac{v_n - 5}{2}$$

لتكن المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1 .

2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

الحل:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r .

$$1. \quad u_1 = -3(1) + 2 = -1 \quad \text{و} \quad u_0 = -3(0) + 2 = 2$$

$$2. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

$$3. \quad \text{لدينا: } S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$$

تطبيق 5:

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3 .

2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

الحل:

$$1. \quad v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12, \quad v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$$

$$2. \quad v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

$$S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1) \quad \text{و} \quad S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

تطبيق 6:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_0 و u_1 أو بين u_2 و u_3 أو ... وإنما يجب المقارنة

بين u_n و u_{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

$$1. \quad u_{n+1} - u_n = 2n \quad \text{و منه} \quad u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - (n+1) \right] - (n^2 - n)$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n ، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$. نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تطبيق 7 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_1 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

الحل:

إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} \leq u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_2 \leq u_1$

$$\text{لدينا } u_2 \leq u_1 \quad \text{و منه} \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$$

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} \leq u_n$.

المرحلة الثالثة: نبهرن أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\text{لدينا } u_{n+1} \leq u_n. \text{ نحصل بعد ضرب الطرفين في } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{2}u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n. \text{ نضيف } (-1) \text{ إلى الطرفين لنجد:}$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad \text{أي} \quad \frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} \leq u_n$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الحل:

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} v_n \quad \text{و منه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{3}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \text{بما أن } \frac{3}{2} > 1 \text{ و } v_0 > 0 \text{ فإن المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة} \cdot \left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n \right)$$

1.

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

1. احسب u_0, u_1, u_2 و u_3 .

2. بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

ب- عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

2.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1. احسب الحد الأول u_0 .

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

3.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

4. استنتج قيمة المجموع $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$.

4.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

2. بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$.

3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

5.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1. أحسب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3. استنتج قيمة r واحسب u_0 .

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

6. جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

6.

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

أ- 17 ب- 14 ج- 11 د- 10

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

$$\text{أ-} \frac{3^{101}-1}{2} \quad \text{ب-} \frac{1-3^{100}}{2} \quad \text{ج-} \frac{3^{100}-1}{2}$$

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

$$\text{أ-} x = \frac{4}{3} \quad \text{ب-} x = 0 \quad \text{ج-} x = \frac{3}{4}$$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي: هي متتالية:

$$\text{أ-} \text{حسابية أساسها } 1 \quad \text{ب-} \text{هندسية أساسها } \frac{1}{2} \quad \text{ج-} \text{لا حسابية ولا هندسية}$$

7.

اقترح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

$$\text{أ-} v_n = 3 \times 2^n \quad \text{ب-} v_n = 3 \times 2^{n-1} \quad \text{ج-} v_n = 2 \times 3^n$$

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

$$\text{أ-} 3(2^n - 1) \quad \text{ب-} (2^n - 1) \quad \text{ج-} 2(3^n - 1)$$

8.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. بين أن $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .

2. بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

9.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

1. حساب u_0, u_1, u_2, u_3 .

$$u_0 = -2$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = 7$$

2. اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$

$$\begin{aligned} &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

$$\begin{aligned} \text{أي: } 3n - 2 &= 1954 \text{ معناه: } u_{652} = 1954 \text{ رتبته. } 653 \text{ لأن الحد الأول هو } u_0. \\ n &= 652 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

5. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \frac{(-2 + 3n - 2)}{2} \quad \text{و منه}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2} \text{ نقوم بالنشر نتحصل على:}$$

ب- تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

$$3n^2 - n - 4 = 2(328) \text{ معناه:}$$

$$3n^2 - n - 660 = 0$$

$$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما: $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_n = 328$

حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

$$\text{نجمع المعادلات نتحصل: } \begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases}$$

$$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10 \text{ أي: } 4u_0 + 18 = 10 \text{ و بالتالي: } u_0 = -2$$

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = -2 + 3n$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

$$u_n = -2 + 3n = 145 \text{ أي: } n = 49 \text{ يعني: } u_{49} = 145$$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49} \\ &= 50 \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right) \\ &= 50 \left(\frac{-2 + 145}{2} \right) \\ &= 3575 \end{aligned}$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

$$\begin{aligned} S' &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49} \\ &= 2S + 3(50) \\ &= 2(3575) + 150 \\ &= 7300 \end{aligned}$$

حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$

من القانون : نضع : $n = 3; p = 1$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$q = 4, q = -4$$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$$

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right)$$

$$= \frac{-5}{3} (1 - 4^{n+1})$$

4. استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$

$$S' = \frac{-5}{3} (1 - 4^{6+1}) = 27305$$

حل التمرين 4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1. تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) .

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$

$$10r - 10 = 50$$

و منه:

$$10r = 60$$

$$r = 6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$.

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n - 5$

3. أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) .

نحل المعادلة: $6n - 5 = 2017$
 $n = 337 \in \mathbb{N}$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0 = -5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{-5 + 6n - 5}{2} \right) \quad \text{أي:} \\ &= (n+1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right) \\ &= (n+1)(-5 + 3n) \\ &= 3n^2 - 2n - 5 \end{aligned}$$

حل التمرين 5:

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1. حساب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$\begin{aligned} u_3 + u_5 &= 2u_4 \\ 2u_4 &= 20 \quad \text{و بالتالي:} \\ u_4 &= 10 \end{aligned}$$

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$. لدينا:

$$\begin{aligned} u_4 &= 10 \\ 2u_4 - u_5 &= 7 \\ 2(10) - u_5 &= 7 \quad \text{معناه:} \\ u_5 &= 13 \end{aligned}$$

3. استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r = 13 - 10$
 $r = 3$

حساب u_0 .

$$u_4 = u_0 + 4r$$

نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$$u_0 = -2$$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-2 + 3n - 2}{2} \right) \quad \text{و بالتالي:}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right) = 33$$

أي: $66 = (n+1)(-4 + 3n)$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين 6:

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

ب- 14-

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

$$\text{ج-} \frac{3^{100} - 1}{2}$$

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

$$\text{أ-} x = \frac{4}{3}$$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{B}$: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ لأن}$$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

$$\text{ب- } v_n = 3 \times 2^{n-1}$$

لأن حدها الأول v_1 .

3. المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

$$\text{أ- } 3(2^n - 1)$$

حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$

$$u_1^2 = 576 \quad \text{و بالتالي:}$$

$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0 :

$$u_0 + u_1 = 30$$

$$\text{لأن: } u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$

$$u_0 = 6$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$2. \text{بين أن } q = 4 \text{، نعلم أن: } q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = 6 \times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n \\
&= 6 \times 4^n \times 4^1 - 6 \times 4^n \\
&= 6 \times 4^n (4 - 1) \\
&= 6 \times 4^n (3) = 18 \times 4^n
\end{aligned}$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6 \times 4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$.

نتيجه: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

معناه:

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \\
&= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) \\
&= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{-3} \right) \quad \text{أي:} \\
&= -6(1 - 4^n) \\
&= 6(4^n - 1)
\end{aligned}$$

حل التمرين 9:

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

• لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي أن $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

$$\text{لدينا } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3 \text{ و منه } u_{n+1}=3. \text{ إذن الخاصية صحيحة من أجل } n+1.$$

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

• من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = n+1$ و منه $S_n = 3$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \text{ و منه } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}u_n - 3.$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3$.

$$2. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - 3 \text{ و منه } u_n = v_n + 3. \text{ إذن } u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3.$$

$$3. \quad \text{لدينا } S = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 3 + 3 + \dots + 3.$$

و منه $S = S' + 3(n+1)$ حيث $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

$$\text{لدينا } S' = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \text{ و منه } S = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1).$$

$$4. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حلول تمارين الهتاليات العددية

بكالوريا 2008-2019

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و من أجل كل عدد

طبيعي غير معدوم $n: u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. احسب u_2, u_3, u_4 .

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (v_n) كما

يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و

حدها الأول u_1 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n .

د- عين n علماً أن $S_n = 1016$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل

عدد طبيعي غير معدوم $n: u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. حساب: u_2, u_3, u_4

- من أجل: $n = 1$ لدينا: $u_2 = 2u_1 + 1$ نجد: $u_2 = 15$

- من أجل: $n = 2$ لدينا: $u_3 = 2u_2 + 1$ نجد: $u_3 = 31$

- من أجل: $n = 3$ لدينا: $u_4 = 2u_3 + 1$ نجد: $u_4 = 63$

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (v_n) كما

يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- نثبت أن (v_n) متتالية هندسية ولتعيين أساسها q وحدها الأول v_1 :

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$$v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 2$$

$$v_{n+1} = 2(u_n + 1)$$

$$v_{n+1} = 2 \times v_n \text{ ومنه: } \dots$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول v_1 :

$$v_1 = u_1 + 1 \text{ حيث: } \dots$$

$$v_1 = 8 \text{ بالتعويض نجد: } \dots$$

ب- نكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم نستنتج عبارة u_n

بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدداً الأول v_1 بالعلاقة:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

$$\text{ومنه: } v_n = 8 \times 2^{n-1} \dots$$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 1 \text{ أي: } u_n = v_n - 1 \dots$$

$$\text{ومنه: } u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1 \dots$$

$$\text{ج- نضع: } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \dots$$

حساب S_n بدلالة n :

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \times (\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$\text{حيث: } q = 2 \text{ و } v_1 = 8 \text{ } S_n = v_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

$$\text{ومنه: } S_n = 8(2^n - 1) \dots$$

$$\text{د- نعين } n \text{ علماً أن } S_n = 1016:$$

$$\text{نحل في } N \text{ المعادلة: } S_n = 1016 \dots$$

$$\text{أي: } 8(2^n - 1) = 1016 \dots$$

$$2^n - 1 = 127$$

$$2^n = 128$$

$$2^n = 2^7$$

$$\text{لأن: } 128 = 2^7 \dots$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } n = 7 \dots$$

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1. احسب u_0, u_1, u_2 .

2. بين أن (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها. عين اتجاه تغير (u_n)

3. تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$

حل مقترح

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1. حساب: u_0, u_1, u_2

لحساب الحدود u_0, u_1, u_2 نعوض في عبارة الحد العام أعلاه

قيم $n = 0, 1, 2$ على الترتيب، فنجد:

$$u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 7$$

2. - بين أن (u_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r :

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 3(n+1) + 1 \dots$$

$$u_{n+1} = 3n + 3 + 1$$

$$u_{n+1} = (3n + 1) + 3$$

$$\text{ومنه: } u_{n+1} = u_n + 3 \dots$$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$.

- تعيين اتجاه تغير (u_n):

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$$\text{من السؤال السابق: } u_{n+1} - u_n = 3 \dots$$

$$\text{إذن: } u_{n+1} - u_n > 0 \dots$$

ومنه: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماً على N .

ملاحظة:

- كل متتالية حسابية أساسها موجب هي متتالية متزايدة تماماً.

- كل متتالية حسابية أساسها سالب هي متتالية متناقصة تماماً.

3. نتحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، ونحدد

رتبته:

$$\text{نحل في } N \text{ المعادلة: } u_n = 2008 \dots$$

$$\text{أي: } 3n + 1 = 2008 \dots$$

$$\text{فنجد: } n = 669 \dots$$

بما أن 669 عدد طبيعي، فإن العدد 2008 حد من حدود المتتالية

(u_n).

$$\text{حيث: } u_{669} = 2008 \dots$$

$$\text{فيكون الحد الذي قيمته 2008 هو: } u_{669} \dots$$

$$\text{ورتبته: } 670 \dots$$

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_0)

$$4. \text{ حساب المجموع: } S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}.$$

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{669 - 0 + 1}{2} (u_0 + u_{669})$$

$$S = \frac{670}{2} (1 + 2008)$$

$$\text{ومنه نجد: } S = 673015 \dots$$

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و

بالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1. أ- احسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

ب- احسب الحد العاشر.

2. أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3. بين أن الحد (-2008) هو حد من حدود (u_n) . محددا رتبته.

4. احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$

وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) أ- حساب الأساس r للمتتالية (u_n) :

لحساب الأساس r نكتب كلا من u_2 و u_5 بدلالة r .

حيث: $u_2 = 2 + r$ أي: $u_2 = u_1 + r$

و $u_5 = 2 + 4r$ أي: $u_5 = u_1 + 4r$

لدينا: $u_2 - 2u_5 = 19$

$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$

$2 + r - 4 - 8r = 19$

$-2 - 7r = 19$

$-7r = 21$

ومنه نجد: $r = -3$

ب- حساب الحد العاشر:

الحد العاشر هو u_{10} حيث: $u_{10} = u_1 + 9r$

ومنه: $u_{10} = -25$

2) نكتب عبارة u_n بدلالة n :

تعطي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدًا الأول u_1 بالعلاقة:

$u_n = u_1 + (n - 1)r$

$u_n = 2 + (-3)(n - 1)$

$u_n = 2 - 3n + 3$

ومنه نجد: $u_n = 5 - 3n$

3) نبين أن العدد (-2008) هو حد من حدود (u_n) ونحدد

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $u_n = -2008$

أي: $5 - 3n = -2008$

$3n = 2013$

ومنه نجد: $n = 671$

بما أن 671 عدد طبيعي، فإن العدد -2008 حد من حدود

المتتالية (u_n) .

ومنه: $u_{671} = -2008$

فيكون الحد الذي قيمته -2008 هو: u_{671}

ورتبته: 671

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_1)

4) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

تعطي عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$

$S = \frac{671 - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_{671})$

$S = \frac{671}{2} \times (2 - 2008)$

$S = -671 \times 1003$

ومنه نجد: $S = -673013$

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب.

1. عين أساس هذه المتتالية و حدًا الأول u_0 . إذا علمت أن:

$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$ ثم استنتج

قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب.

1) عين q أساس هذه المتتالية و حدًا الأول u_0 علما أن:

$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$

نكتب كلا من الحدين u_3 و u_5 بدلالة q و u_0 .

حيث: $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_5 = u_0 \times q^5$

فتصبح لدينا جملة معادلتين مجهولين q و u_0 هي:

$\begin{cases} u_0 \times q^3 = 144 & \dots \dots 1 \\ u_0 \times q^5 = 576 & \dots \dots 2 \end{cases}$

يقسم 2 على 1: $\frac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^3} = \frac{576}{144}$

أي: $q^2 = 4$

وبما أن الأساس موجب فإن: $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: $8u_0 = 144$

ومنه نجد: $u_0 = 18$

2) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$

تعطي عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدًا الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n = u_0 \times q^n$

بعد التعويض نجد: $u_n = 18 \times 2^n$

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تعطي عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$

حيث: $q = 2$ و $u_0 = 18$

$S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$

ومنه نجد: $S_n = 18(2^{n+1} - 1)$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 1134$

أي: $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

$2^{n+1} - 1 = 63$

$2^{n+1} = 64$

$2^{n+1} = 2^6$

بالمطابقة نجد: $n + 1 = 6$

ومنه: $n = 5$

ملاحظة:

64 | 2

32 | 2

16 | 2

8 | 2

4 | 2

2 | 2

1 | 2

قمنا بتحليل العدد 64 إلى جداء عوامل أولية فنتج:

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

أي: $64 = 2^6$

ومنه يمكن حل المعادلة: $2^{n+1} = 2^6$ بالمطابقة.

1. (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1. عين أساسها و حدها الأول u_0 .

2. أكتب u_n بدلالة n .

3. بين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2009}$.

II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = 2 \times 8^n$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

2. احسب بدلالة n المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

حل مقترح

I- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين:

$$u_{15} = 46 \text{ و } u_{10} = 31$$

(1) تعيين الأساس r والحد الأول u_0 :

نكتب كلا من الحدين u_{15} و u_{10} بدلالة r و u_0 .

حيث: $u_{15} = u_0 + 15r$ و $u_{10} = u_0 + 10r$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين r و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 + 10r = 31 \dots 1 \\ u_0 + 15r = 46 \dots 2 \end{cases}$$

بطرح 1 من 2: $(u_0 + 15r) - (u_0 + 10r) = 46 - 31 \dots$

$$u_0 + 15r - u_0 - 10r = 15$$

$$5r = 15$$

ومنه نجد: $r = 3$

نعوض قيمة r في المعادلة 1 مثلاً فينتج: $u_0 + 30 = 31 \dots$

ومنه نجد: $u_0 = 1$

(2) نكتب u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بالتعويض نجد: $u_n = 1 + 3n \dots$

(3) نبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) :

نحل المعادلة: $u_n = 6028 \dots$

$$1 + 3n = 6028$$

$$3n = 6027$$

ومنه نجد: $n = 2009$

بما أن 2009 عدد طبيعي، فإن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

ومنه: $u_{2009} = 6028$

(4) حساب المجموع S : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{2009 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2009})$$

$$S = \frac{2010}{2} \times (1 + 6028)$$

ومنه نجد: $S = 6059145$

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = 2 \times 8^n$.

(1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول v_0 :

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

لدينا: $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1} \dots$

$$v_{n+1} = 2 \times 8^n \times 8$$

ومنه: $v_{n+1} = v_n \times 8 \dots$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = 8$ وحدها الأول: $v_0 = 2$.

(2) حساب بدلالة n المجموع S' : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

تعطى عبارة المجموع S' بالعلاقة التالية:

$$S' = \frac{\text{عدد الحدود}}{1 - q} \times (\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S' = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S' = 2 \times \frac{1 - 8^{n+1}}{1 - 8}$$

ومنه نجد: $S' = \frac{2}{7}(8^{n+1} - 1) \dots$

2010 الموضوع الثاني (7 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أساسها و حدها الأول u_0 ، حيث: $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

1. أ- احسب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n) .

ب- استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي:

2. أ- علما أن: $2^8 = 256$ ، بين أن 768 حد من حدود المتتالية (u_n) .

ب- احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_7$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة ب: $v_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي

$$v_{n+1} = 2v_n - 1: n$$

أ- احسب v_3, v_2, v_1 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

ج- احسب بدلالة n المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$.

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أساسها q وحدها الأول u_0 حيث: $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

(1) أ- حساب الأساس q والحد الأول u_0 للمتتالية (u_n) :

نكتب كلا من الحدين u_4 و u_1 بدلالة q و u_0 .

حيث: $u_4 = u_0 \times q^4$ و $u_1 = u_0 \times q$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 \times q = 6 \dots 1 \\ u_0 \times q^4 = 48 \dots 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: $\frac{u_0 \times q^4}{u_0 \times q} = \frac{48}{6} \dots$

أي: $q^3 = 8 \dots$

ومنه نجد: $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلاً فينتج: $2u_0 = 6 \dots$

ومنه نجد: $u_0 = 3$

ب- استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي:

$$u_n = 3 \times 2^n$$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $u_0 = 3$ و $q = 2$

بعد التعويض نجد: $u_n = 3 \times 2^n \dots$

(2) أ- علما أن: $2^8 = 256$

نبين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n) :

نحل المعادلة: $u_n = 768 \dots$

$$3 \times 2^n = 768$$

أي: $2^n = 256$

علما أن: $2^8 = 256$

فإن: $2^n = 2^8$

ومنه نجد: $n = 8$

ب- حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{7-0+1}}{1 - q} \quad \text{حيث } q = 2 \text{ و } u_0 = 3$$

$$S = 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2}$$

$$S = 3(2^8 - 1)$$

$$S = 765 \quad \text{ومنه نجد:}$$

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 \quad n: \text{طبيعي}$$

أ- حساب: v_3, v_2, v_1

$$v_1 = 7 \quad \text{من أجل: } n = 0 \text{ لدينا: } v_1 = 2v_0 - 1 \text{ نجد:}$$

$$v_2 = 13 \quad \text{من أجل: } n = 1 \text{ لدينا: } v_2 = 2v_1 - 1 \text{ نجد:}$$

$$v_3 = 25 \quad \text{من أجل: } n = 2 \text{ لدينا: } v_3 = 2v_2 - 1 \text{ نجد:}$$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = 3 \times 2^n + 1$$

نضع: $P(n): v_n = 3 \times 2^n + 1$

$$\bullet \text{ من أجل } n = 0 \text{ لدينا: } v_0 = 4 \text{ و } 3 \times 2^0 + 1 = 4$$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

$\bullet$ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{أي: } v_n = 3 \times 2^n + 1$$

$\bullet$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{أي: } v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$$

$$v_n = 3 \times 2^n + 1$$

نضرب طرفي المساواة في العدد $(+2)$:

$$2v_n = 2(3 \times 2^n + 1)$$

$$2v_n = 3 \times 2^n \times 2 + 2$$

$$2v_n = 3 \times 2^{n+1} + 2$$

نضيف إلى طرفي المساواة العدد (-1) :

$$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 2 - 1$$

$$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$$

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 \quad \text{ولدينا:}$$

$$v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1 \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

ج- حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$.

$$\text{لدينا: } v_n = 3 \times 2^n + 1$$

$$\text{وأيضا: } u_n = 3 \times 2^n$$

$$\text{ومنه: } v_n = u_n + 1$$

$$\text{لدينا: } S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$$

$$S' = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_7 + 1)$$

$$S' = (u_0 + u_1 + \dots + u_7) + (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$S' = S + 8 \times 1$$

$$S' = S + 8 \quad \text{أي:}$$

$$S' = 773 \quad \text{ومنه نجد:}$$

2011 الموضوع الأول (6 نقاط)

1. (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$$u_0 + u_3 = 28$$

أ- احسب u_0 ، ثم اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

ب- احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$.

2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $v_n = 1 - 5n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها ثم استنتج اتجاه تغيرها.

ب- احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9$.

3. نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

تحقق أن: $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع:

$$S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$$

حل مقترح

(1) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$$u_0 + u_3 = 28$$

أ- حساب u_0 :

نكتب u_3 بدلالة u_0 و q كما يلي:

$$u_3 = u_0 \times q^3 \quad \text{أي: } u_3 = 27u_0 \quad (\text{لأن: } q = 3)$$

$$\text{لدينا: } u_0 + u_3 = 28$$

$$u_0 + 27u_0 = 28$$

$$28u_0 = 28$$

$$u_0 = 1 \quad \text{ومنه:}$$

نكتب الحد العام u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 1$.

$$u_n = 3^n \quad \text{بعد التعويض نجد:}$$

ب- حساب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

تعطى عبارة المجموع S_1 بالعلاقة التالية:

$$S_1 = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_1 = u_0 \times \frac{1 - q^{9-0+1}}{1 - q} \quad \text{حيث } q = 3 \text{ و } u_0 = 1$$

$$S_1 = 1 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(3^{10} - 1)$$

$$S_1 = 29524 \quad \text{ومنه نجد:}$$

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$$v_n = 1 - 5n$$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها:

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا كان:

$$v_{n+1} = v_n + r$$

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$$

$$\text{أي: } v_{n+1} = 1 - 5n - 5$$

$$v_{n+1} = (1 - 5n) - 5$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = v_n - 5$$

$$\text{أو: } v_{n+1} - v_n = -5$$

$$\text{إذن: } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = -5 \text{ وحدها الأول: } v_0 = 1.$$

استنتاج اتجاه تغير (v_n) :

بما أن أساس المتتالية (v_n) سالب ($r < 0$) فإن (v_n) متتالية

حسابية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(1) نبحث عن طبيعة المتتالية (u_n) :

لدينا: $u_n = -3n$
 فيكون: $u_{n+1} = -3(n+1)$
 أي: $u_{n+1} = -3n - 3$
 نجد: $u_{n+1} = u_n - 3$
 من الشكل: $u_{n+1} = u_n + r$
 إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.
 ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [2].

(2) نبحث عن الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) :

الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) هو: u_{44}
 أي: $u_{44} = -2 \times 44$
 نجد: $u_{44} = -88$
 ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [3].

(3) نحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 تعطي عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

عدد الحدود
 $S = \frac{\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$
 حيث: $u_n = -2n$ و $u_0 = 0$
 $S = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_n)$
 $S = \frac{n+1}{2} \times (0 - 2n)$
 $S = -n(n+1)$
 نجد: $S = -n^2 - n$
 ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [2].

(4) نبحث عن طبيعة المتتالية (v_n) ونعين أساسها:

لدينا: $v_n = 3^{-2n}$
 فيكون: $v_{n+1} = 3^{-2(n+1)}$
 أي: $v_{n+1} = 3^{-2n-2}$
 $v_{n+1} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$
 $v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{3^2}$
 $v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{9}$
 نجد: $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{9}$
 من الشكل: $v_{n+1} = v_n \times q$
 إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$.
 ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [1].

ب- حساب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$
 تعطي عبارة المجموع S_2 بالعلاقة التالية:

عدد الحدود
 $S_2 = \frac{\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$
 حيث: $v_9 = -44$ و $v_0 = 1$
 $S_2 = \frac{9-0+1}{2} \times (v_0 + v_9)$
 $S_2 = \frac{10}{2} \times (1 - 44)$
 ومنه نجد: $S_2 = -215$

(3) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

- نتحقق أن: $k_n = u_n + v_n$

لدينا: $k_n = 1 + 3^n - 5n$
 $k_n = (3^n) + (1 - 5n)$
 ومنه: $k_n = u_n + v_n$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$

لدينا: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_n$
 $S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_9 + v_9)$
 $S = (u_0 + u_1 + \dots + u_9) + (v_0 + v_1 + \dots + v_9)$
 ومنه: $S = S_1 + S_2$
 بالتعويض: $S = 29524 - 215$
 ومنه نجد: $S = 29309$

2011 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتتان على بحديهما العام:
 $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.
 عين في كل من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح
 من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

العبارة	اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1 (u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
2 الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3 المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4 (v_n) هي متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5 المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

حل مقترح

(5) نعين اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$$v_{n+1} - v_n$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2(n+1)} - 3^{-2n}$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n-2} - 3^{-2n}$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n} \times 3^{-2} - 3^{-2n}$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n}(3^{-2} - 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n} \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n} \left(\frac{1}{9} - 1 \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{8}{9} \times 3^{-2n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1} - v_n < 0$

لأن: $-\frac{8}{9} < 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3^{-2n} > 0$

إذن: (v_n) متناقصة من أجل كل عدد طبيعي n .

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [2].

2012 الموضوع الأول (6 نقاط)

a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r

حيث: $a + b + c = 9$

1. احسب b ثم أكتب a و b بدلالة r .

ب- علما أن: $a \times c = -16$

عين الأساس r ثم استنتج a و c .

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

أ- عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

ب- احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$$

3. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$

احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$.

حل مقترح

a, b, c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما أساسها

r حيث: $a + b + c = 9$

(1) أ- حساب b :

بما أن a, b, c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن:

الوسط الحسابي هو: $a + c = 2b$

لدينا: $a + b + c = 9$

$$(a + c) + b = 9$$

$$2b + b = 9$$

$$3b = 9 \text{ أي:}$$

$$b = 3 \text{ ومنه نجد:}$$

نكتب a و c بدلالة r :

$$b = a + r \text{ لدينا:}$$

$$a = b - r \text{ ومنه:}$$

$$a = 3 - r \text{ بالتعويض:}$$

$$c = b + r \text{ ولدينا:}$$

$$c = 3 + r \text{ بالتعويض:}$$

ب- علما أن: $a \times c = -16$ نعين الأساس r :

$$a \times c = -16 \text{ لدينا:}$$

$$(3 - r) \times (3 + r) = -16 \text{ بالتعويض:}$$

$$9 - r^2 = -16 \text{ بالنشر:}$$

$$r^2 = 25 \text{ أي:}$$

$$r = 5 \text{ بما أن الأساس موجب فإن:}$$

استنتاج a و c :

$$a = 3 - r \text{ لدينا:}$$

$$a = -2 \text{ بالتعويض نجد:}$$

$$c = 3 + r \text{ ولدينا:}$$

$$c = 8 \text{ بالتعويض نجد:}$$

(2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

أ- نكتب عن الحد العام u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

$$u_n = -2 + 5n \text{ بالتعويض نجد:}$$

ب- حساب u_{15} :

من أجل $n = 15$ في عبارة الحد العام:

$$u_{15} = -2 + 5 \times 15 \text{ لدينا:}$$

$$u_{15} = 73 \text{ نجد:}$$

استنتاج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{15-0+1}{2} \times (u_0 + u_{15}) \text{ حيث: } u_{15} = 73 \text{ و } u_0 = -2$$

$$S = \frac{16}{2} \times (-2 + 73)$$

ومنه نجد: $S = 568$

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة على N بالعلاقة:

$$8v_n - u_n = 0$$

- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

لدينا: $8v_n - u_n = 0$

ومنه: $v_n = \frac{1}{8}u_n$

ولدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$

$$S' = \left(\frac{1}{8}u_0\right) + \left(\frac{1}{8}u_1\right) + \dots + \left(\frac{1}{8}u_{15}\right)$$

$$S' = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \dots + u_{15})$$

ومنه: $S' = \frac{1}{8}S$

بالتعويض نجد: $S' = 71$

2012 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. أ- احسب بدلالة r الجداثين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب- عين الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2. نضع $r = 3$.

أ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{2}, \text{ بين أن: } S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ج- جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3. أ- أكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

ج- استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

(1) أ- حساب بدلالة n الجداثين:

$$T_2 = u_2 \times u_4 \text{ و } T_1 = u_1 \times u_5$$

• نكتب u_1 و u_5 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

$$u_3 = u_1 + 2r \text{ لدينا:}$$

$$u_1 = u_3 - 2r \text{ ومنه:}$$

$$u_1 = 7 - 2r \text{ بالتعويض:}$$

$$u_5 = u_3 + 2r \text{ ولدينا:}$$

$$u_5 = 7 + 2r \text{ بالتعويض:}$$

$$T_1 = u_1 \times u_5 \text{ وعليه:}$$

$$T_1 = (7 - 2r) \times (7 + 2r) \text{ بالتعويض:}$$

$$T_1 = 49 - 4r^2 \text{ بالنشر نجد:}$$

• نكتب u_2 و u_4 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

$$u_3 = u_2 + r \text{ لدينا:}$$

$$u_2 = u_3 - r \text{ ومنه:}$$

$$u_2 = 7 - r \text{ بالتعويض:}$$

$$u_4 = u_3 + r \text{ ولدينا:}$$

$$u_4 = 7 + r \text{ بالتعويض:}$$

$$T_2 = u_2 \times u_4 \text{ وعليه:}$$

$$T_2 = (7 - r) \times (7 + r) \text{ بالتعويض:}$$

$$T_2 = 49 - r^2 \text{ بالنشر نجد:}$$

ب- نعين الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

لدينا من السؤال السابق:

$$\begin{cases} T_1 = 49 - 4r^2 \dots 1 \\ T_2 = 49 - r^2 \dots 2 \end{cases}$$

$$T_2 - T_1 = (49 - r^2) - (49 - 4r^2) \dots \dots \dots \text{ بطرح 2 من 1:}$$

$$T_2 - T_1 = 49 - r^2 - 49 + 4r^2 \dots \dots \dots \text{ أي:}$$

$$T_2 - T_1 = 3r^2 \dots \dots \dots \text{ فنجد:}$$

$$T_2 - T_1 = 27 \dots \dots \dots \text{ ولدينا:}$$

$$3r^2 = 27 \dots \dots \dots \text{ ومنه:}$$

$$r^2 = 9 \dots \dots \dots \text{ أي:}$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن: $r = 3$

(2) نضع: $r = 3$.

أ- نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

$$u_1 = 7 - 2r \text{ لدينا:}$$

$$u_1 = 1 \text{ أي:}$$

$$u_n = 1 + 3(n - 1) \dots \dots \dots \text{ بالتعويض في عبارة الحد العام:}$$

$$u_n = 3n - 2 \text{ ومنه نجد:}$$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$- \text{ نبين أن: } S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1- ا- تعبر عن v_n بدلالة n :
تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_0 بالعلاقة:
 $v_n = v_0 \times q^n$
حيث: $q = 3$ و $v_0 = 2$
بعد التعويض نجد: $v_n = 2 \times 3^n$

ب- حساب بدلالة n الفرق: $v_{n+1} - v_n$
 $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
 $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$
 $v_{n+1} - v_n = (3 - 1) 2 \times 3^n$
 $v_{n+1} - v_n = 2 \times 2 \times 3^n$
ومنه: $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن: $4 > 0$
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3^n > 0$
فإن: $4 \times 3^n > 0$
ومنه: $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن: (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2- تضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ا- حساب بدلالة n المجموع S_n :

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q} \quad \text{حيث } q = 3 \text{ و } v_0 = 2$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$$

ومنه نجد: $S_n = 3^n - 1$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 80$

أي: $3^n - 1 = 80$

أو: $3^n = 81$

حيث: $81 = 3^4$

ومنه: $3^n = 3^4$

بالمطابقة نجد: $n = 4$

ج- أثبت بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد

$3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

لاحظ أن: $S_n = 3^n - 1$

العدد S_n يقبل القسمة على 2 يعني: $S_n \equiv 0 [2]$

نضع: $P(n) : S_n \equiv 0 [2]$

• من أجل $n = 0$ لدينا: $S_0 = 0$ و $0 \equiv 0 [2]$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

أي: $S_n \equiv 0 [2]$

• ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2} \times (u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times (1 + 3n - 2)$$

$$S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{يالنشر نجد:}$$

ج- نجد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 145$

أي: $3n^2 - n - 290 = 0$

نجد: $\Delta = 3481 = (59)^2$

للمعادلة حلين متميزين هما: $n_1 = 10$ و $n_2 = -\frac{29}{3}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: $n = 10$

3- ا- نكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n :

لدينا: $u_n = 3n - 2$

فيكون: $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$

أي: $u_{n+5} = 3n + 15 - 2$

ومنه: $u_{n+5} = 3n + 13$

ب- نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

لدينا: $u_{n+5} = 3n + 13$

فيكون: $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$

أي: $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n}$

ومنه: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

ج- استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد:

$\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

يكون العدد: $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا إذا كان العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا.

ويكون العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا إذا كان n من قواسم العدد 13.

وقواسم العدد 13 هي: $D_{13} = \{1, 13\}$

ومنه قيم n هي: $n = 1$ و $n = 13$

2013 الموضوع الأول (6 نقاط)

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1. أ- عبر عن v_n بدلالة n .

ب- احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير

المتتالية (v_n).

2. نضع، من أجل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

أ- احسب بدلالة n المجموع S_n .

ب- عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

ج- أثبت بالتراجع أنه، من أجل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل

القسمة على 2.

حل مقترح

لدينا: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$
 $(u_0) + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34$
 $4u_0 + 30 = 34$
 $4u_0 = 4$
 $u_0 = 1$ فنجد:

(2) نبين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5n + 1$
تعطي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:
 $u_n = u_0 + n \times r$

ومن هنا نجد: $u_n = 5n + 1$

(3) نعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$
 $[5(n+1) + 1] + [5n + 1] - 8n = 4033$
 $5n + 6 + 5n + 1 - 8n = 4033$
 $2n + 7 = 4033$
 $2n = 4026$
 $n = 2013$ ومنه:

(4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$

تعطي عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

عدد الحدود
 $S = \frac{\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$
 $S = \frac{2013 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2013})$
حيث: $u_0 = 1$ و $u_{2013} = 10066$

$S = \frac{2014}{2} \times (1 + 10066)$
نجد: $S = 10137469$

(5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$v_n = 2u_n + 1$

أ- ندرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$v_{n+1} - v_n$
 $v_{n+1} - v_n = (2u_{n+1} + 1) - (2u_n + 1)$
 $v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - 2u_n - 1$
 $v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} - 2u_n$
 $v_{n+1} - v_n = 2[5(n+1) + 1] - 2[5n + 1]$
 $v_{n+1} - v_n = 2(5n + 6) - 2(5n + 1)$
 $v_{n+1} - v_n = 10n + 12 - 10n - 2$
 $v_{n+1} - v_n = 10$ ومنه:
إذن: $v_{n+1} - v_n > 0$

ومن هنا: (v_n) متتالية متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$
 $S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$
 $S' = (2u_0 + 2u_1 + \dots + 2u_{2013}) + (1 + 1 + \dots + 1)$
 $S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + (1 + 1 + \dots + 1)$
 $S' = 2S + 2014 \times 1$

ومن هنا: $S' = 2S + 2014$

نجد: $S' = 20276952$

2014 الموضوع الأول (6 نقاط)

عين الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة، في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التعليل:

• ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

أي: $S_{n+1} \equiv 0 [2]$

لدينا فرضاً: $S_n \equiv 0 [2]$

$3^n - 1 \equiv 0 [2]$

$3^n \equiv 1 [2]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد $(+3)$:

$3 \times 3^n \equiv 3 \times 1 [2]$

$3 \times 3^n \equiv 3 [2]$

$3 \equiv 1 [2]$

$3^{n+1} \equiv 1 [2]$

وحسب خاصية التعدي يكون: $3^{n+1} \equiv 1 [2]$

$(3^{n+1} - 1) \equiv (1 - 1) [2]$

$3^{n+1} - 1 \equiv 0 [2]$

ومن هنا: $S_{n+1} \equiv 0 [2]$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \equiv 0 [2]$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

2013 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1. احسب u_0 .

2. بين أنه، من أجل عدد طبيعي n : $u_n = 5n + 1$.

3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4. احسب بدلالة n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$.

5. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 1$.

أ- ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

ب- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

(1) حساب u_0 :

نكتب: u_1, u_2, u_3 بدلالة r و u_0 .

لدينا: $u_1 = u_0 + r$

ومن هنا: $u_1 = u_0 + 5$

لدينا: $u_2 = u_0 + 2r$

ومن هنا: $u_2 = u_0 + 10$

لدينا: $u_3 = u_0 + 3r$

ومن هنا: $u_3 = u_0 + 15$

حساب أساس المتتالية:

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1}$$

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} \times 3$$

$$v_{n+1} = v_n \times 3 \text{ نجد:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [2].

2014 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$v_{n+1} = 5v_n + 4, n \text{ طبيعي}$$

$$1. \text{ احسب } v_1, v_2, v_3.$$

$$2. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = v_n + 1.$$

أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$.

ب- أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

ج- حل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية و استنتج أنه حد من حدود

المتتالية (u_n) .

3. احسب بدلالة n المجموع حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$4. \text{ احسب بدلالة } n \text{ المجموع حيث: } S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

حل مقترح

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n: v_{n+1} = 5v_n + 4.$$

1. حساب: v_1, v_2, v_3 .

$$- \text{ من أجل: } n = 0 \text{ لدينا: } v_1 = 5v_0 + 4 \text{ نجد: } v_1 = 9$$

$$- \text{ من أجل: } n = 1 \text{ لدينا: } v_2 = 5v_1 + 4 \text{ نجد: } v_2 = 49$$

$$- \text{ من أجل: } n = 2 \text{ لدينا: } v_3 = 5v_2 + 4 \text{ نجد: } v_3 = 249$$

$$2. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = v_n + 1.$$

أ- نبين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول

$$u_0 = 2$$

تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا كان:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = v_{n+1} + 1$$

$$u_{n+1} = (5v_n + 4) + 1$$

$$u_{n+1} = 5v_n + 5$$

$$u_{n+1} = 5(v_n + 1)$$

$$\text{ومنه: } u_{n+1} = 5 \times u_n$$

إذن: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول u_0 .

$$\text{حيث: } u_0 = v_0 + 1$$

$$\text{ومنه نجد: } u_0 = 2$$

ب- نكتب u_n بدلالة n :

تغطي عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\text{حيث: } q = 5 \text{ و } u_0 = 2$$

$$\text{بعد التعويض نجد: } u_n = 2 \times 5^n$$

استنتاج v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = v_n + 1$$

$$\text{أي: } v_n = u_n - 1$$

$$\text{ومنه: } v_n = 2 \times 5^n - 1$$

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$. الحد العام

للمتتالية (u_n) هو:

$$أ- $u_n = 1 + 3n$ ب- $u_n = 7 + 3n$ ج- $u_n = -5 + 3n$$$

2. n عدد طبيعي. المجموع: $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي:

$$أ- $\frac{n^2 + n}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ ج- $\frac{n^2 + 1}{2}$$$

3. x عدد حقيقي. تكون الأعداد ، و بهذا الترتيب حدود متعاقبة

للمتتالية هندسية إذا كان:

$$أ- $x = 3$ ب- $x = 5$ ج- $x = -2$$$

4. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها العام $v_n = 3 \times 2^{n+1}$.

أساس المتتالية (v_n) هو:

$$أ- 2 ب- 3 ج- 6.$$

حل مقترح

نعين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث. في كل

حالة من الحالات الأربع الآتية، مع التعليل.

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$.

الحد العام لمتتالية (u_n) :

نفرض أن الحد الأول هو u_0 .

$$\text{فيكون: } u_2 = u_0 + 2r$$

$$\text{أي: } u_0 = u_2 - 2r$$

$$\text{نجد: } u_0 = -5$$

تغطي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

$$\text{ومنه نجد: } u_n = -5 + 3n$$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [3].

ملاحظة:

يمكن اعتبار u_2 هو الحد الأول لمتتالية (u_n) ، فتصبح عبارة

$$\text{الحد العام كالتالي: } u_n = u_2 + (n-2)r$$

$$\text{بالتعويض نحصل على نفس النتيجة: } u_n = -5 + 3n$$

2. n عدد طبيعي،

$$\text{حساب المجموع: } S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

• لاحظ أن S هو مجموع حدود متتالية حسابية أساسها 1.

تغطي عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{نجد: } S = \frac{n^2 + n}{2}$$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [1].

3. x عدد حقيقي، تكون الأعداد $x, x-2, x+1$ بهذا الترتيب

حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

$$\text{الوسط الهندسي: } x^2 = (x-2)(x+1)$$

$$\text{بالنشر: } x^2 = x^2 + x - 2x - 2$$

$$\text{بعد حل المعادلة نجد: } x = -2$$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح [3].

4. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$.

$$\text{حدها العام: } v_n = 2 \times 3^{n+1}$$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 = 2 \text{ و } q = 3$$

(1) حساب u_1 و u_2 :

$$u_1 = u_0 \times q \text{ لدينا:}$$

$$u_1 = 6 \text{ ومنه:}$$

$$u_2 = u_0 \times q^2 \text{ ولدينا:}$$

$$u_2 = 18 \text{ ومنه:}$$

(2) نكتب u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 2$.

$$u_n = 2 \times 3^n \text{ بعد التعويض نجد:}$$

استنتاج u_5 :

$$u_5 = 2 \times 3^5 \text{ لدينا:}$$

$$u_5 = 486 \text{ ومنه:}$$

(3) نعين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n (3 - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 2 \times 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$$

$$4 > 0 \text{ بما أن:}$$

$$3^n > 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n:$$

$$4 \times 3^n > 0 \text{ فإن:}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ ومنه:}$$

إذن: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(4) - حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} \text{ حيث } q = 3 \text{ و } u_0 = 2$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$$

$$S_n = (3^n - 1) \text{ ومنه نجد:}$$

ب- استنتاج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \dots + 486$.

لاحظ أن:

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_5$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = u_0 \times \frac{1 - q^{5-0+1}}{1 - q}$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = 2 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3}$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = 3^6 - 1$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = 728 \text{ ومنه:}$$

ج- نحلل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \\ 1250 = 2 \times 5^4 \end{array}$$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$u_n = 1250 \text{ نحل في } N \text{ المعادلة:}$$

$$2 \times 5^n = 1250 \text{ أي:}$$

$$1250 = 2 \times 5^4 \text{ ولدينا:}$$

$$2 \times 5^n = 2 \times 5^4 \text{ فيكون:}$$

$$n = 4 \text{ بالمطابقة نجد:}$$

بما أن 4 عدد طبيعي، فإن العدد 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$u_4 = 1250 \text{ حيث:}$$

(3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} \text{ حيث } q = 5 \text{ و } u_0 = 2$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) \text{ ومنه نجد:}$$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$S'_n = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \dots + (u_{n-1} - 1)$$

$$S'_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$S'_n = S_n - n \times 1$$

$$S'_n = S_n - n \text{ ومنه:}$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n \text{ بالتعويض:}$$

الموضوع الأول 2015 (7 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسية التي وحدها الأول u_0 وأساسها $q = 3$

1. احسب u_1 و u_2 .

2. أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج u_5 .

3. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

ب- استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \dots + 486$

5. أ- عين باقي القسمة الاقليدية على 5 لكل من الأعداد 3^3 , 3^2 , 3^1 و 3^4 .

ب- استنتج أنه لكل k من $\mathbb{N}$ $3^{4k} \equiv 1 [5]$.

6. عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابل للقسمة على 5.

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r حيث:

$$u_1 - u_3 = 5 \text{ و } u_2 = \frac{1}{2}$$

(1) - نبين أن: $u_1 + u_3 = 1$.

الوسط الحسابي: $u_1 + u_3 = 2u_2$

بالتعويض: $u_1 + u_3 = 2 \times \frac{1}{2}$

ومنه: $u_1 + u_3 = 1$

ب- نعين الحد الأول u_1 :

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \dots 1 \\ u_1 + u_3 = 1 \dots 2 \end{cases}$

بجمع 1 و 2 طرف لطرف: $u_1 - u_3 + u_1 + u_3 = 6$

نجد: $2u_1 = 6$

ومنه: $u_1 = 3$

استنتاج أن: $r = -\frac{5}{2}$.

لدينا: $u_2 = u_1 + r$

ومنه: $r = u_2 - u_1$

نجد: $r = -\frac{5}{2}$

(2) نكتب u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

ومنه: $u_n = 3 - \frac{5}{2}(n - 1)$

نجد: $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$

(3) - حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times \left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{n(17 - 5n)}{4} \text{ نجد:}$$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $S_n = -\frac{657}{2}$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = -\frac{657}{2}$

أي: $5n^2 - 17n - 1314 = 0$

نجد: $\Delta = 26569 = (163)^2$

للمعادلة حلين متميزين هما: $n_1 = 18$ و $n_2 = -\frac{73}{5}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: $n = 18$

نرفض القيمة n_2 لأن $\left(-\frac{73}{5}\right)$ ليس عددا طبيعيا.

ملاحظة:

يمكن تعويض n مباشرة في علاقة S_n بالعدد 5 (لدينا 6 حدود في المجموع: $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$).

(5) - نعين باقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد: $3, 3^2, 3^3, 3^4$.

باقي قسمة 3 على 5 هو: 3

باقي قسمة 3^2 على 5 هو: 4

باقي قسمة 3^3 على 5 هو: 2

باقي قسمة 3^4 على 5 هو: 1

العدد	3	3^2	3^3	3^4
الباقي على 5	3	4	2	1

ب- استنتاج أنه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1 [5]$.

لدينا من السؤال السابق: $3^4 \equiv 1 [5]$

وحسب خواص الموافقات فإن: $(3^4)^k \equiv 1^k [5]$

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1 [5]$

(6) نعين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

$3^n - 1 \equiv 0 [5]$

أي: $3^n \equiv 1 [5]$

ومنه: $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$)

(6 نقاط)

الموضوع الثاني

2015

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و

$$u_1 - u_3 = 5$$

1-أ- نبين أن: $u_1 + u_3 = 1$.

ب- نعين الحد الأول، ثم استنتج أن.

2. أكتب u_n بدلالة n .

3-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$

4. n عدد طبيعي غير معدوم نضع:

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

أ-تحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

حل مقترح

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ب- عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 3n - 2$$

1. احسب u_0, u_1, u_2, u_3 .

$$u_0 = -2$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = 7$$

2. اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$

$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$

$$= 3$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n)

نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

$$\text{أي: } 3n - 2 = 1954 \text{ معناه: } n_{652} = 1954$$

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

رتبته. 653 لأن الحد الأول هو u_0 .

أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \frac{(-2 + 3n - 2)}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2} \text{ نقوم بالنشر نتحصل على:}$$

ب- تعيين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

$$\text{معناه: } 3n^2 - n - 4 = 2(328)$$

$$3n^2 - n - 660 = 0$$

4) عدد طبيعي غير معدوم، نضع:

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

أ- نتحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

بالنشر: $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$ ،،،،

$$\text{أي: } (n+2)(9-5n) = -5n^2 + (9n - 10n) + 18$$

$$\text{ومنه: } (n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، نثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

$$\text{نضع: } P(n): T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

• من أجل $n = 1$

$$\text{لدينا: } T_1 = 1 \times u_1 = 3$$

$$\text{و: } T_1 = \frac{1}{6} \times 1 \times (1+1)(14-5 \times 1) = 3$$

ومنه $P(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{أي: } T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

• ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{أي: } T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

$$\text{لدينا فرضاً: } T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n + (n+1)u_{n+1}$$

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$$

$$\text{حيث: } u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n - \frac{5}{2} + \frac{11}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n + \frac{6}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(6-5n)$$

$$\text{ومنه: } T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{3}{6}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + 3(6-5n)]$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(14n-5n^2+18-15n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2-n+18)$$

$$\text{لدينا: } -5n^2-n+18 = (n+2)(9-5n)$$

$$\text{ومنه: } T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

اذن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

(7 نقاط)

الموضوع الأول

2016

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 3n - 2$$

1. احسب u_0, u_1, u_2, u_3 .

2. بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$u_1 = 20 \text{ و } u_3 = 320$$

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$

من القانون : نضع : $n = 3; p = 1$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$q = 4, q = -4$$

$$q = -4 \text{ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: } q = 4$$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$$

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right)$$

$$= \frac{-5}{3} (1 - 4^{n+1})$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$

$$S' = \frac{-5}{3} (1 - 4^{6+1}) = 27305$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$

2017 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

$$\text{و } u_3 + u_7 = 50$$

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

2. بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$

3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) , ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

$$\text{و } u_3 + u_7 = 50$$

1. تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) .

$$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$

و بالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_n = 328$

2016 الموضوع الثاني (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و

$$\text{تحقق: } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$$

1. احسب الحد الأول u_0 .

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

حل مقترح

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$$

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases} \text{ نجمع المعادلات نتحصل :}$$

$$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$$

$$\text{أي: } 4u_0 + 18 = 10 \text{ و بالتالي: } u_0 = -2$$

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = -2 + 3n$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

$$u_n = -2 + 3n = 145$$

$$n = 49 \text{ يعني: } u_{49} = 145$$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$$

$$= 50 \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right)$$

$$= 50 \left(\frac{-2 + 145}{2} \right)$$

$$= 3575$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$$

$$= 2S + 3(50)$$

$$= 2(3575) + 150$$

$$= 7300$$

2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$u_1 = 20 \text{ و } u_3 = 320$$

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_4 = 10$$

$$2u_4 - u_5 = 7$$

معناه:

$$2(10) - u_5 = 7$$

$$u_5 = 13$$

3. استنتاج قيمة r

$$r = u_5 - u_4$$

$$r = 13 - 10$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r = 13 - 10$

$$r = 3$$

حساب u_0 .

$$u_4 = u_0 + 4r$$

$$u_0 + 4(3) = 10$$

$$u_0 = -2$$

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-2 + 3n - 2}{2} \right)$$

و بالتالي:

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

6. ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4 + 3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل:

$$n = 5$$

2017 استثنائية الموضوع الثاني (6 نقاط)

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

أ- 17 ب- 14 ج- 11 -

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101} - 1}{2}$ ب- $\frac{1 - 3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية

حسابية عندما يكون:

أ- $x = \frac{4}{3}$ ب- $x = 0$ ج- $x = \frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي: هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل مقترح

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$

$$10r - 10 = 50$$

و منه:

$$10r = 60$$

$$r = 6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$.

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n - 5$

3. أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ,

$$6n - 5 = 2017$$

نحل المعادلة:

$$n = 337 \in \mathbb{N}$$

رتبته 338 لان: حددا الأول: $u_0 = -5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-5 + 6n - 5}{2} \right)$$

أي:

$$= (n+1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right)$$

$$= (n+1)(-5 + 3n)$$

$$= 3n^2 - 2n - 5$$

استثنائية 2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1. أحسب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3. استنتج قيمة r واحسب u_0 .

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

6. جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

حل مقترح

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1. حساب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$u_3 + u_5 = 2u_4$$

$$2u_4 = 20$$

و بالتالي:

$$u_4 = 10$$

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$. لدينا:

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

ب- 14-

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $c = 4x, b = 6x - 3, a = 2x + 2$.
الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

أ- $x = \frac{4}{3}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي: هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و

أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$

و بالتالي: $u_1^2 = 576$

$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$
استنتاج قيمة u_0 :

$$u_0 + u_1 = 30$$

$$u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$

$$u_0 = 6$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

2. بين أن $q = 4$ ، نعلم أن: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = 6 \times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n$$

$$= 6 \times 4^n \times 4^1 - 6 \times 4^n$$

$$= 6 \times 4^n (4 - 1)$$

$$= 6 \times 4^n (3) = 18 \times 4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. احسب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6 \times 4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ: } u_n = \frac{2}{5}n - 1$$

(1) بين أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدها الأول u_1 .

(2) عين رتبة الحد الذي قيمته 575.

(3) احسب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

(ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

2018 الموضوع الأول (6 نقاط)

اقترح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n = 3 \times 2^n$ ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ ج- $v_n = 2 \times 3^n$

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$ ب- $(2^n - 1)$ ج- $2(3^n - 1)$

حل مقترح

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1} - u_n > 0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1 .

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$

2018 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و

أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. بين أن $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .

2. بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم

استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$.
رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ معناه:

$$S_n = u_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

$$= 24 \left(\frac{1-4^n}{1-4} \right)$$

$$= 24 \left(\frac{1-4^n}{-3} \right) \text{ أي:}$$

$$= -6(1-4^n)$$

$$= 6(4^n - 1)$$

2019 الموضوع الأول (6 نقاط)

حل مقترح

1. لاثبات أن المتتالية حسابية نقوم بحساب الفرق: $u_{n+1} - u_n$ و نتحصل على عدد حقيقي الذي يكون بدوره الأساس.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) - 1 - \frac{2}{5}n + 1$$

$$\text{أي:}$$

$$= \frac{2}{5}$$

اذن: $r = \frac{2}{5}$ هو أساس هذه المتتالية الحسابية.

الحد الأول: u_1

$$u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{-3}{5}$$

2. رتبة الحد الذي قيمته 575: نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = \frac{2}{5}n - 1 = 575$$

$$n = 1440$$

و بالتالي رتبته 1440 أي: $u_{1440} = 575$ لأن الحد الأول هو u_1 .

3. حساب المجموع:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$$

$$= 1440 \left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2} \right)$$

$$= 413568$$

4. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة: $v_n = 4^{5u_n+6}$

اثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

أي نحسب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و نتحصل على عدد حقيقي

الذي يسمى أساس هذه المتتالية.

نبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت

$$\text{لدينا: } v_n = 4^{5u_n+6} \text{ ومنه: } v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$$

$$\text{ويمان } (u_n) \text{ حسابية فإن } u_{n+1} = u_n + r \text{ أي: } u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = 4^{5(u_n + \frac{2}{5})+6} = 4^{5u_n+2+6} = 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2$$

$$\text{وبالتالي: } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6} \times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16$$

اذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 16$ ، وخذها الأول

$$v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5(\frac{-3}{5})+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64$$

ب- المجموع:

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 64 \left(\frac{1-16^{n+1}}{1-16} \right) = \frac{64}{-15} (1-16^{n+1})$$

$$= \frac{64}{15} (16^{n+1} - 1)$$

2019 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) المتتالية الحسابية التي حددها الأول u_0 و أساسها r .

(1) علما أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عتّن u_1 .

(2) علما أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عتّن الحد الأول u_0 ، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية.

(3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أ عتّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) .

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(6) عتّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$

حل مقترح

1. تعيين u_1 :

باستعمال خاصية الوسط الحسابي: $u_0 + u_2 = 2u_1$

$$3u_1 = 6$$

$$\text{و منه: } u_1 = \frac{6}{3} = 2$$

2. تعيين الحد الأول: u_0 علما أن:

$$2u_0 - 3u_1 = -10$$

$$2u_0 - 3(2) = -10$$

$$2u_0 = -4$$

$$u_0 = -2$$

تعيين قيمة الأساس: $r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$.

3. عبارة الحد العام:

$$u_n = u_0 + nr = -2 + 4n$$

4. أ- تعيين قيمة حتى يكون $u_n = 2018$.

$$-2 + 4n = 2018$$

$$\text{أي: } n = 505$$

ب- حساب الحد الخامس عشر:

يعني نحسب u_{14} لأن الحد الأول هو u_0 .

و بالتالي: $u_{14} = 54$.

5.أ- حساب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-2 - 2 + 4n}{2} \right) \quad \text{يعني:}$$

$$= (n+1)(-2 + 2n)$$

بعد النشر و التبسيط نتحصل على: $S_n = 2n^2 - 2$

6. ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 96$.

نقوم بحل معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الطبيعي n

$$n = 7 \in \mathbb{N}$$

$$n = -7 \notin \mathbb{N} \quad \text{نجد:}$$

اذن: $n = 7$

اخبر نفسك...

١. أ- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 4n - 1$ ، احسب u_0 ، u_1 و u_7 :

ب- عين أساس المتتالية (u_n) :

ج- ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

د- احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$:

هـ- احسب المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

و- أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 54$:

٢. أ- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، احسب v_0 ، v_1 :

ب- عين الأساس q و الحد الأول v_0 للمتتالية (v_n) :

ج- عين اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

د- احسب المجموع S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

هـ- أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 3$:

٣. (u_n) متتالية حسابية ومعرفة على $\mathbb{N}^*$ بجدها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.
أ- احسب الأساس r لهذه المتتالية: (ارشد أكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة r و u_1)

ب- أكتب عبارة الحد العام لهذه المتتالية:

ب- احسب الحد العاشر:

٤. (v_n) متتالية عددية معرفة بجدها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_{n+1} = 2v_n + 1$.
أ- احسب v_2 ، v_3

ب- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرف المتتالية (t_n) كما يلي: $t_n = v_n + 1$.
أثبت أن (t_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها:



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
والتنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة**

5min  Maths 

