

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

الدوال الأسية
واللوغاريتمية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

النهايات
الشبهية

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

النهايات

→ نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) و $x \mapsto \sqrt{x}$ ومقلوباتها:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
إذا كان n عددا فرديا فإن:	إذا كان n عددا زوجيا فإن:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

→ نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة	نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة
--	--

→ نهايات الدوال المثلثية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	---

→ نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$	←	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
$\sqrt{\ell}$		$\ell \geq 0$
$+\infty$		$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

→ النهايات و الترتيب:

$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$	$\left. \begin{array}{l} f(x) - \ell \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

→ العمليات على النهايات:

→ نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

→ نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

→ نهاية خارج دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

ملاحظة عامة

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الدوال اللوغارتمية

الدالة اللوغارتم النبري:

تعريف:

دالة اللوغارتم النبري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم في 1 ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخصائص:

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
$\ln xy = \ln x + \ln y$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$	$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
$\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$		$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$	$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$		

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0; +\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

استنتاجات:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = +\infty$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = -\infty$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$	

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

➔ الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$

إذا كانت u موجبة قطعاً و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

➔ الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

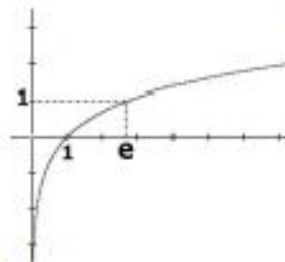
ولدينا: $\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

➔ إشارة $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-		+



➔ التمثيل المسماني:

➔ الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

➔ تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$

حيث: $\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

حالة خاصة: الدالة $\log_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: $\ell \log$

➔ استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $(r \in \mathbb{Q}) \log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

➔ نهايات و متراجحات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

➔ المشتقة:

$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

الاتصال في نقطة:

تعريف

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار:

$$f \text{ متصلة على يمين } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصلة على يسار } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow f \text{ متصلة على يمين و على يسار } x_0$$

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a, b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a, b[$

تكون f متصلة على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

• الدوال $f + g$, $f \times g$, kf متصلة على المجال I

• إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I		f(I)
f تناقصية قطعاً على I		f تزايدية قطعاً على I
$[f(b); f(a)]$		$[f(a); f(b)]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$		$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$		$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$
$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$		$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
		$\mathbb{R}$

مبرهنة القيم الوسطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(\alpha) = \beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

طريقة التفرع الثاني:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$

وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

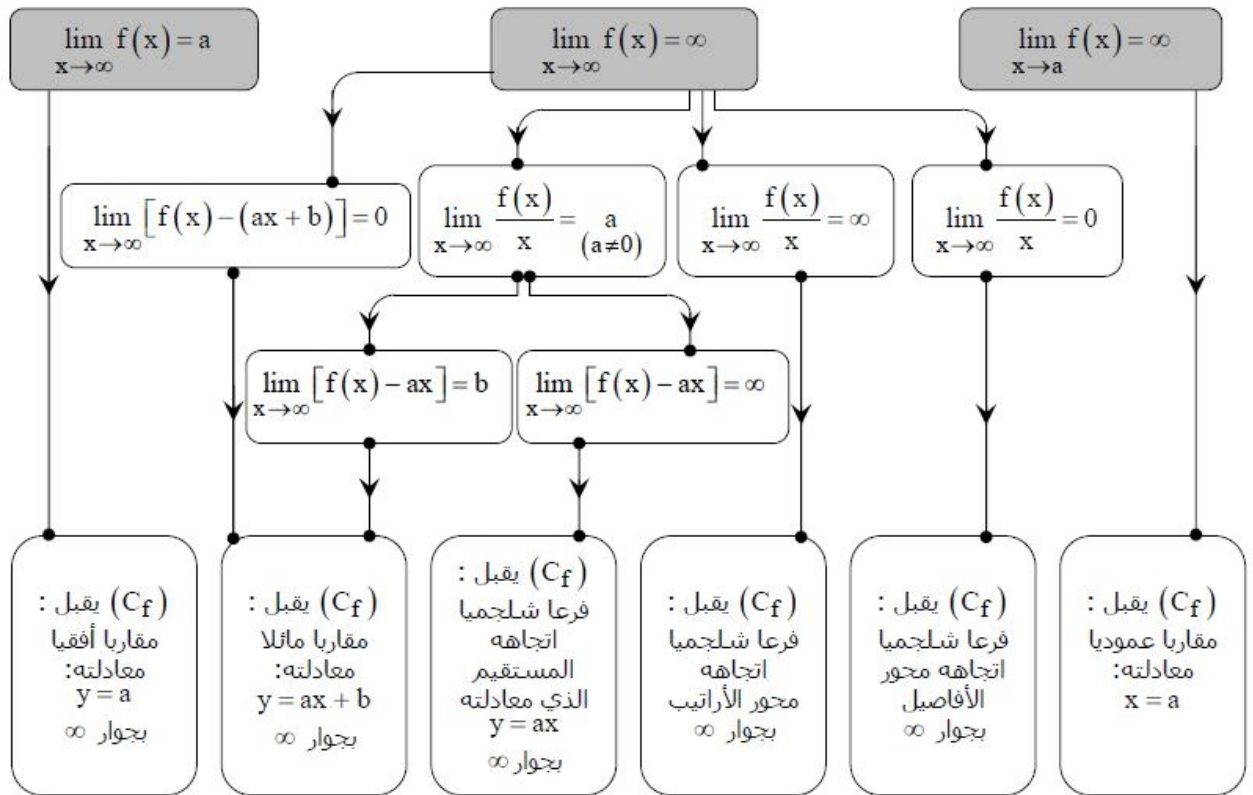
$$\text{إذا كان: } f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

فإن: $\frac{b-a}{2} < \alpha < b$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$
للحصول على تأطير أدق للعدد α

$$\text{إذا كان: } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

فإن: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$
للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك. يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها



الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1\}$

الكثابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكثابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\text{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\text{Im}(z)$

حالتان خاصتان: إذا كان: $\text{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان: $\text{Re}(z) = 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

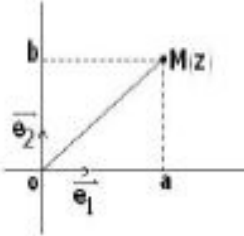
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ و } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$$

التمثيل المبراني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

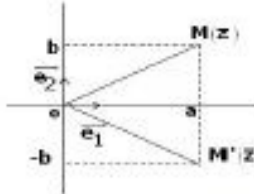
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a, b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M والنقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\vec{OM}$ و نكتب: $\vec{OM}(z)$ أو $z = \text{Aff}(\vec{OM})$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\bar{z} = a - ib$



$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

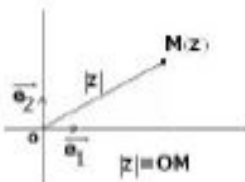
- $z \Leftrightarrow \bar{\bar{z}} = z$ عدد حقيقي
- $z \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ عدد تخيلي صرف
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
- $z\bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $(n \in \mathbb{N}^*) \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
- $(z' \neq 0) \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

معيار عدد عقدي:

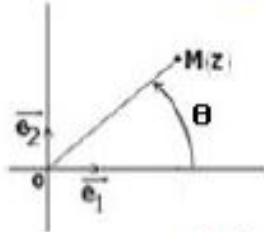
ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |z| |z'| & |z^n| &= |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ |\bar{z}| &= |z| & |-z| &= |z| \\ \left| \frac{1}{z'} \right| &= \frac{1}{|z'|} & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \end{aligned}$$

الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:



ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M
عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $(\vec{e}_1, \vec{OM})$
و نرسم له بالرمز: $\arg z$
ونكتب: $\arg z = \theta [2\pi]$

حالات خاصة:
الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a < 0$	$a > 0$
$a = [-a, \pi]$	$a = [a, 0]$
$ai = [-a, -\frac{\pi}{2}]$	$ai = [a, \frac{\pi}{2}]$

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta [2\pi]$

الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$$

الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} &= rr'e^{i(\theta+\theta')} \\ \overline{re^{i\theta}} &= re^{-i\theta} \\ -re^{i\theta} &= re^{i(\pi+\theta)} \\ (re^{i\theta})^n &= r^n e^{in\theta} \\ \frac{1}{r'e^{i\theta'}} &= \frac{1}{r'} e^{-i\theta'} \\ \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} &= \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r, \theta] \times [r', \theta'] &= [rr', \theta + \theta'] \\ \overline{[r, \theta]} &= [r, -\theta] \\ -[r, \theta] &= [r, \pi + \theta] \\ [r, \theta]^n &= [r^n, n\theta] \\ \frac{1}{[r', \theta']} &= \left[\frac{1}{r'}, -\theta' \right] \\ \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} &= \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(zz') &= (\arg z + \arg z') [2\pi] \\ \arg \bar{z} &= -\arg z [2\pi] \\ -\arg z &= (\pi + \arg z) [2\pi] \\ \arg z^n &= n \arg z [2\pi] \\ \arg \frac{1}{z} &= -\arg z [2\pi] \\ \arg \frac{z}{z'} &= (\arg z - \arg z') [2\pi] \end{aligned}$$

$$z \Leftrightarrow \arg z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$$

صفتا أولي:

صفة موافق:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(\cos \theta + i \sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$:

مجموعة حلول المعادلة	المعادلة
$S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$	$a > 0$
$S = \{0\}$	$a = 0$
$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$	$a < 0$

حل المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ حيث $z \in \mathbb{C}$ و a, b, c أعداد حقيقية ($a \neq 0$)

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)	$\Delta > 0$ $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$ $S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB = z_B - z_A $
I منتصف القطعة [A; B]	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
قياس الزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$	$(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمة	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$ z - z_A = r$ ($r > 0$)	• $AM = r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$ z - z_A = z - z_B $	• $AM = BM$ • M تنتمي إلى واسط [AB]
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل:	التمثيل العقدي:
الإزاحة: t_u	$z' = z + b$ حيث b لحق المتجهة tl
التحاكي: $h(\Omega; k)$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران: $r(\Omega; \theta)$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω

التعداد

← رئيسي مجموعة:

→ تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $\text{Card}E$

حالة خاصة: $\text{Card}\emptyset = 0$

→ خاصة:

A و B مجموعتان منتهيتان

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

← متمم مجموعة:

→ تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E
متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\bar{A}$
حيث $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

→ ملاحظات:

$$\begin{aligned} A \cap \bar{A} &= \emptyset \\ A \cup \bar{A} &= E \\ \text{card}\bar{A} &= \text{card}E - \text{card}A \end{aligned}$$

← المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا ($p \in \mathbb{N}^*$)
إذا كان الاختيار الأول يتم بـ n_1 كيفية مختلفة
و كان الاختيار الثاني يتم بـ n_2 كيفية مختلفة
.....
و كان الاختيار p يتم بـ n_p كيفية مختلفة
فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

← الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون تكرار:

→ الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

عدد الترتيبات بتكرار لـ p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

الترتيبات بدون تكرار:

خاصة:

ليكن n و p عنصرين من N^* ($p \leq n$)
 عدد الترتيبات بدون تكرار لـ p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ من العوامل}}$$

حالة خاصة:

كل ترتيبية بدون تكرار لـ n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة لـ n عنصر
 و عددها: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n
 كل جزء A من E عدد عناصره p ($p \leq n$)
 يسمى تأليفة لـ p عنصر من بين n عنصر
 و عدد هذه التأليفات هو: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p :

$n \in N^*$		$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$	
		$0! = 1$	
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

عدد إمكانيات ترتيب n عنصر:

إذا كان لدينا n عنصر من بينها
 n_1 عنصر من النوع A
 n_2 عنصر من النوع B
 n_3 عنصر من النوع C
 فإن إمكانيات ترتيب هذه العناصر هو: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$ ($n_1 + n_2 + n_3 = n$)

بعض أنواع السحب:

نحسب p عنصر من بين n عنصر ($p \leq n$) و نلخص النتائج في الجدول التالي:

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة هو:	الترتيب
أني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'(x_0)$

معادل المماس لمنحنى دالة- الدالة التآلفية المماسية لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0
 ➔ معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 ➔ الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 تسمى الدالة التآلفية المماسية لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 وهي تقريب للدالة f بجوار x_0

قابلية الاشتقاق على اليمين- قابلية الاشتقاق على اليمين:

➔ نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين x_0 ويرمز له بالرمز: $f'_d(x_0)$
 ➔ نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 ويرمز له بالرمز: $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و
 $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

العمليات على الدوال المشتقة:

$(k \in \mathbb{R}) \quad (ku)' = k(u)'$	$(u - v)' = u' - v'$	$(u + v)' = u' + v'$
$(u^n)' = nu' u^{n-1}$	$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	

مشتقة مركب دالتين- مشتقة دالة الجذر:

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$
--------------------------------------	---

الاشتقاق و تغيرات دالة:

تكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
f تزايدية على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ →
f تناقصية على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ →
f ثابتة على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$ →

الاشتقاق و التأويل الهندسي:

التأويل الهندسي المنحني (Cf) يقبل:	استنتاج	النهاية
مماسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل الموجه هو a	f قابلة للاشتقاق في x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$
مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$: معامل الموجه لحامله هو a	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$
نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$: معامل الموجه لحامله هو a	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$
نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

المعادلة التفاضلية	الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ ($a \in \mathbb{R}$)

المعادلة التفاضلية	معادلتها المميزة	المعادلة المميزة تقبل :	الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ ($\Delta = a^2 - 4b$)	$\Delta > 0$ حليين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$ حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$ حليين عقديين مترافقين: $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوباً إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

↪ الصيغة التحليلية ل: الحداء السلمي- منظم متجهة- الحداء المتجهي:

لتكن $\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ متجهتين من $\mathcal{O}_3$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$

↪ المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

المسافة بين نقطة M و مستوى (P) معادلته الديكارتية: $ax + by + cz + d = 0$ هي:

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

المسافة بين نقطة M و مستقيم $\Delta(A, \vec{u})$ هي:

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

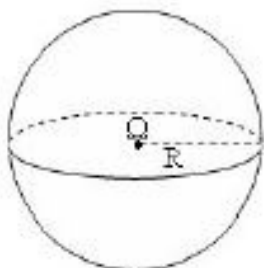
↪ معادلة مستوى:

$\vec{n}(a, b, c) \Leftrightarrow (P): ax + by + cz + d = 0$

إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمة فإن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) و في هذه الحالة يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي:

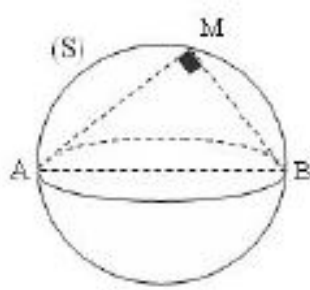
$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

↪ معادلة فلكة:



معادلة فلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ و شعاعها R هي:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



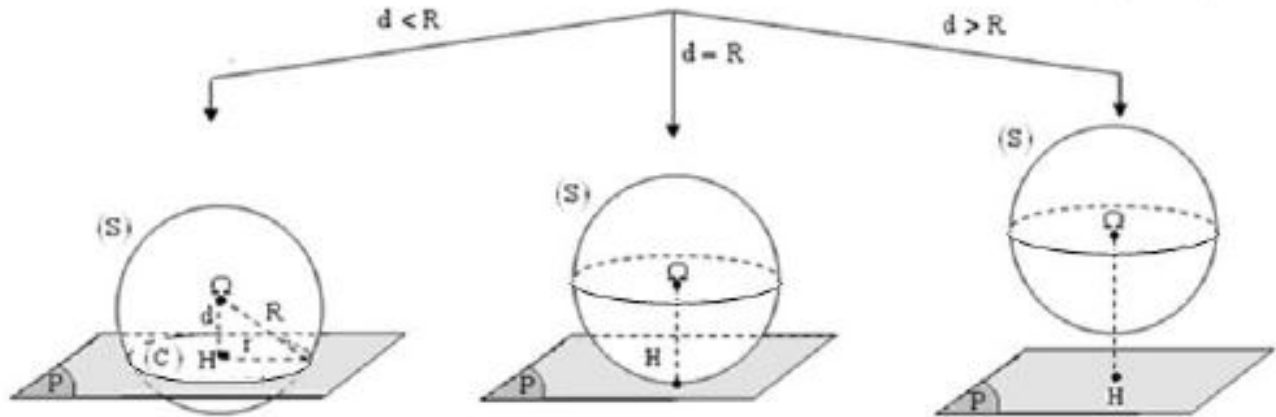
معادلة فلكة (S) أحد أقطارها [AB] يمكن تحديدها
بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

ملاحظة: الفلكة (S) مركزها Ω منتصف [AB] و شعاعها $\frac{AB}{2}$

↪ تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى $(P): ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega; (P))$



المستوى (P) يتقطع
الفلكة (S) وفق دائرة (C)
مركزها: H
شعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

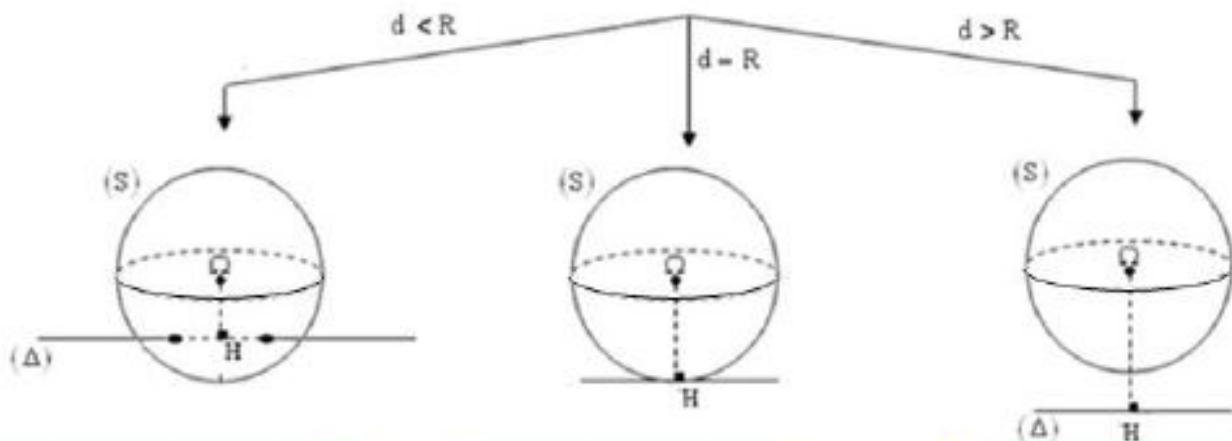
المستوى (P) مماس
للفلكة (S)
في النقطة H

المستوى (P)
لا يتقطع الفلكة (S)

↪ تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستقيم (Δ)

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta))$



المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S)
في نقطتين مختلفتين

المستقيم (Δ) مماس
للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) و الفلكة (S)
لا يتقاطعان

الدوال الأسية

الدالة الأسية النبرية

تعريف:

الدالة $x \mapsto e^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\ln$ و تسمى الدالة الأسية النبرية

استنتاجات وخصائص:

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
$e^x \times e^y = e^{x+y}$	$\ln e^x = x$
$(e^x)^r = e^{rx}$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad e^{\ln x} = x$
$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
	$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

مجموعة التعريف:

مجموعة تعريفها	الدالة f معرفة كما يلي
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$	$f(x) = e^{u(x)}$

النهايات:

استنتاجات:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = +\infty$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

نهايات أساسية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

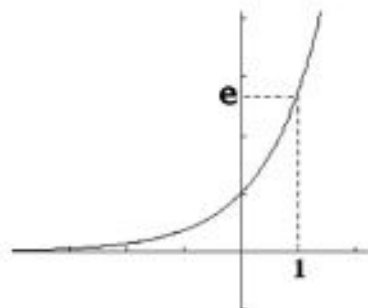
الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذا كانت دالة لا متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

➔ الاشتقاق

إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن
الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I
ولدينا: $\forall x \in I \quad (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
ولدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$

➔ التمثيل المسماني:



➔ الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

➔ تعريف:

الدالة $x \mapsto a^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ و تسمى الدالة الأسية للأساس a

➔ استنتاجات و خاصيات:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad (a^x)^r = a^{rx}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^x) = x$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\log_a x} = x$
	$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

➔ نهايات و متراجحات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

➔ المشتقة:

$$(a^x)' = (\ln a) \times a^x$$

متطابقات هامة مجموعة تعريف دالة عددية

متطابقات هامة.

لكل عددين حقيقيين a و b

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

مجموعة تعريف الدالة f	f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = P(x)$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{P(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ و } Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ و } Q(x) \neq 0\right\}$	$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

التكامل

تكمامل دالة متصلة على قطعة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a, b]$
تكمامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

خاصيات:

الخطانة:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

التكامل و الترتيب:

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{إذا كان:} \\ \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \text{فإن:}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0 \quad \text{إذا كان:} \\ \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{فإن:}$$

القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$

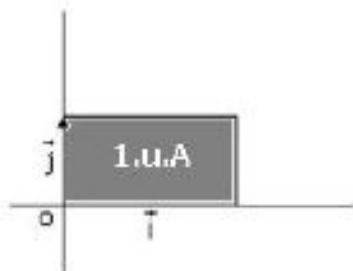
القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[a, b]$ هي العدد الحقيقي: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

المكاملة بالأجزاء:

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a, b]$ بحيث تكون f' و g' متصلتين على المجال $[a, b]$

$$\int_a^b [f'(x) \times g(x)] dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \times g'(x)] dx$$

حساب مساحة حيز:



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j})$
وحدة المساحة: $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O والمتجهين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

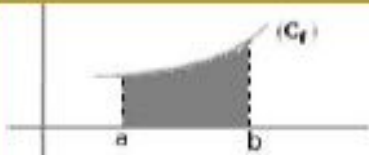
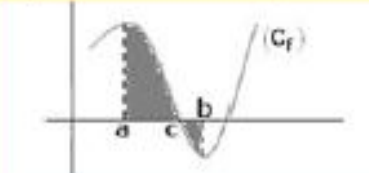
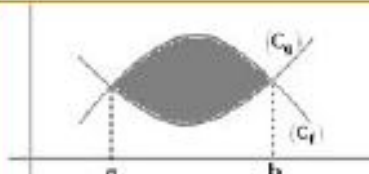
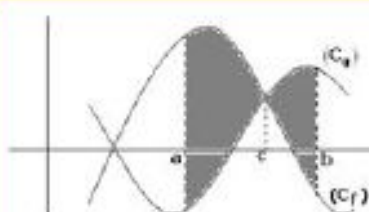
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a; b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g
ومحور الأفاسيل والمستقيمين اللذين
معادلتاهما: $x = a$ و $y = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) \cdot u \cdot A$$

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور
الأفاسيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
 $x = a$ و $y = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \cdot u \cdot A$$

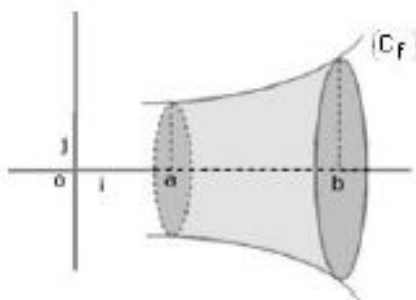
حالات خاصة:

الرسم	ملاحظات	مساحة الحيز الرمادي في الرسم
	f موجبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot u \cdot A$
	f سالبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) \cdot u \cdot A$
	• f موجبة على المجال $[a, c]$ • f سالبة على المجال $[c, b]$	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) \cdot u \cdot A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) \cdot u \cdot A$
	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a, c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c, b]$	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) \cdot u \cdot A$

حساب حجم:

حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول
محور الأفاسيل دورة كاملة في مجال $[a, b]$

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] \cdot u \cdot v \quad \text{هو:}$$



الدوال اللوغارتمية

الدالة اللوغارتم النبري:

تعريف:

دالة اللوغارتم النبري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم في 1 ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخصائص:

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0; +\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

استنتاجات:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على

الاتصال:

الدالة $\ln x \mapsto x$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$

إذا كانت u موجبة قطعاً و متصلة على مجال I فإن الدالة $\ln[u(x)] \mapsto x$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $\ln x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

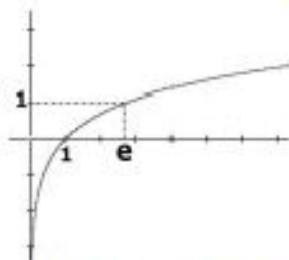
ولدينا: $\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\ln[u(x)] \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

إشارة $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	-	+



التمثيل المماسي:

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$

حيث: $\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

حالة خاصة: الدالة $\log_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: $\ell \log$

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$	$\log_a 1 = 0$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$\log_a a = 1$
$(r \in \mathbb{Q}) \log_a x^r = r \log_a x$	
$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$
$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

نظائير و متراجحات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

محور التماثل - مركز التماثل نقطة الانعطاف

محور التماثل:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$$

$$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$$

حالة خاصة: إذا كانت $a = 0$ فإن f دالة زوجية

مركز التماثل:

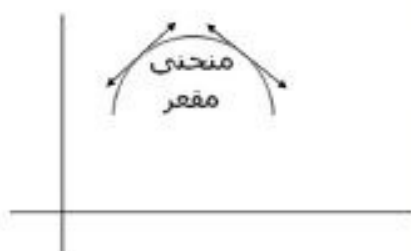
يكون النقطة $I(a, b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$$

$$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$$

حالة خاصة: إذا كانت $a = b = 0$ فإن f دالة فردية

التقعر- التحدب- نقطة الانعطاف:



يكون منحنى دالة مقعرا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$$

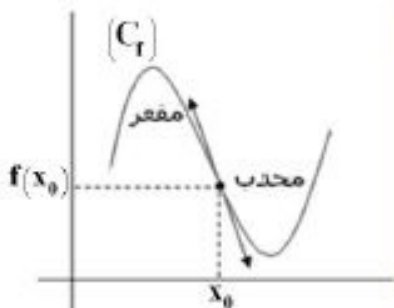
إذا كان: $f''(x) \leq 0$ فإن: (C_f) مقعر على المجال I



يكون منحنى دالة محدبا على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$$

إذا كان: $f''(x) \geq 0$ فإن: (C_f) محدب على المجال I



نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تقعر هذا المنحنى

إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

الدوال الأصلية

الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I
إذا تحقق الشرطان التاليان:
• F قابلة للاشتقاق على المجال I
• $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

خاصات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن:
جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي:
 $x \mapsto F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I
وليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من $\mathbb{R}$
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط البدئي:
 $F(x_0) = y_0$

الدوال الأصلية: لمجموع دالتين - لحداء دالة و عدد حقيقي:

خاصة:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عددا حقيقيا
إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على التوالي فإن:

- $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I
- kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$ x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$

استعمال صغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية:

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$
$(a \in \mathbb{R})$ $a u'(x)$	$a u(x) + k$
$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$ $u'(x) \times [u(x)]^r$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + k$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$(a \neq 0)$ $\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$(a \neq 0)$ $\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$

$(k \in \mathbb{R})$

المصطلح الاحتمالي	معناه
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانات	هي مجموعة الإمكانات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزء من كون الإمكانات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\bar{A}$ $(A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ و } A \cup \bar{A} = \Omega)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \emptyset$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

- ليكن Ω كون إمكانات تجربة عشوائية
- عندما يستقر احتمال حدث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو: p_i ونكتب: $P(\{\omega_i\}) = p_i$
 - احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث
 - أي إذا كان $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو: $p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots + p(\omega_n)$

خاصات:

- ليكن Ω كون إمكانات تجربة عشوائية
- $p(\Omega) = 1$ و $p(\emptyset) = 0$
 - $0 \leq p(A) \leq 1$ لكل حدث A من Ω
 - احتمال اتحاد حدثين: لكل حدثين A و B من Ω $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 - احتمال الحدث المضاد: لكل حدث A من Ω هو: $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

فرضة تساوي الاحتمالات:

تعريف:

- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω فإن احتمال كل حدث A من Ω هو: $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

الاحتمال الشرطي- استقلالية حدثين:

تعريف:

- ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \neq 0$
- احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \times p(B) \neq 0$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p\left(\frac{B}{A}\right) = p(B) \times p\left(\frac{A}{B}\right)$$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية
 $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ $\Leftrightarrow$ A و B حدثان مستقلان

خاصة:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزئنا لـ Ω

$$(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \text{ و } \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega)$$

لكل حدث A من Ω :

$$p(A) = p(\Omega_1) \times p\left(\frac{A}{\Omega_1}\right) + p(\Omega_2) \times p\left(\frac{A}{\Omega_2}\right)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية
 لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:

- تحديد $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1; 2; \dots; n\}$

الأمل الرياضي- المغامرة- الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه

معرف بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

تعريف:

$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$	الأمل الرياضي للمتغير X
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	المغامرة للمتغير X
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	الانحراف الطرازي للمتغير X

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية

نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A
 يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = n \times p \quad 9$$

$$V(X) = np(1 - p) \quad 9$$

دالة الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

القوى الجذرية

خاصة وتعريف:

الدالة: $x \mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\cdot}$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

حالات خاصة:

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$$

العدد: $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب لـ x

خصائص:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[n]{x^2} + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{y^2}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي:	مجموعة تعريفها:
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \geq 0\}$

النهايات:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
$\sqrt[n]{\ell}$	$\ell \geq 0$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

↪ الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

↪ الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

ولدينا:

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

ولدينا:

↪ حل المعادلة: $x^n = a$ $(a \in \mathbb{R})$ $x \in \mathbb{R}$

n عدد زوجي	n عدد فردي	
$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$a > 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$	$a = 0$
$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$	$a < 0$

↪ القوى الحذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عدداً جذرياً غير منعدم حيث: $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

ملاحظات:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = [u(x)]^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$)

هي: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$$

لكل عنصرين x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل عنصرين r و r' من $\mathbb{Q}^*$

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\left(\frac{x^r}{y^{r'}}\right) = x^{r-r'} \quad \frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$$

المتتاليات العددية

المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

لـمتتالية هندسية	لـمتتالية حسابية	تعريف
$u_{n+1} = q \times u_n$ q هو الأساس	$u_{n+1} = u_n + r$ r هو الأساس	
$u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($p \leq n$)	$u_n = u_p + (n-p)r$ ($p \leq n$)	الحد العام
$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$ ($q \neq 1$)	$u_p + \dots + u_n = (n-p+1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$	مجموع حدود متتابعة
$b^2 = a \times c$	$2b = a + c$	a و b و c ثلاثة حدود متتابعة

المتتالية المكبورة - المتتالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية	
M مكبورة بالعدد $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I, u_n \leq M$	➔
m مصغورة بالعدد $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I, u_n \geq m$	➔
$(u_n)_{n \in I}$ مكبورة و مصغورة $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ محدودة	➔

رتابة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية	
$(u_n)_{n \in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} \leq u_n$	➔
$(u_n)_{n \in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} \geq u_n$	➔
$(u_n)_{n \in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} = u_n$	➔

ملاحظة:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية حدها الأول: u_p

➔ إذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية فإن: $u_n \leq u_p \quad \forall n \in I$

➔ إذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية فإن: $u_n \geq u_p \quad \forall n \in I$

نهاية متتالية:

➔ نهاية المتتالية (n^α) حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

➔ نهاية المتتالية الهندسية (q^n) حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية (q^n) ليس لها نهاية	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغرة هي متتالية متقاربة

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

➔ متتالية من النوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $I \subset f(I)$ و a عنصرا من I

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة $f(x) = x$

إشارة حدانية إشارة و تعميل ثلاثية الحدود

↩ إشارة الحدانية: $ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a		إشارة a

↩ إشارة و تعميل ثلاثية الحدود: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

نضع: $P(x) = ax^2 + bx + c$

المميز	حل المعادلة: $x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 0$	إشارة $P(x)$	تعميل $P(x)$									
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">إشارة a</td></tr></table> غير ممكن بواسطة حدانيتين	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	إشارة a				
	x	$-\infty$	$+\infty$									
	$P(x)$	إشارة a										
$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table> $P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	إشارة a	إشارة a	إشارة a		
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$									
$P(x)$	إشارة a	إشارة a	إشارة a									
$\Delta > 0$	$S = \{x_1, x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td><td>عكس إشارة a</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table> $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a	إشارة a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$								
$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a	إشارة a								

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) $x \in \mathbb{R}$

فإن: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ و $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$