

تمارين : الاعداد المركبة (من الكتاب المدرسي) مع الحل المفصل

الاستاذ : بوفلاط محمد

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$.

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $(1-i)z = 3+i$. ب - $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0$.

ج - $\frac{\bar{z}-1}{z+1}=i$. د - $2z+i\bar{z}=5-4i$.

II. حل في المجموعة C^2 الجمل ذات المجهول $(z; z')$ التالية :

أ - $\begin{cases} 3z+z'=2-5i \\ z-z'=-2+i \end{cases}$. ب - $\begin{cases} 3z+z'=5+2i \\ z+z'=1-2i \end{cases}$.

III. برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

IV. $z = x + iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\alpha = z - 2\bar{z} + 2 + 3i$.

(أ) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

(ب) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $\alpha = 0$, ذات المجهول z .

V. $z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq 1$ و x, y عددا حقيقيين .

نعتبر العدد المركب L حيث $L = \frac{z+2i}{z-1}$.

(أ) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

(ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

(ج) برهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة ، يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

VI. A, B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1=1, z_2=2i$.

و $z_3 = -1-i$.

(أ) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$.

(ب) أحسب $\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$.

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

VII. عيّن ثم مثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ - $|z+1+2i| = |z-4|$. ب - $|z-3i| = 2$. ج - $|2z-i| = 2$.

VIII. يعطى العدد المركب α حيث : $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

(أ) أحسب α^2 ثم α^4 .

(ب) أحسب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

(ج) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z| = 6$.

IX. في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ - $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب - $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ج - $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د - $z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$.

X. أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي

$z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ ، $z_3 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ، $z_2 = 3 - 3i$ ، $z_1 = 1 + i$

$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ ، $z = (1 - i)^2$

$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$ ، $z = (1 + i)(\sqrt{3} + i)$

XI. نعتبر العدد المركب $Z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}}$

(أ) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري

(ب) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

(ج) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\bar{Z}$

XII. (1) أنشئ في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B ، C و D صور على الترتيب للأعداد

المركبة التالية :

$2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ و $e^{i\pi}$ ، $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛

$\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(3) أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_4 = -1$ ؛ $z_3 = \frac{5}{4}i$ ؛ $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ ؛ $z_1 = 2 - 2i$

(4) عين شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_4 = -\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}}$

XIII. حل في مجموعة الأعداد المركبة كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ - $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$. ب - $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

ج - $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

د - $z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

XIV. يعطى العددين المركبين $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1-i$.

(1) أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$.

(3) استنتج أن : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

XV. حل في مجموعة الأعداد المركبة، كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ ؛ $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5+2\sqrt{3} = 0$

في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد

المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ - ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب - أكتب معادلة للدائرة $\mathcal{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

ج - أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

د - أنشئ $\mathcal{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

XVI. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر.

لكل سؤال يمكن عدة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبرراً ذلك .

(1) تعطى النقط A ، B و C ، لواحقها على الترتيب : $a = -2+3i$ ؛ $b = -3-i$ و

$c = 2,08+1,98i$.

المثلث ABC هو :

- ✓ متساوي الساقين وغير قائم .
- ✓ قائم وغير متساوي الساقين .
- ✓ متساوي الساقين وقائم .
- ✓ لا قائم ولا متساوي الساقين .

(2) لكل عدد مركب $z \neq -2$ نرفق العدد المركب z' حيث : $z' = \frac{z-4i}{z+2}$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'|=1$ هي :

✓ دائرة مركزها 1 .

✓ مستقيم .

✓ دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة .

✓ مستقيم باستثناء نقطة .

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :

✓ دائرة مركزها 1 .

✓ مستقيم .

✓ دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة .

✓ مستقيم باستثناء نقطة .

XVII. في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

أ - $Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$

ب - $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$

ج - $Arg(z) = Arg(\bar{z})$

XVIII. لكل سؤال يمكن عدّة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبرّرا ذلك .

نضع $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(1) الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو :

$2\sqrt{2}$ ✓

$2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ ✓

$2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$ ✓

$2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ ✓

(2) العدد المركب z^2 يكتب على الشكل الأسّي :

$4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓

$4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ✓

$4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ✓

$4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ ✓

(3) العدد المركب z يكتب على الشكل الأسّي :

$2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ ✓

$4e^{i\frac{\pi}{8}}$ ✓

$4e^{i\frac{5\pi}{8}}$ ✓

$4e^{i\frac{3\pi}{8}}$ ✓

XIX. المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللواحق على الترتيب $a=1$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$c = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

(2) مثل النقط A, B, C, D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو

معين .

XX. يعطى العددان المركبان $z_1 = 2+3i$ و $z_2 = 2+i$.

(1) أكتب $z_1^2 - z_2^2$ على شكله المثلثي .

(2) أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري.

.XXI يعطى العدد المركب $z = \frac{1-3i}{2-i}$.

(1) أكتب z على الشكل الجبري ثم استنتج طويلته وعمدة له .

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

حلول التمارين

I. حلول المعادلات في مجموعة الاعداد المركبة :

$$\text{أ - } (1-i)z = 3+i \text{ تكافئ } z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

مجموعة حلول المعادلة $s = \{1+2i\}$

$$\text{ب - } (2z+1-i)(i\bar{z}+i-2+\bar{z}+1+2i) = 0 \text{ تكافئ } 2iz\bar{z} + 2iz - 4z + i\bar{z} + i - 2 + \bar{z} + 1 + 2i = 0$$

$$\text{بوضع } z = a+ib \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$2i(a^2+b^2) + 2i(a+ib) - 4(a+ib) + i(a-ib) + 3i - 1 + a - ib = 0$$

$$-2b - 4a + b - 1 + a + i(2a^2 + 2b^2 + 2a - 4b + a + 3 - b) = 0$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} -b - 3a - 1 = 0 \\ 2a^2 + 2b^2 + 3a - 5b + 3 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -b - 3a - 1 + i(2a^2 + 2b^2 + 3a - 5b + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 2a^2 + 2(-3a-1)^2 + 3a - 5(-3a-1) + 3 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 2a^2 + 2b^2 + 3a - 5b + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 20a^2 + 30a + 10 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 2a^2 + 2(9a^2 + 1 + 6a) + 3a - 5(-3a-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{نحل المعادلة } 2a^2 + 3a + 1 = 0, \Delta = 1, a_1 = -1, \text{ و } a_2 = -\frac{1}{2}.$$

- اذا كان $a_1 = -1$ فان $b_1 = 2$

- اذا كان $a_2 = -\frac{1}{2}$ فان $b_2 = \frac{1}{2}$

$$\text{مجموعة حلول المعادلة } s = \left\{ -1+2i, -\frac{1}{2}+i\frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{ج - } \frac{\bar{z}-1}{z+1} = i \text{ تكافئ } \bar{z}-1 = i(z+1) \text{ تكافئ}$$

$$z = -\frac{1}{2}i \text{ تكافئ } \bar{z} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i^2}{1+1} = \frac{1}{2}i \text{ تكافئ } \bar{z} = \frac{1+i}{1-i} \text{ تكافئ } \bar{z}(1-i) = 1+i$$

$$\text{مجموعة حلول المعادلة } s = \left\{ -\frac{1}{2}i \right\}$$

$$\text{د. } 2z + i\bar{z} = 5-4i \text{ بوضع } z = a+ib \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

$$\text{بالتعويض في المعادلة نجد : } 2(a+ib) + i(a-ib) = 5-4i \text{ تكافئ}$$

$$\text{بالتعويض نجد : } \begin{cases} 2a+b=5 \\ 2b+a=-4 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2a+b=5 \\ 2b+a=-4 \end{cases}$$

$$-3a = -14 \text{ تكافئ } a = \frac{14}{3} \text{ بالتعويض نجد}$$

$$2b + \frac{14}{3} = -4 \text{ تكافئ } 2b = -4 - \frac{14}{3} = -\frac{26}{3} \text{ تكافئ } b = -\frac{13}{3}$$

$$s = \left\{ \frac{14}{3} + i\frac{1}{3} \right\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\text{II. أ. } \begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$$

بالجمع نجد : $4z = -4i$ تكافئ $z = -i$ بالتعويض في إحدى المعادلات نجد :

$$z' = 2 - 2i \text{ تكافئ } -i - z' = -2 + i$$

$$s = \{(-i; 2 - 2i)\} \text{ مجموعة حلول الجملة}$$

$$\text{ب - } \begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ z + z' = 1 - 2i \end{cases}$$

بالطرح نجد $2z = 4 + 4i$ تكافئ $z = 2 + 2i$ بالتعويض في إحدى المعادلات نجد:

$$z' = -1 - 4i \text{ تكافئ } 2 + 2i + z' = 1 - 2i$$

$$s = \{(2 + 2i; -1 - 4i)\} \text{ مجموعة حلول الجملة}$$

$$\text{III. برّر أن العددين } (1+i)^8 \text{ و } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} \text{ حقيقيان .}$$

$$(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = [1+2i+i^2]^4 = (2i)^4 = 2^4(i)^4 = 16(i^2)^2 = 16$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left(\frac{1-2i+i^2}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left(\frac{-2i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \frac{(-2)^{2008}(i)^{2008}}{(\sqrt{2})^{2008}} = \frac{2^{2008}(i^2)^{1004}}{((\sqrt{2})^2)^{1004}} = \frac{2^{2008}}{2^{1004}} = \left(\frac{2^2}{2}\right)^{1004} = 2^{1004}$$

وكلا من العددين حقيقيين

IV. أ) حساب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

$$\alpha = z - 2\bar{z} + 2 + 3i$$

$$\alpha = x + iy - 2(x - iy) + 2 + 3i = -x + 2 + i(3y + 3)$$

ب) الحل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $\alpha = 0$, ذات المجهول z .

$$\alpha = 0 \text{ يعني } -x + 2 + i(3y + 3) = 0 \text{ يعني } \begin{cases} -x + 2 = 0 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$s = \{2 - i\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

V. أ) كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري .

$$L \text{ معرف من أجل } z \neq 1 \text{ يعني } x \neq 2 \text{ و } y \neq 0$$

$$L = \frac{x + iy + 2i}{x + iy - 2} = \frac{x + iy + 2i}{x - 2 + iy} = \frac{(x + iy + 2i)(x - 2 - iy)}{(x - 2 + iy)(x - 2 - iy)}$$

$$L = \frac{x^2 - 2x - ixy + ixy - i2y + y^2 + i2x - 4i + 2y}{(x - 2)^2 + y^2}$$

اذن :

$$L = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y + i(2x - 2y - 4)}{(x - 2)^2 + y^2}$$

$$L = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y}{(x - 2)^2 + y^2} + i \frac{2x - 2y - 4}{(x - 2)^2 + y^2}$$

ب) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

L حقيقي يعني $\frac{2x-2y-4}{(x-2)^2+y^2} = 0$ يعني $2x-2y-4=0$ و $(x \neq 2 \text{ و } y \neq 0)$

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من اجلها L حقيقيا هي مستقيم ذو معادلة $2x-2y-4=0$ ماعدا نقطة $A(2;0)$.

(ج) نبرهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من اجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة

L تخيلي صرف يعني $\frac{x^2+y^2-2x+2y}{(x-2)^2+y^2} = 0$ يعني $x^2+y^2-2x+2y=0$ و $(x \neq 2 \text{ و } y \neq 0)$

يعني $(x-1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{2})^2$ و $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1=0$ و $(x \neq 2 \text{ و } y \neq 0)$ وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(1;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ماعدا نقطة $A(2;0)$

VI. أ) حساب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$ ، $z_1=1$.

$$|z_2-z_1|=|2i-1|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$|z_3-z_1|=|-1-i-1|=-2-i=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=1 \text{ اذن}$$

ب) حساب $\text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$.

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{2i-1}{-2-i}=\frac{(2i-1)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-4i-2+2-i}{5}=-i$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\text{Arg}(-i)=-\frac{\pi}{2} \text{ اذن}$$

(ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC .

بما أن $\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=1$ أي $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$ اذن $AB=AC$ و

فان المثلث ABC قائم في A ومتساوي $\text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\text{Arg}(-i)=-\frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{2}$

الساقين

VII. تعين ثم نمثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة.

أ - $|z+1+2i|=|z-4|$ تكافئ $|z-(-1-2i)|=|z-4|$ لتكن A صورة العدد المركب

$z_1=-1-2i$ و B صورة العدد المركب $z_2=4$ وعليه $|z-(-1-2i)|=|z-4|$

تكافئ $|z-z_1|=|z-z_2|$ تكافئ $AM=BM$ وبالتالي مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

ب - $|z - 3i| = 2$ ، لتكن C صورة العدد المركب $z_3 = 3i$ وعليه $|z - 3i| = 2$ تكافئ
 $|z - z_3| = 2$ تكافئ $CM = 2$.

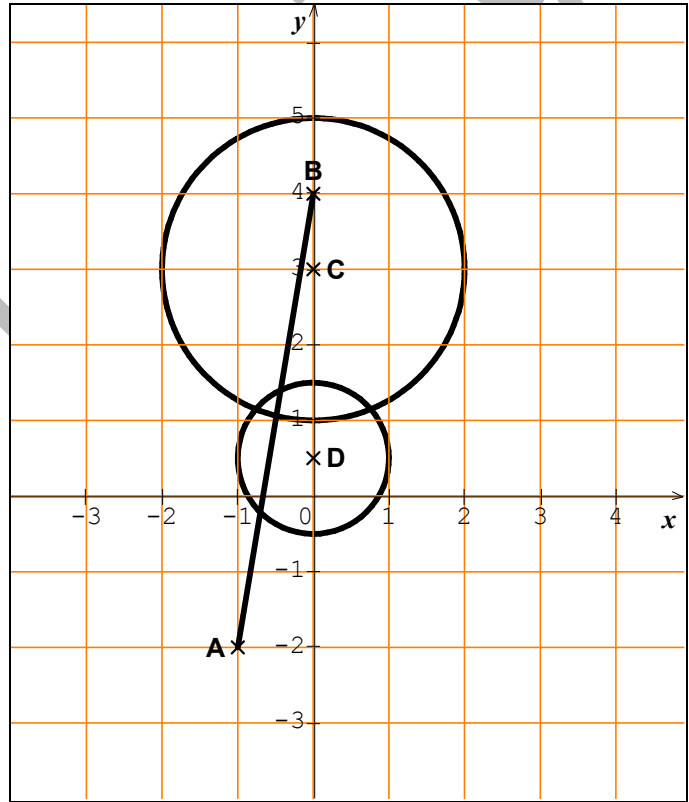
مجموعة النقط هي دائرة مركزها C ونصف قطرها 2 .

ج - $|2z - i| = 2$

$|2\left(z - \frac{1}{2}i\right)| = 2$ تكافئ $2\left|z - \frac{1}{2}i\right| = 2$ تكافئ $\left|z - \frac{1}{2}i\right| = 1$ لتكن D صورة العدد

المركب $z_4 = \frac{1}{2}i$ وعليه $\left|z - \frac{1}{2}i\right| = 1$ تكافئ $|z - z_4| = 1$ تكافئ $DM = 1$.

مجموعة النقط هي دائرة مركزها D ونصف قطرها 1 .



VIII. (أ) حساب α^2 ثم α^4 . $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2$$

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 - 2i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2$$

$$\alpha^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{4 - 2} - 2 - \sqrt{2}$$

$$\alpha^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$$\alpha^2 = -2\sqrt{2}(1 + i)$$

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= (\alpha^2)^2 \\ \alpha^4 &= [-2\sqrt{2}(1+i)]^2 \\ \alpha^4 &= 8(1+2i-1) \\ \alpha^4 &= 16i\end{aligned}$$

ب) حساب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

$$|\alpha^4| = \sqrt{(16)^2} = 16$$

لدينا $|\alpha^4| = \sqrt{(16)^2} = 16$ وبالتالي $|\alpha^4| = 16 = 2^4$ أي $|\alpha|^4 = 16 = 2^4$ نستنتج $|\alpha| = 2$

ج) نعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z| = 6$.

$$|\alpha z| = 6 \text{ يعني } |\alpha| \times |z| = 6 \text{ يعني } 2 \times |z| = 6 \text{ يعني } |z| = 3 \text{ يعني } OM = 3$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 3 .

IX. عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) - \text{أ}$$

$$z = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

لأن الدالة $\cos$ زوجية والدالة $\sin$ فردية

$$\text{اذن } |z| = 4 \text{ و } \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ب - } z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = 3 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = 3 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z = 3 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{لان : } \sin(\pi + x) = -\sin x \text{ و } \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\text{اذن : } |z| = 3 \text{ و } \text{Arg}(z) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{ج - } z = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \sqrt{5} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$z = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

لان : $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$ و $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$

اذن : $|z| = \sqrt{5}$ و $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

د - $z = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6}$

$$z = \sin \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$z = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z = 1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

لأن الدالة cos زوجية والدالة sin فردية

اذن $|z| = 1$ و $Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

X. كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي

(*) $z_1 = 1 + i$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

لنكن θ_1 عمدة لـ z_1 : $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$ نستنتج $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

اذن : $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

(*) $z_2 = 3 - 3i$

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

لنكن θ_2 عمدة لـ z_2 : $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_2 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$ نستنتج $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

$$z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) : \text{اذن}$$

$$z_3 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15} (*)$$

$$|z_3| = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{15})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_3 = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} : \text{لتكن } \theta_3 \text{ عمدة لـ } z_3$$

$$z_3 = 2\sqrt{5} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) : \text{اذن}$$

$$z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} (*)$$

$$|z_4| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta_4 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_4 = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} : \text{لتكن } \theta_4 \text{ عمدة لـ } z_4$$

$$z_4 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) : \text{اذن}$$

$$z = (1-i)^2 (*)$$

$$z_5 = 1-i : \text{نضع}$$

$$|z_5| = \left[\sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \right] = \sqrt{2}$$

$$\theta_5 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} : \text{لتكن } \theta_5 \text{ عمدة لـ } z_5$$

$$z_5 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) : \text{اذن}$$

$$\text{لدينا : } z = (z_5)^2 \text{ وبالتالي نجد :}$$

$$z = (\sqrt{2})^2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^2$$

$$z = 2 \left(\cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{باستخدام دستور موافر}$$

$$z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} (*)$$

$$|z| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right) = \text{Arg}(1-i\sqrt{3}) - \text{Arg}(1+i)$$

$$|1-i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{لتكن } \theta_6 \text{ عمدة لـ } 1-i\sqrt{3}$$

$$\theta_6 = -\frac{\pi}{3} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_6 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{وما سبق نجد: } \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

اذن:

$$\text{Arg}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right) = \text{Arg}(1-i\sqrt{3}) - \text{Arg}(1+i)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right) \quad \text{اذن:}$$

$$z = (1+i)(\sqrt{3}+i) \quad (*)$$

$$|z| = |(1+i)(\sqrt{3}+i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}+i| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(1+i)(\sqrt{3}+i) = \text{Arg}(1+i) + \text{Arg}(\sqrt{3}+i)$$

$$|\sqrt{3}+i| = 2 \quad \text{لتكن } \theta_7 \text{ عمدة لـ } \sqrt{3}+i$$

$$\theta_7 = \frac{\pi}{6} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_7 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_7 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{وما سبق نجد: } \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

اذن:

$$\text{Arg}(1+i)(\sqrt{3}+i) = \text{Arg}(1+i) + \text{Arg}(\sqrt{3}+i)$$

$$\text{Arg}(1+i)(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) \quad \text{اذن:}$$

$$z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}} \quad (*)$$

$$|z| = \left| \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} \right| = \frac{|\sqrt{3} + i|^9}{|1 + i|^{12}} = \frac{2^9}{(\sqrt{2})^{12}} = \frac{2^9}{((\sqrt{2})^2)^6} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3 = 8$$

$$\text{Arg} \left(\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} \right) = \text{Arg}(\sqrt{3} + i)^9 - \text{Arg}(1 + i)^{12}$$

$$\text{Arg} \left(\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} \right) = 9 \text{Arg}(\sqrt{3} + i) - 12 \text{Arg}(1 + i)$$

$$\text{Arg} \left(\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} \right) = 9 \left(\frac{\pi}{6} \right) - 12 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{2} - 3\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

$$z = 8 \left(\cos \left(\frac{-3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-3\pi}{2} \right) \right)$$

XI. أ) كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري $Z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}}$

$$Z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(4 + 4i)(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{4 + i4\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{4 - 4\sqrt{3} + i(4 + 4\sqrt{3})}{4}$$

$$Z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$$

ب) كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

$$|z| = \frac{|4 + 4i|}{|1 - i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{4^2 + (4)^2}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Arg} \left(\frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \right) = \text{Arg}(4 + 4i) - \text{Arg}(1 - i\sqrt{3})$$

$$|1 - i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{لكن } \theta_6 \text{ عمدة لـ } 1 - i\sqrt{3}$$

$$\theta_6 = -\frac{\pi}{3} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_6 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Arg}(4 + 4i) = \text{Arg}4(1 + i) = \frac{\pi}{4} \quad \text{ومما سبق نجد :}$$

اذن :

$$\text{Arg} \left(\frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \right) = \text{Arg}(4 + 4i) - \text{Arg}(1 - i\sqrt{3})$$

$$\text{Arg} \left(\frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right) \quad \text{اذن :}$$

(ج) كتابة على الشكل المثلثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\bar{Z}$.

(*)

$$\frac{1}{Z} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{7\pi}{12} \right]$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

(*)

$$Z^{2009} = \left[(2\sqrt{2})^{2009}; 2009 \times \frac{7\pi}{12} \right]$$

$$\frac{1}{Z} = (2\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\left(\frac{24108\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{24108\pi}{12}\right) \right)$$

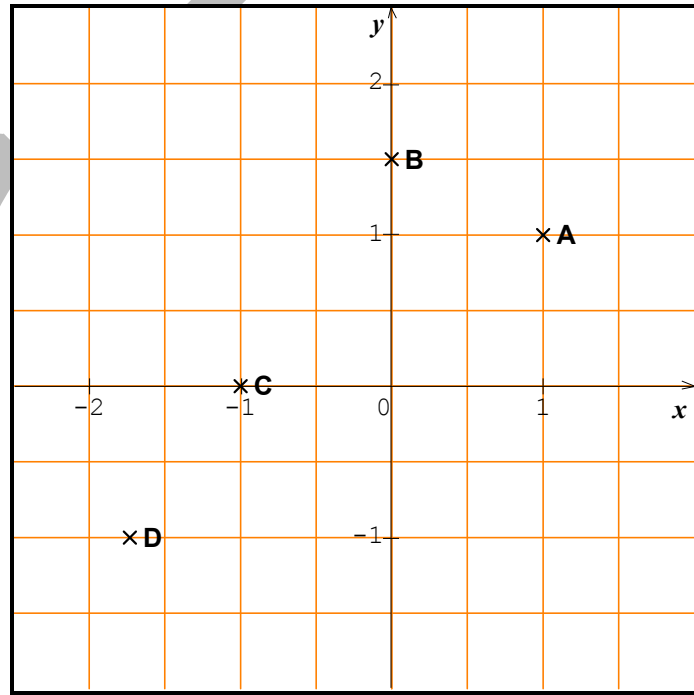
(*)

$$\bar{Z} = \left[2\sqrt{2}; -\frac{7\pi}{12} \right]$$

$$\bar{Z} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

XII. (أ) أنشاء في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقاط A ، B ، C و D صور على الترتيب للأعداد المركبة التالية :

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} , \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} , e^{i\pi} \text{ و } 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$



(2) كتابة على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$:

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

(*)

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

(*)

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$$

(*)

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}(-1 + i \times 0)$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = -\frac{1}{2}$$

(*)

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 3i$$

(3) كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$$z_4 = -1 ; z_3 = \frac{5}{4}i ; z_2 = 3\sqrt{3} - 3i ; z_1 = 2 - 2i$$

$$z_1 = 2 - 2i \quad (*)$$

$$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ نستنتج } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ لتكن } \theta_1 \text{ عمدة لـ } z_1 :$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ اذن :}$$

$$z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \quad (*)$$

$$|z_2| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{6} \text{ نستنتج } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ لتكن } \theta_2 \text{ عمدة لـ } z_2 :$$

$$z_1 = 6e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ اذن :}$$

$$z_3 = \frac{5}{4}i \quad (*)$$

$$z_3 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_4 = -1 \quad (*)$$

$$z_4 = e^{i\pi}$$

4) تعين شكلا أسياً لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_4 = -\frac{1}{2}e^{i\pi} ; z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} ; z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}} ; z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}} \quad (*)$$

$$z_1 = -1 \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{13\pi}{12}} \text{ اذن } -1 = e^{i\pi}$$

$$z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}} \quad (*)$$

$$z_2 = -3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$z_2 = 3 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$z_2 = 3 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$z_2 = 3 \left(\cos\frac{9\pi}{8} + i \sin\frac{9\pi}{8} \right)$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

$$z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (*)$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(-1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \right) = \sqrt{2} \left(e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{بما أن } -1 = e^{i\pi} \text{ إذن}$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} e^{i\pi} \quad (*)$$

$$z_4 = \frac{1}{2} (-1 \times e^{-i\pi}) = \frac{1}{2} (e^{i\pi} \times e^{-i\pi}) = \frac{1}{2} e^{i0} \quad \text{بما أن } -1 = e^{i\pi} \text{ إذن}$$

XIII. حل في مجموعة الأعداد المركبة كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

$$أ - z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4(64) = -64 = (8i)^2 \quad \text{حساب المميز :}$$

$$z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i \quad , \quad z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$ب - z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$$

حساب المميز :

$$\Delta = 4(1 + \sqrt{2})^2 - 8(\sqrt{2} + 2) = 4(1 + 2 + 2\sqrt{2}) - 8\sqrt{2} - 16 = -4 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{2(1 + \sqrt{2}) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} + i \quad , \quad z_1 = \frac{2(1 + \sqrt{2}) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} - i$$

$$ج - z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \quad \text{حيث } \theta \text{ عدد حقيقي .}$$

حساب المميز :

$$\Delta = 4(\cos \theta)^2 - 4 = 4(\cos^2 \theta - 1) = 4(-\sin^2 \theta) = (2i \sin \theta)^2$$

$$z_2 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta + i \sin \theta \quad , \quad z_1 = \frac{2 \cos \theta - 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$د - z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0 \quad \text{حيث } \theta \text{ عدد حقيقي .}$$

حساب المميز :

$$\Delta = 4(\sin \theta)^2 - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = 4(-\cos^2 \theta) = (2i \cos \theta)^2$$

$$z_2 = \frac{2 \sin \theta + 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta + i \cos \theta \quad , \quad z_1 = \frac{2 \sin \theta - 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta - i \cos \theta$$

XIV. (1) الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \quad (*)$$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{لتكن } \theta_1 \text{ عمدة لـ } z_1 :$$

$$\text{إذن : } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$z_2 = 1 - i \quad (*)$$

$$|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{لتكن } \theta_2 \text{ عمدة لـ } z_2 : \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

نستنتج $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$

$$\text{اذن : } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} \quad (*)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{اذن : } z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

(2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{z_1}{z_2}$ و $z_2 = 1 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}{1-i} = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3) استنتاج أن : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

بالمطابقة الشكل الجبري مع المثلي للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$ نجد :

$$\cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ و } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

XV. (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة، كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ ؛

$$\cdot z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(5) = -16 = (4i)^2 \quad \text{حساب المميز :}$$

$$z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \quad , \quad z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0 \quad (*)$$

حساب المميز :

$$\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 4(5+2\sqrt{3}) = 4(1+3+2\sqrt{3}) - 20 - 8\sqrt{3} = -4 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{2(1+\sqrt{3})+2i}{2} = 1+\sqrt{3}+i \quad , \quad z_1 = \frac{2(1+\sqrt{3})-2i}{2} = 1+\sqrt{3}-i$$

أ - طبيعة المثلث ABC :

نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ،

$1-2i$ و

$1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب

$$AB = |Z_B - Z_A| = |1+\sqrt{3}+i - 1-2i| = |\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |1-2i - 1-2i| = |-4i| = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

$$CB = |Z_B - Z_C| = |1+\sqrt{3}+i - 1-\sqrt{3}+i| = |2i| = \sqrt{(2)^2} = 2$$

بما أن : $AB^2 + CB^2 = AC^2$ فإن المثلث ABC مثلث قائم في B حسب مبرهنة

فيثاغورس

ب) كتابة معادلة للدائرة $\mathcal{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \quad \text{يعني} \quad M(x; y) \in \mathcal{C}$$

$$\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} 1-x \\ -2-y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \quad \text{يعني} : (1-x)(1-x) + (2-y)(-2-y) = 0$$

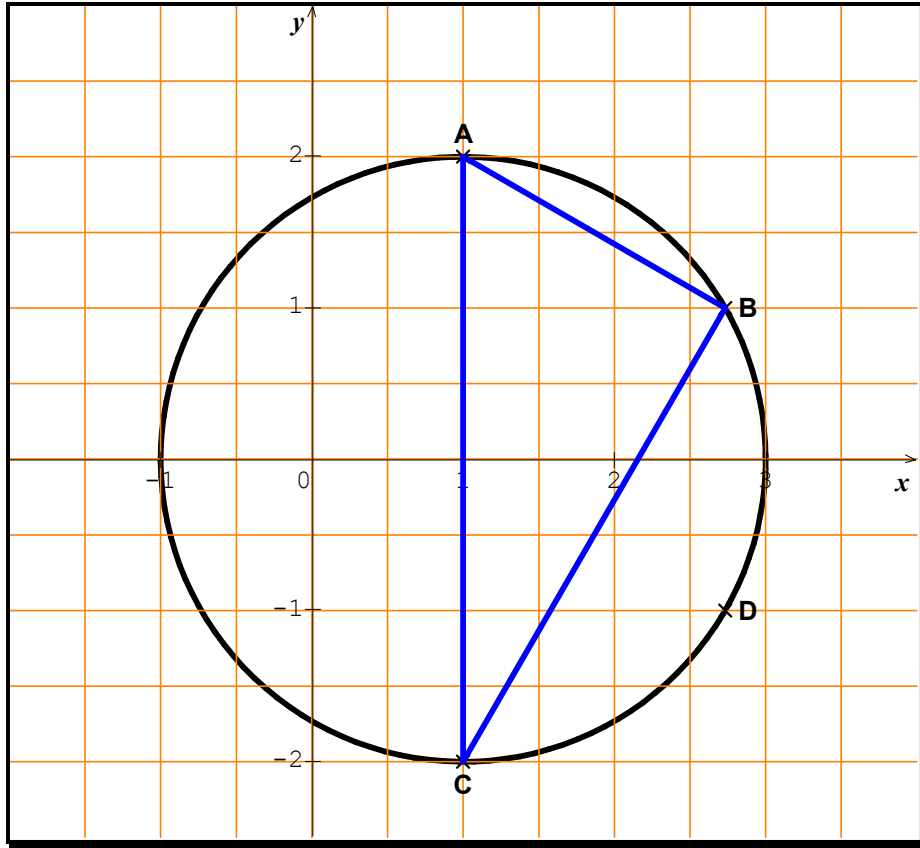
$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{يعني} \quad 1-x-x+x^2 - 4-2y+2y+y^2 = 0$$

ج - أثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

$$(1+\sqrt{3})^2 + (-1)^2 - 2(1+\sqrt{3}) - 3 = 1+3+2\sqrt{3}+1-2-2\sqrt{3}-3 = 0$$

اذن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

د - أنشاء $\mathcal{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .



XVI. (1) تعطى النقط A ، B و C ، لواحقتها على الترتيب : $a = -2 + 3i$ ؛ $b = -3 - i$ و $c = 2,08 + 1,98i$.

$$AB = |b - a| = |-3 - i + 2 - i| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = |c - a| = |2,08 + 1,89i + 2 - 3i| = |4,08 - 1,11i| = \sqrt{(4,08)^2 + (-1,11)^2} = \sqrt{17,8785}$$

$$CB = |b - c| = |-3 - i - 2,08 - 1,98i| = |-5,08 - 2,98i| = \sqrt{(-5,08)^2 + (-2,98)^2} = \sqrt{34,6868}$$

✓ إذن لا قائم ولا متساوي الساقين .

(2) لكل عدد مركب $z \neq -2$ نرفق العدد المركب z' حيث :

$$z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$$

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'| = 1$ هي :

من أجل كل عدد مركب $z \neq -2$: $|z'| = 1$ يعني $\left| \frac{z - 4i}{z + 2} \right| = 1$ يعني $\frac{|z - 4i|}{|z + 2|} = 1$ يعني

$$|z - 4i| = |z + 2|$$

يعني $AM = BM$ حيث : $A(4i)$ و $B(-2)$

✓ إذن : مجموعة النقط هي مستقيم باستثناء نقطة $B(-2)$.

(3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :

نكتب على الشكل الجبري

$$z = x + iy$$

من أجل كل عدد مركب $z \neq -2$:

$$Z' = \frac{z-4i}{z+2} = \frac{(x+iy-4i)}{x+iy+2}$$

$$Z' = \frac{(x+iy-4i)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2+2x-ixy+ixy+i2y+y^2-4ix-8i-4y}{(x+2)^2+y^2}$$

$$Z' = \frac{x^2+y^2+2x-4y}{(x+2)^2+y^2} + i \frac{-4x+2y-8}{(x+2)^2+y^2}$$

Z' حقيقي يعني $\frac{-4x+2y-8}{(x+2)^2+y^2} = 0$ يعني $-4x+2y-8=0$ حيث $x \neq -2$ و $y \neq 0$.

✓ اذن : مجموعة النقط هي مستقيم باستثناء نقطة $B(-2)$.

XVII. في كل حالة من الحالات التالية تمثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

$$A - Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$$

$Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$ يعني أن iz تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب أو بمعنى آخر

بوضع $z = x+iy$ نجد : $iz = i(x+iy) = -y+ix$ $Re(iz) = 0$ و $Im(iz) \leq 0$.
اذن : $Re(iz) = 0$ و $Im(iz) \leq 0$ يعني $-y = 0$ و $x \leq 0$ يعني $y = 0$ و $x \leq 0$

وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[Ox')$

$$B - Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

نعلم ان $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد المركب $(z+1)$ وبالتالي نجد :

$$Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ يعني}$$

$Argz - Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (باستخدام الخواص) يعني $Argz - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ علما أن

$$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \text{ يعني } Argz = \frac{\pi}{2} \text{ يعني } Re(z) = 0 \text{ و } Im(z) \geq 0$$

بوضع $z = x+iy$ اذن : $Re(z) = 0$ و $Im(z) \geq 0$ يعني $x = 0$ و

$$y \geq 0$$

وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[Oy)$

$$C - Arg(z) = Arg(\bar{z})$$

$Argz = Arg(\bar{z})$ يعني $Argz = -Argz$ (علما أن $Arg\bar{z} = -Argz$) يعني

$$2Argz = 0$$

يعني $Argz = 0$ يعني z حقيقي موجب يعني $Re(z) \geq 0$ و

$Im(z) = 0$ يعني $x \geq 0$ و

وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[0, \infty)$

ملاحظة : هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين

XVIII. (1) الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
التبرير :

$$z^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} \right)^2$$

$$z^2 = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

(2) العدد المركب z^2 يكتب على الشكل الأسّي : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{لتكن } \theta_1 \text{ عمدة لـ } z^2 : \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ نستنتج } \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن :}$$

(3) العدد المركب z يكتب على الشكل الأسّي : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

$$|z| = 2 \text{ يعني } |z|^2 = 2^2 \text{ يعني } |z^2| = 4$$

$$Arg(z^2) = 2Arg(z) \text{ وبالتالي } Arg(z) = \frac{1}{2}Arg(z^2)$$

$$\text{إذن : } Arg(z) = \frac{1}{2}Arg(z^2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}$$

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2e^{i(\pi - \frac{\pi}{8})} \text{ وعليه :}$$

XIX. (1) كتابة c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

$$c = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, b = e^{i\frac{\pi}{3}}, a = 1$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و}$$

$$c = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} (*)$$

$$|c| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{نستنتج} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{لتكن } \theta \text{ عمدة لـ } c:$$

$$c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{اذن}$$

(*)

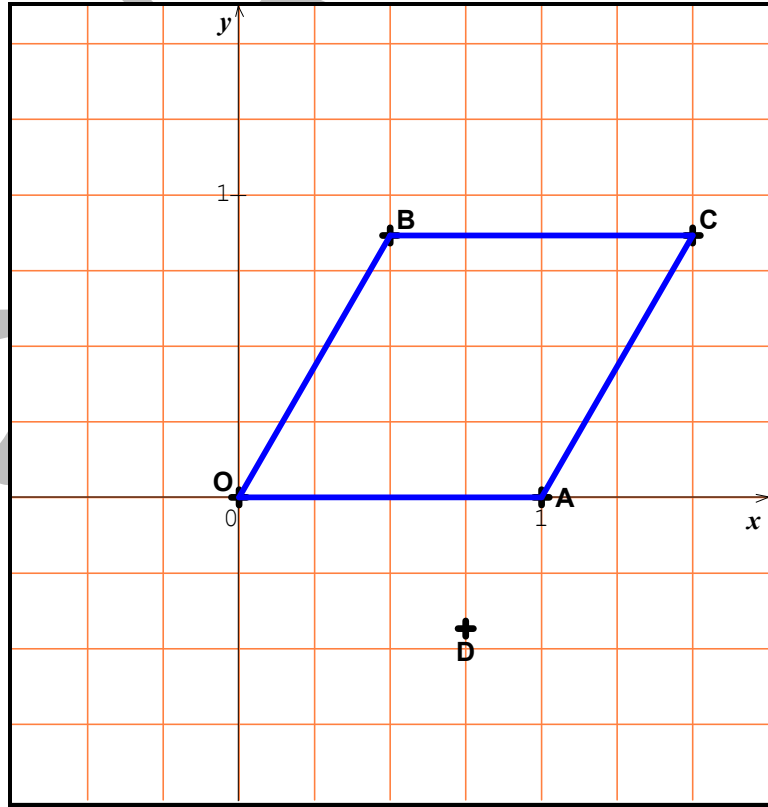
$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$$

$$d = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2) نمثل النقط A, B, C, D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .



نحسب الأطوال :

$$OA = |a| = 1 \quad (*)$$

$$OB = |b| = 1 \quad (*)$$

$$AC = |c - a| = \left| \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \quad (*)$$

$$BC = |c - b| = \left| \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{2}{2} \right| = 1 \quad (*)$$

اذن الرباعي $OACB$ هو معين .

XX. كتابة $z_1^2 - z_2^2$ على شكله المثلثي .

$$z_1^2 - z_2^2 = (2 + 3i)^2 - (2 + i)^2 = 4 - 9 + 12i - 4 + 1 - 4i = -8 + 8i = 8(-1 + i)$$

$$z_1^2 - z_2^2 = 8\sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

(2) كتابة العدد المركب $\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}} \right)^{2008}$ على شكله الجبري.

$$\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}} \right)^{2008} = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^{2008} = \cos \frac{2008 \times 3\pi}{4} + i \sin \frac{2008 \times 3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}} \right)^{2008} = \cos 1506\pi + i \sin 1506\pi = \cos 2 \times 753\pi + i \sin 2 \times 753\pi = 1$$

(باستعمال دستور موافر)

XXII. كتابة z على الشكل الجبري ثم استنتاج الطويلة وعمدة له .

$$z = \frac{(1 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i - 6i + 3}{4 + 1} = 1 - i$$

$$Argz = Arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \text{ و } |z| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

(2) نعين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^n$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \right)$$

يكون z^n عددا حقيقيا اذا فقط اكان $\text{Im}(z) = 0$ يعني $\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = 0$ يعني

$$-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \text{ يعني } \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \text{ يعني } \left(\frac{n\pi}{4}\right) = k\pi \text{ (مع } k \text{ عدد صحيح نسبي) يعني}$$

$$n = 4k \text{ (مع } k \text{ عدد طبيعي)}$$