

4am

مُلَخَّصٌ

الخميس مقاطع
الأولى

$\approx$

%

€

π

Δ

من إعداد الأستاذ:
حمزة حميدي



الرياضيات

الموسم الدراسي: 2023/2022

المستوى: الرابعة متوسط

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات



المقاطع

- المقطع الأول: الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة والحساب على الجذور.
 - المقطع الثاني: خاصية طالس وحساب المثلثات في المثلث القائم.
 - المقطع الثالث: الحساب الحرفي.
 - المقطع الرابع: الأشعة والانسحاب والمعالم.
 - المقطع الخامس: جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين، الدالة الخطية، تطبيقات التناسبية، الدالة التآلفية.
- بالإضافة إلى خاصية فيثاغورس.

الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

القاسم المشترك الأكبر (pgcd)

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز $PGCD(a; b)$

خواص

a و b عدنان طبيعيين.
 $PGCD(a; a) = a$ مثال: $PGCD(7; 7) = 7$
 $PGCD(a; 0) = a$ مثال: $PGCD(3; 0) = 3$
 • إذا كان b قاسم للعدد a فإن:
 $PGCD(a; b) = b$ مثال: $PGCD(6; 2) = 2$

حساب القاسم المشترك الأكبر

الطريقة الأولى: استخراج قائمة القواسم المشتركة للعددين

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 18
 قواسم العدد 12 هي: 1، 2، 3، 4، 6 و 12
 قواسم العدد 18 هي: 1، 2، 3، 6، 9 و 18
 ومنه القواسم المشتركة للعددين 12 و 18 هي: 1، 2، 3 و 6
 إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 18 هو: 6
 $PGCD(18; 12) = 6$

الطريقة الثانية: استعمال خوارزمية الفروق المتتالية
 مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 117 و 91

$$\begin{aligned} 117 - 91 &= 26 \\ 91 - 26 &= 65 \\ 65 - 26 &= 39 \\ 39 - 26 &= 13 \\ 26 - 13 &= \boxed{13} \\ 13 - 13 &= 0 \end{aligned}$$

إذن: $PGCD(117; 91) = 13$

الطريقة الثالثة: استعمال خوارزمية إقليدس

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 528 و 468

$$\begin{aligned} 528 &= 468 \times 1 + 60 \\ 468 &= 60 \times 7 + 48 \\ 60 &= 48 \times 1 + \boxed{12} \\ 48 &= 12 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

إذن: $PGCD(528; 468) = 12$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

قواسم عدد طبيعي

a و b عدنان طبيعيين حيث $b \neq 0$.
 القول أن b قاسم للعدد a معناه يوجد عدد طبيعي q حيث: $a = b \times q$

ملاحظات:

- كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:
 • b قاسم للعدد a
 • b يقسم a
 • a يقبل القسمة على b
 • a مضاعف لـ b
- 1 قاسم لجميع الأعداد الطبيعية.
- 0 مضاعف لجميع الأعداد الطبيعية.
- كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه.

خواص قواسم عدد طبيعي

خاصية 1:

- a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.
 • إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a + b$ و $a - b$: $(a \geq b)$
 • إذا كان n يقسم a فإن n يقسم $k \times a$ حيث k عدد طبيعي.

مثال:

3 يقسم 9 ويقسم 27
 إذن 3 يقسم $9 + 27$ أي يقسم 36
 و 3 يقسم $27 - 9$ أي يقسم 18

خاصية 2:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .

مثال:

5 يقسم 90 ويقسم 25 إذن 5 يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد 90 على 25
 أي 5 يقسم 15

الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

تمرين

أراد العم أحمد تبليط غرفة مستطيلة الشكل، طولها 780cm وعرضها 450cm ببلاط مربع الشكل، اتصل العم أحمد بصاحب مصنع للبلاط فأخبره هذا الأخير أنه يوجد آلة خاصة بتقطيع البلاط إلى مربعات متقايسة حسب الحاجة.

يريد العم أحمد حساب عدد البلاط اللازم لتبليط كل الغرفة وهذا بشراء أقل عدد ممكن من البلاط.

-ساعد العم أحمد في معرفة عدد البلاط اللازم شراءه.

الحل

أ- حساب طول ضلع البلاطة الواحدة: (نحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 780 و 450)

$$780 = 450 \times 1 + 330$$

$$450 = 330 \times 1 + 120$$

$$330 = 120 \times 2 + 90$$

$$120 = 90 \times 1 + 30$$

$$30 = 30 \times 1 + 0$$

ومنه: $PGCD(780; 450) = 30$

إذن طول ضلع كل بلاطة هو: 30cm

ب- حساب عدد البلاط اللازم شراءه:

- حساب مساحة الغرفة:

$$A_1 = 780 \times 450$$

$$A_1 = 351000$$

- حساب مساحة البلاطة الواحدة:

$$A_2 = 30 \times 30$$

$$A_2 = 900$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{351000}{900} = 390 \quad \text{ومنه:}$$

إذن عدد البلاط اللازم شراءه هو: 390 بلاطة

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

العددان الأوليان فيما بينهما

العددان a و b أوليان فيما بينهما يعني أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

نكتب: $PGCD(a; b) = 1$

مثال 1:

قواسم العدد 14 هي: 1، 2، 7 و 14

قواسم العدد 15 هي: 1، 3، 5 و 15

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 14 و 15 هو: 1

$$PGCD(14; 15) = 1$$

إذن العددين 14 و 15 أوليان فيما بينهما

مثال 2:

هل العددين 120 و 725 أوليان فيما بينهما؟ دون حساب القاسم المشترك الأكبر.

العددين 120 و 725 يقبلان القسمة على 5 لأن:

● العدد 120 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 0

● العدد 725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 5

ومنه: $PGCD(120; 725) \neq 1$

إذن: العددين 120 و 725 ليسا أوليان فيما بينهما

الكسور غير القابلة للاختزال

الكسر غير القابل للاختزال هو الكسر الذي

بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما.

لكتابة كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال

نقسم بسطه ومقامه على القاسم

المشترك الأكبر لهما.

مثال 1:

الكسر $\frac{15}{14}$ غير قابل للاختزال لأن القاسم المشترك الأكبر للعددين 15 و 14 هو: 1

مثال 2:

كتابة الكسر $\frac{91}{117}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

لدينا مما سبق: $PGCD(117; 91) = 13$

$$\frac{91}{117} = \frac{91 \div 13}{117 \div 13} = \frac{7}{9} \quad \text{ومنه:}$$

$$4^2 = 16 ; 5^2 = 25 ; 6^2 = 36$$

الحساب على الجذور

$$1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9$$

$$\sqrt{22} = \sqrt{11 \times 2} = \sqrt{11} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

خاصية 2: من أجل كل عددين موجبين a و b

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{حيث } b \neq 0$$

أمثلة:

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} ; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

ملاحظة 2:

في حالة $a < 0$ و $b < 0$ فإن $\sqrt{a \times b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$ موجودين مع أن كل من $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ لا معنى لهما.

أمثلة: $\bullet \sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{36} = 6$

• $\sqrt{\frac{-32}{-2}} = \sqrt{16} = 4$

ملاحظة 3:

⊗ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} ; a > 0 ; b > 0$

⊗ $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} ; b > 0 ; a > b$

مثال: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

لأن: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

b عدد كفي.

⚡ إذا كان $b > 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$

تقبل حلين متعاكسين هما: $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.

⚡ إذا كان $b = 0$ فإن المعادلة $x^2 = 0$

تقبل حلا واحد وهو العدد 0.

⚡ إذا كان $b < 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$

لا تقبل أي حل.

facebook

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

تعريف

a عدد موجب.

الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a .

نرمز للجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$. ونقرأ: "الجذر التربيعي لـ a " أو "جذر a ".

خواص: a عدد موجب.

$$\sqrt{a^2} = a ; \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

ملاحظة:

$$(-\sqrt{a}) \times (-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^2 = a$$

أمثلة:

$$\sqrt{3^2} = 3 ; (\sqrt{7})^2 = 7 ; \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة

a عدد ناطق موجب.

• في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عددا ناطقا.

• في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ ليس عددا ناطقا.

أمثلة:

• نعلم أنه لا يوجد عدد ناطق

مربعه 6، إذن $\sqrt{6}$ عدد غير ناطق

• نعلم أنه يوجد عدد ناطق مربعه 9 وهو 3

$3^2 = 9$ ، إذن $\sqrt{9}$ عدد ناطق

$\sqrt{16}$ عدد ناطق : $\sqrt{36}$ عدد ناطق : $\sqrt{81}$ عدد ناطق

$\sqrt{7}$ عدد غير ناطق : $\sqrt{19}$ عدد غير ناطق : $\sqrt{33}$ عدد غير ناطق

العمليات على الجذور التربيعية

خاصية 1: من أجل كل عددين موجبين a و b

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

ملاحظة:

أمثلة:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$$

مثال 1:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = (8 - 3 + 1)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

مثال 2: كتابة العبارة A على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن:

$$A = 7\sqrt{50} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$$

$$A = 7\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2}$$

$$A = 7\sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{3^2 \times 2} - 4\sqrt{2^2 \times 2}$$

$$A = 35\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$

$$A = (35 + 3 - 8)\sqrt{2}$$

$$A = 30\sqrt{2}$$

مثال 3: كتابة العبارة B على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد صحيح:

$$B = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{180} - \sqrt{605}$$

$$B = 2\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{36 \times 5} - \sqrt{121 \times 5}$$

$$B = 2\sqrt{3^2 \times 5} - 3\sqrt{6^2 \times 5} - \sqrt{11^2 \times 5}$$

$$B = 6\sqrt{5} - 18\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$$

$$B = (6 - 18 - 11)\sqrt{5}$$

$$B = -23\sqrt{5}$$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

facebook

تذكير قواعد الحساب على قوة عدد نسبي

a و b عدنان غير معدومين : m و n عدنان نسبيا صحيحان

القاعدة	مثال
$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
$a^1 = a$	$6^1 = 6$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^7 \times 3^6 = 3^{7+6} = 3^{13}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{6^{13}}{6^4} = 6^{13-4} = 6^9$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^4)^3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

أمثلة:

$$x^2 = 15 \text{ معناه: } x = \sqrt{15} \text{ أو } x = -\sqrt{15}$$

ومنه للمعادلة حلين هما: $\sqrt{15}$ و $-\sqrt{15}$.

$$x^2 = 0$$

للمعادلة حل واحد وهو 0.

$$x^2 = -16$$

المعادلة لا تقبل أي حل.

نسبة مقامها عدد غير ناطق

a عدد كفي b عدد ناطق موجب تماما.

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا، نضرب كلا من البسط والمقام في نفس العدد $\sqrt{b}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

أمثلة:

$$\frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{3 \times 7} = \frac{\sqrt{35}}{21}$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{(1 + \sqrt{2})\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{6 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(6 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{2(3\sqrt{2} + 1)}{2} = 3\sqrt{2} + 1$$

تبسيط عبارة تتضمن جذور

تبسيط عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن.

x ، y ، z أعداد صحيحة، b عدد طبيعي.
لتبسيط العبارة: $x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b}$
نطبق الخاصية التوزيعية:

$$x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b} = (x + y + z)\sqrt{b}$$

خاصية طالس

الخاصية العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

M و N نقطتان من (d) تختلفان عن A .

C و B نقطتان من (d') تختلفان عن A .

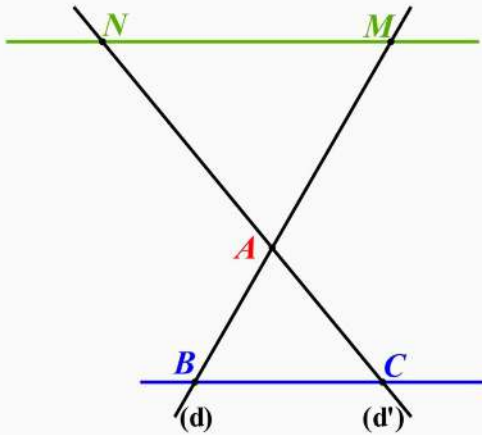
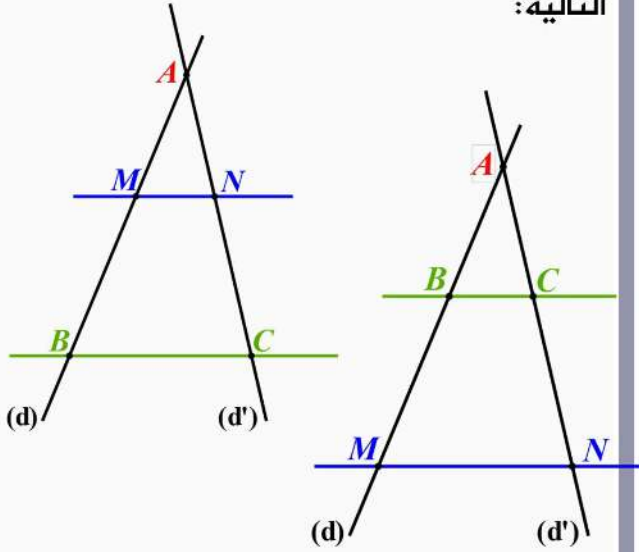
إذا كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ وكانت النقط M, B, A

والنقط N, C, A مرتبة بنفس الترتيب فإن

$(MN) \parallel (BC)$ حسب الخاصية العكسية لخاصية

طالس

يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيات التالية:



ملاحظة

تسمح خاصية طالس العكسية بإثبات توازي مستقيمين.

خاصية طالس

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

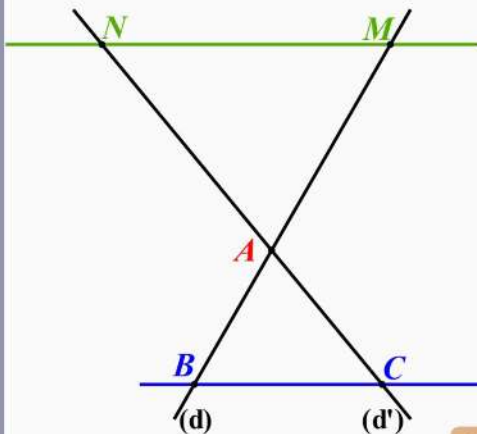
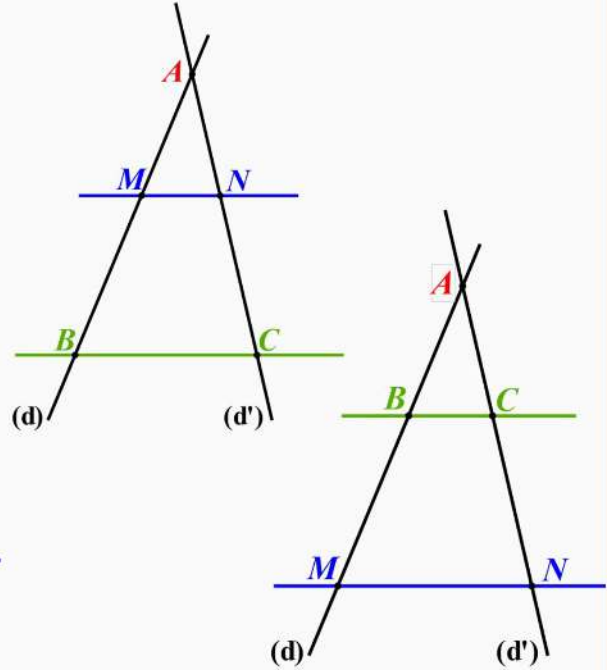
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

M و N نقطتان من (d) تختلفان عن A .

C و B نقطتان من (d') تختلفان عن A .

إذا كان (MN) و (BC) متوازيين فإن:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



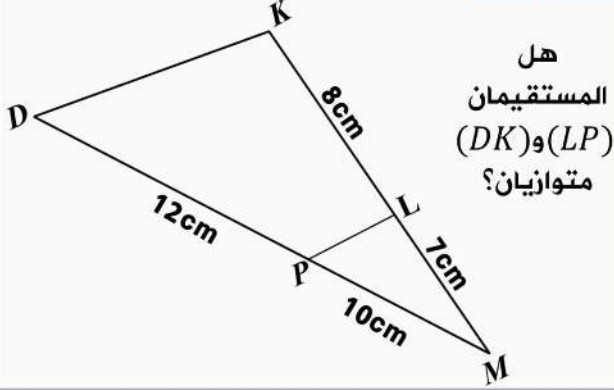
ملاحظة

تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال والنسب وإثبات عدم توازي مستقيمين.

خاصية طالس

إثبات عدم التوازي

مثال 2: لاحظ الشكل التالي:



هل
المستقيمان
(DK) و (LP)
متوازيان؟

- تبيان إن كان المستقيمان (DK) و (LP) متوازيان:
لدينا:

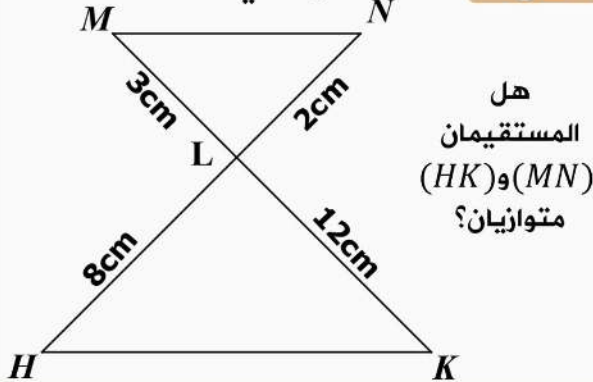
$$\frac{MP}{MD} = \frac{10}{10+12} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \quad \text{و} \quad \frac{ML}{MK} = \frac{7}{7+8} = \frac{7}{15}$$

ومنه: $5 \times 15 = 75$ و $11 \times 7 = 77$

بما أن $\frac{MP}{MD} \neq \frac{ML}{MK}$ فإن المستقيمان (DK) و (LP) غير متوازيين حسب خاصية طالس.

إثبات التوازي

مثال 3: لاحظ الشكل التالي:



هل
المستقيمان
(MN) و (HK)
متوازيان؟

- تبيان إن كان المستقيمان (MN) و (HK) متوازيان:
لدينا:

$$\frac{LN}{LH} = \frac{2}{8} = 0,25 \quad \text{و} \quad \frac{LM}{LK} = \frac{3}{12} = 0,25$$

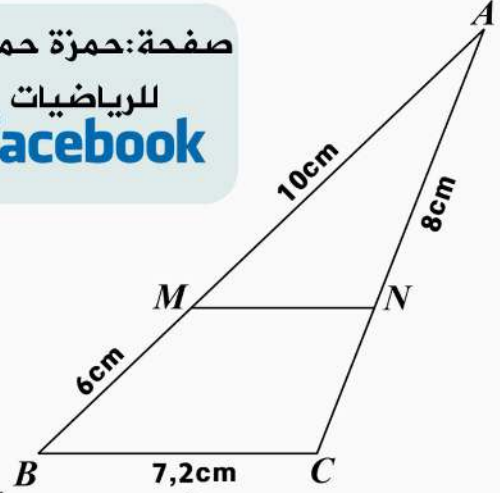
وعليه: $\frac{LN}{LH} = \frac{LM}{LK}$

وبما أن النقط M، L، K والنقط N، L، H في استقامة وبنفس الترتيب فإن (MN) // (HK) حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس.

حساب الأطوال والنسب

مثال 1: لاحظ الشكل الآتي حيث: (MN) // (BC)

صفحة: حمزة حميدي
للرياضيات
facebook



- أحسب الطول AC. ؛ - أحسب النسبة $\frac{AM}{MN}$.

- حساب الطول AC:
لدينا:

المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان والنقط A، M، B والنقط A، N، C في استقامة وكذلك والنقط A، N، C في استقامة وعليه حسب خاصية طالس نجد:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{10}{10+6} = \frac{8}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{بالتعويض:}$$

$$\frac{10}{16} = \frac{8}{AC} \quad \text{نأخذ:}$$

$$AC = \frac{16 \times 8}{10} \quad \text{ومنه:}$$

$$AC = 12,8cm \quad \text{إذن:}$$

- حساب النسبة $\frac{AM}{MN}$:

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC} \quad \text{لدينا:} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{16}{7,2} \quad \text{إذن:}$$

خاصية طالس

إنشاءات هندسية بسيطة

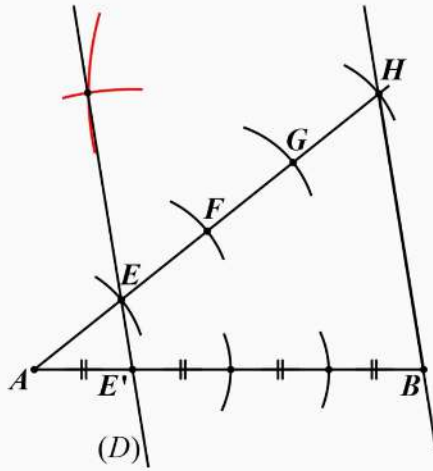
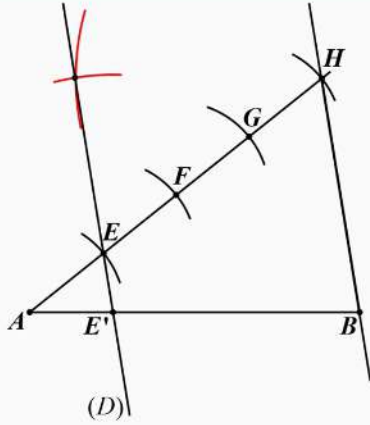
تقسيم قطعة مستقيم

لتقسيم قطعة مستقيم $[AB]$ إلى n قطعة كلها متقايسة (n عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد) نتبع المثال التالي:

مثال تقسيم قطعة المستقيم $[AB]$ إلى أربع

قطع متقايسة:

- ننشئ نصف مستقيم مبدؤه A وحامله يختلف عن المستقيم (AB) .
- على نصف المستقيم ننشئ بالمدور نقطة E .
- نقوم بإنشاء النقط F و G و H بنفس فتحة المدور.
- نرسم المستقيم (BH) .
- ننشئ المستقيم (D) المستقيم المار من E والموازي للمستقيم (BH) (بالمدور أو بالكوس).
- نسمي نقطة تقاطع (D) و (AB) E' .
- نقسم القطعة $[AB]$ إلى قطع متقايسة طولها AE' باستعمال المدور.



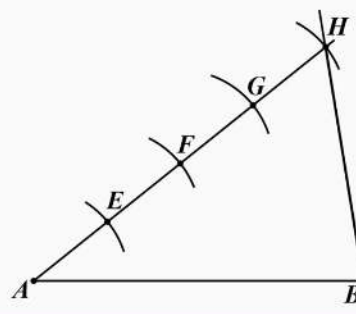
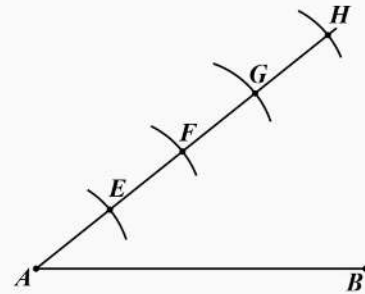
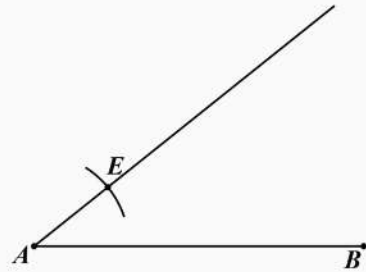
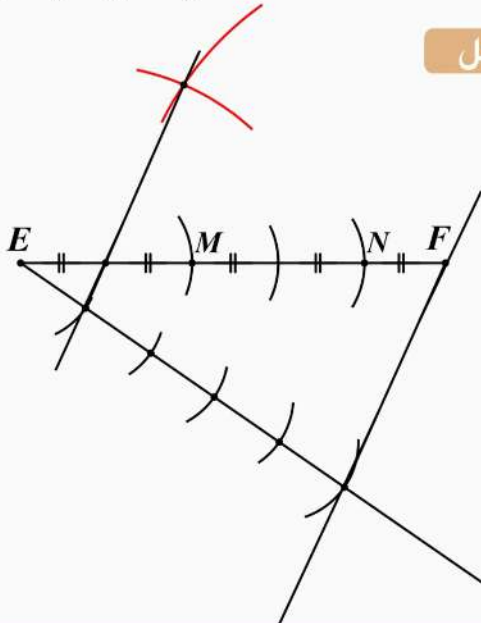
تمرين

• $[EF]$ قطعة مستقيم طولها 6cm

- ارسم قطعة المستقيم $[EF]$ ثم قم بتقسيمها إلى خمس قطع متقايسة.

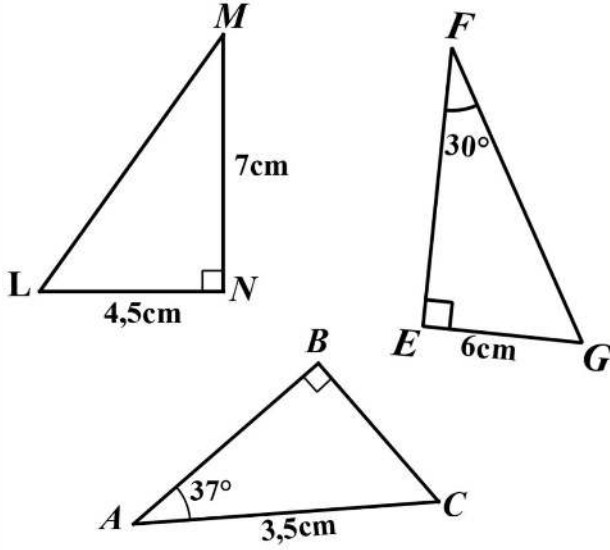
- عين النقطتين M و N حيث: $\frac{EM}{EF} = \frac{2}{5}$ و $\frac{EN}{EF} = \frac{4}{5}$.

الحل



النسب المثلثية

تمرين 1 إليك الأشكال التالية:



- 1- أحسب قياس الزاوية $\hat{L}$. (بالتدوير إلى الوحدة).
- 2- أحسب الطول FG .
- 3- أحسب الطول AB ، بالتدوير إلى الوحدة.

الحل

1- حساب قياس الزاوية $\hat{L}$:

في المثلث LMN القائم في N لدينا:

$$\tan \hat{L} = \frac{MN}{LN} = \frac{7}{4,5}$$

$$\tan \hat{L} \approx 1,5555$$

باستعمال الآلة الحاسبة وبالتدوير إلى الوحدة نجد:

$$\hat{L} \approx 57^\circ$$

2- حساب الطول FG :

في المثلث EFG القائم في E لدينا:

$$\sin 30^\circ = \frac{EG}{FG} \quad \text{بالتعويض:} \quad \sin \hat{F} = \frac{EG}{FG}$$

$$\text{ومنه: } FG = \frac{6}{\sin 30^\circ} \quad \text{إذن: } \boxed{FG = 12cm}$$

3- حساب الطول AB :

في المثلث ABC القائم في B لدينا:

$$\cos 37^\circ = \frac{AB}{AC} \quad \text{بالتعويض:} \quad \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{ومنه: } AB = \cos 37^\circ \times 3,5 \quad \text{إذن: } \boxed{AB \approx 2,8cm}$$

نوظف النسب المثلثية في المثلث القائم لـ:

- حساب قياس زاوية حادة
- حساب طول ضلع
- إنشاء زاوية حادة
- حساب النسب

جيب تمام زاوية حادة

جيب تمام (cos) زاوية حادة يساوي النسبة:

طول الضلع المجاور لهذه الزاوية

طول الوتر

جيب زاوية حادة

جيب (sin) زاوية حادة يساوي النسبة:

طول الضلع المقابل لهذه الزاوية

طول الوتر

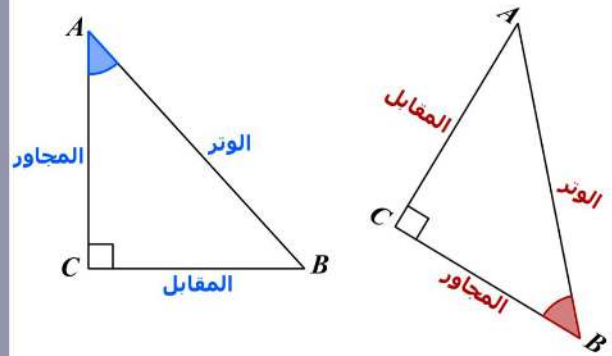
ظل زاوية حادة

ظل (tan) زاوية حادة يساوي النسبة:

طول الضلع المقابل لهذه الزاوية

طول الضلع المجاور لهذه الزاوية

مثال 1: المثلث قائم في C



في المثلث ABC القائم في C لدينا:

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

النسب المثلثية

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2- استنتاج القيمة المضبوطة للعدد $\tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

تمرين 2

1- أحسب $\cos \hat{C}$ علماً أن:

$$\tan \hat{C} = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الحل

- حساب $\cos \hat{C}$:

$$\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} \quad \text{لدينا:}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\tan \hat{C}} \quad \text{ومنه:}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \text{بالتعويض:}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{إذن:}$$

تمرين 2

أنشئ زاوية قياسها α حيث: $\sin \alpha = 0,8$

الحل

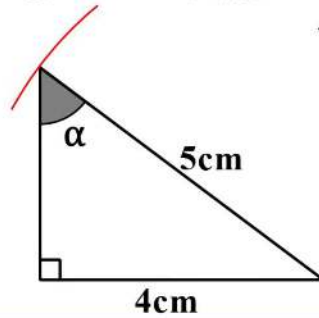
نضع وحدة الطول هي 1cm

$$\sin \alpha = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{لدينا:}$$

• البسط 4 يمثل طول الضلع المقابل للزاوية α

• المقام 5 يمثل طول الوتر

ننشئ مثلثاً قائماً طول وتره 5cm وطول أحد ضلعيه القائمين 4cm



العلاقات المثلثية

من أجل كل x زاوية حادة في مثلث قائم لدينا:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

تمرين 1

x هو قياس زاوية حادة حيث: $\cos x = \frac{1}{2}$

1- أحسب دون استعمال الآلة الحاسبة، القيمة المضبوطة للعدد $\sin x$.

2- استنتاج القيمة المضبوطة للعدد $\tan x$.

الحل

1- حساب القيمة المضبوطة للعدد $\sin x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{ومنه:}$$

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

خاصية فيثاغورس

facebook صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

خاصية فيثاغورس

إذا كان مثلث قائماً، فإن مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين.

ملاحظة 1

تسمح خاصية فيثاغورس بحساب طول ضلع في مثلث قائم بمعلومية طولي الضلعين الآخرين.

مثال 1

ABC مثلث قائم في A حيث: $AC = 3cm$ ، $AB = 4cm$

-حساب الطول BC

المثلث ABC قائم في A ، وحسب خاصية فيثاغورس نجد:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{بالتعويض:} \quad BC^2 = 4^2 + 3^2 \quad \text{ومنه:} \quad BC^2 = 16 + 9$$

$$\text{ومنه:} \quad BC^2 = 25 \quad \text{إذن:} \quad BC = \sqrt{25} \quad \text{إذن:} \quad \boxed{BC = 5cm}$$

ملاحظة 2

إذا كان في مثلث مربع أطول أضلاعه لا يساوي مجموع مربعي ضلعيه الآخرين فإن هذا المثلث ليس قائماً حسب خاصية فيثاغورس.

مثال 2

LMN مثلث حيث: $MN = 7cm$ ، $LN = 6cm$ ، $LM = 5cm$

-نريد معرفة إن كان المثلث LMN قائماً:

$$\text{لدينا:} \quad MN^2 = 7^2 = 49 \quad \text{و} \quad LM^2 + LN^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

بما أن: $LM^2 + LN^2 \neq MN^2$ فإن المثلث LMN ليس قائماً حسب خاصية فيثاغورس.

الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

إذا كان في مثلث مربع طول أحد الأضلاع مساوياً لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن هذا المثلث قائم.

ملاحظة

تسمح الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس بإثبات أن مثلثاً عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم.

مثال

EFG مثلث حيث: $FG = 10cm$ ، $EG = 8cm$ ، $EF = 6cm$

-تبيان طبيعة المثلث EFG :

$$\text{لدينا:} \quad FG^2 = 10^2 = 100 \quad \text{و} \quad EF^2 + EG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\text{بما أن:} \quad EF^2 + EG^2 = FG^2$$

فإن المثلث EFG قائم في E حسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

نشر عبارة جبرية

نشر عبارة جبرية يعني تحويلها من جداء عاملين إلى مجموع جبري.

لنشر عبارة جبرية نستعمل الخاصية التوزيعية أو المتطابقات الشهيرة.

الخاصية التوزيعية

توزيع الضرب على الجمع:

$$k(a + b) = ka + kb$$

توزيع الضرب على الطرح:

$$k(a - b) = ka - kb$$

التوزيع المضاعف:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

أمثلة:

- $3(2x + 5) = 6x + 15$
- $-4x(3x + 1) = -12x^2 - 4x$
- $(2x + 1)(3x + 2) = 6x^2 + 4x + 3x + 2$
 $= 6x^2 + 7x + 2$

المتطابقات الشهيرة

مربع مجموع:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع فرق:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

جداء مجموع حدين وفرقهما:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

أمثلة:

- $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2$
 $= 4x^2 + 20x + 25$
- $(4x - 3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
 $= 16x^2 - 24x + 9$
- $(3x + 1)(3x - 1) = (3x)^2 - 1^2$
 $= 9x^2 - 1$

a, b, c و d أعداد

قاعدة حذف الأقواس في مجموع جبري

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة + لا نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

أمثلة:

$$5x + (2x + 4) = 5x + 2x + 4$$

$$4 + (3x - 7) = 4 + 3x - 7$$

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة - نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

أمثلة:

$$4x - (5 + 2x) = 4x - 5 - 2x$$

$$6x^2 - (3x - 1) = 6x^2 - 3x + 1$$

تبسيط عبارة جبرية

تبسيط عبارة جبرية يعني كتابتها بأقل عدد ممكن من الحدود في حالة المجموع أو العوامل في حالة الجداء.

أمثلة:

$$A = 2x + 7 - 5x + 1$$

$$A = 2x - 5x + 7 + 1$$

$$A = -3x + 8$$

$$B = -7x^2 - 15x - 9 + 3x^2 + 1$$

$$B = -7x^2 + 3x^2 - 15x - 9 + 1$$

$$B = -4x^2 - 15x - 8$$

$$C = 6x \times 2 \times 5x$$

$$C = 60x^2$$

$$F = 9x^2 - 30x + 25$$

$$F = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$

$$F = (3x - 5)^2$$

$$G = 16x^2 - 25$$

$$G = (4x)^2 - (5)^2$$

$$G = (4x + 5)(4x - 5)$$

المعادلات والمتراجحات

المعادلة من الدرجة الأولى

يؤول حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$3x - 1 = 7x - 9$$

$$3x - 7x = -9 + 1$$

$$-4x = -8$$

$$x = \frac{-8}{-4}$$

$$x = 2$$

معادلة الجداء المعلوم

كل معادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$ حيث a, b, c, d أعداد معلومة، تسمى معادلة الجداء المعلوم

● حلول المعادلة:

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

هي حلول المعادلتين:

$$cx + d = 0 \text{ و } ax + b = 0$$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(3x - 1)(2x + 6) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad 2x + 6 = 0$$

$$3x = 1 \quad \text{أو} \quad 2x = -6$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{أو} \quad x = -3$$

ومنه للمعادلة حلان هما: $-\frac{1}{3}$ و -3

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

تحليل عبارة جبرية

تحليل عبارة جبرية يعني تحويلها من مجموع جبري إلى جداء عاملين.

لتحليل عبارة جبرية يمكننا البحث عن العامل المشترك أو توظيف المتطابقات الشهيرة.

البحث عن العامل المشترك

نبحث عن العامل المشترك ثم نطبق احدي القاعدتين التاليتين:

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

أمثلة:

$$A = 7x + 7y$$

$$A = 7(x + y)$$

$$B = 3x^2 + 2x$$

$$B = x(3x + 2)$$

$$C = 3x(x + 2) - 15x$$

$$C = 3x(x + 2) - 3x \times 5$$

$$C = 3x(x + 2 - 5)$$

$$C = 3x(x - 3)$$

$$D = (3x + 5)(7x + 2) - (7x + 2)^2$$

$$D = (3x + 5)(7x + 2) - (7x + 2)(7x + 2)$$

$$D = (7x + 2)[(3x + 5) - (7x + 2)]$$

$$D = (7x + 2)(3x + 5 - 7x - 2)$$

$$D = (7x + 2)(-4x + 3)$$

توظيف المتطابقات الشهيرة

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

أمثلة:

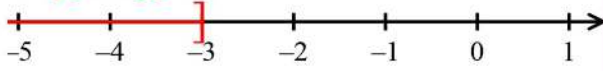
$$E = 4x^2 + 12x + 9$$

$$E = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$$

$$E = (2x + 3)^2$$

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:

طول المتراجحة



$$-3x - 3 > -7x + 5 \quad \text{المتراجحة 2}$$

$$-3x + 7x > 5 + 3$$

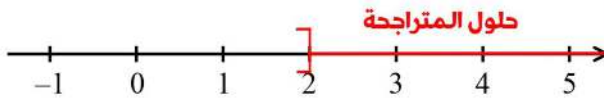
$$4x > 8$$

$$\frac{4x}{4} > \frac{8}{4}$$

$$x > 2$$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأكبر تماما من 2

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:



تمرين

1- أنشر ثم بسط العبارة A حيث:

$$A = (5x - 3)^2 - 2(x - 7)$$

2- حلّ العبارة B حيث:

$$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4)$$

$$(-5x - 1)(4 - 2x) = 0 \quad \text{3- حل المعادلة:}$$

الحل

1- نشر و تبسيط العبارة A :

$$A = (5x - 3)^2 - 2(x - 7)$$

$$A = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 - 2x + 14$$

$$A = 25x^2 - 30x + 9 - 2x + 14$$

$$A = 25x^2 - 32x + 23$$

2- تحليل العبارة B :

$$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4)$$

$$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4) \times 1$$

$$B = (6x - 4)[(8x - 3) - 1]$$

$$B = (6x - 4)(8x - 3 - 1)$$

$$B = (6x - 4)(8x - 4)$$

3- حل المعادلة:

$$(-5x - 1)(4 - 2x) = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$4 - 2x = 0 \quad \text{أو} \quad -5x - 1 = 0$$

$$-2x = -4 \quad \text{أو} \quad -5x = 1$$

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{5}$$

ومنه للمعادلة حلان هما: 2 و $-\frac{1}{5}$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- المتراجحة بمجهول x هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم x .
- قيم x التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.
- حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.

طريقة:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نستعمل القواعد الآتية:

- **نُحافظ** على اتجاه المتراجحة عندما نضيف (أو نطرح من) طرفيها نفس العدد.
- **نُحافظ** على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) نفس العدد الموجب تماما.
- **نُغير** اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) العدد السالب تماما.

التمثيل البياني لحلول متراجحة

تُمثل حلول متراجحة على مستقيم عددي مُدرّج.

أمثلة: حلّ المتراجحتين التاليتين ثم مثّل حلولهما بيانيا

$$9x^2 - 16 \geq 9x^2 + 7x + 5 \quad \text{المتراجحة 1}$$

$$9x^2 - 9x^2 - 7x \geq 5 + 16$$

$$-7x \geq 21$$

$$\frac{-7x}{-7} \leq \frac{21}{-7}$$

$$x \leq -3$$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأصغر من أو تساوي -3

الأشعة والانسحاب

الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة

خاصية:

A ، B و I ثلاث نقاط .

● إذا كان I منتصف [AB] فإن: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

● إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن: I منتصف [AB] .

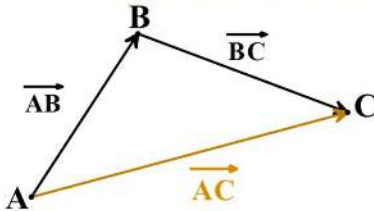


مجموع شعاعين (علاقة شال)

A ، B و C ثلاث نقاط .

مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$

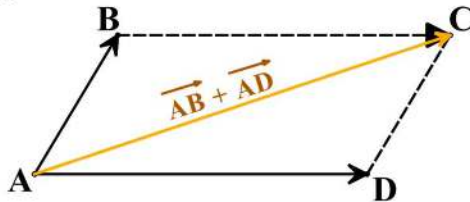
نكتب: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع (مجموع شعاعين)

A ، B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ معناه ABCD متوازي أضلاع.



الشعاعان المتعاكسان

الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان لهما نفس

المنحى ونفس الطول ويختلفان في الاتجاه.

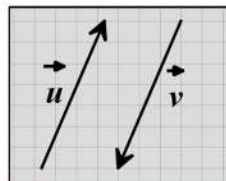
نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان

ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع

المعدوم $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$
متعاكسان ونكتب
 $\vec{u} = -\vec{v}$

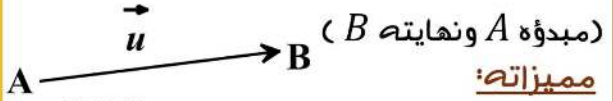


مثال:

facebook صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

الانسحاب ومفهوم الشعاع

A و B نقطتان متميزتان. الانسحاب الذي يحول A إلى B يعرف شعاعاً نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$



مميزاته:

المنحى: منحاه هو منحى المستقيم (AB) .

الاتجاه: اتجاهه هو من A نحو B .

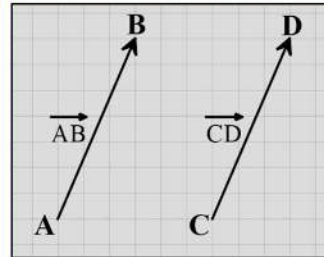
الطويلة: طويلته هي طول القطعة [AB] .

(يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\vec{u}$ مثلاً)

الشعاعان المتساويان

القول عن شعاعين أنهما متساويان يعني أن لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.

مثال:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

معناه:

● للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نفس المنحى، نفس الاتجاه ونفس الطول.

● الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول أيضاً C إلى D .

الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع

A ، B ، C و D أربع نقاط كل ثلاثة

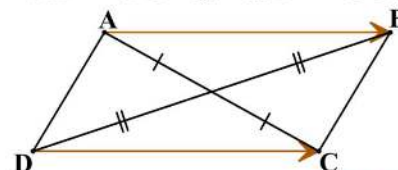
منها ليست في استقامة.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

ملاحظات: A ، B ، C و D أربع نقاط

● $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين [AC] و [BD] نفس المنتصف.

● إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



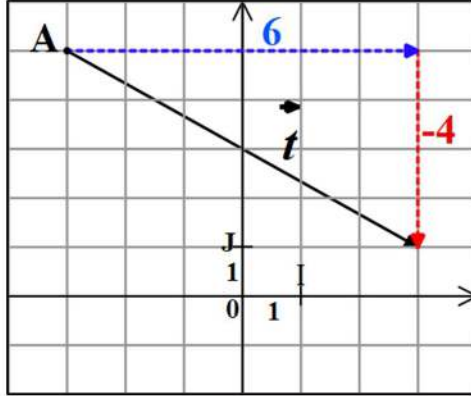
حالة خاصة: النقطة A ، B ، C و D في استقامة



الأشعة والمعال

مثال: لنمثل الشعاع $\vec{t} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

الذي مبدؤه النقطة A حيث $A(-3; 5)$



الشعاعان المتساويان

الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المركبتين.

شعاعان $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{v}$ معناه: $x = x'$ و $y = y'$

مثال: لتكن النقط A, B, C, D حيث:

$A(-4; -1), B(3; -1), C(-3; 2)$

و $D(4; 2)$

هل الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متساويان؟ ($\vec{AB} = \vec{CD}$)

$$\begin{array}{l} \vec{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \vec{CD} \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-4) \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} \\ \vec{CD} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ لهما نفس المركبتين

إذن: $\vec{AB} = \vec{CD}$

facebook صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

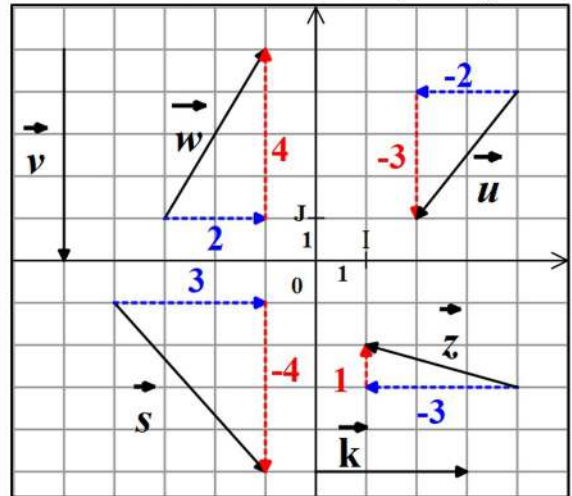
قراءة مركبتي شعاع

نقرأ مركبتي شعاع بالإزاحتين المتتاليتين اللتين تسمحان بالمرور من مبدأ الشعاع إلى نهايته.

• **الإزاحة الأولى** تكون بالتوازي مع محور الفواصل وتكون موجبة عندما ننتقل نحو اليمين، وسالبة عندما ننتقل نحو اليسار.

• **الإزاحة الثانية** تكون بالتوازي مع محور الترتيب وتكون موجبة عندما ننتقل نحو الأعلى، وسالبة عندما ننتقل نحو الأسفل.

مثال: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; I; J)$ مبدؤه النقطة O



$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \vec{s} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{k} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

تمثيل مركبتي شعاع

لتمثيل شعاع علمت مركبته $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، نختار

نقطة كمبدأ لهذا الممثل ثم نحولها

بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ فنحمل على نقطة نحولها بدورها بالانسحاب الذي شعاعه

$\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ للحمول على نهاية الشعاع المعطى.

الأشعة والمعال

حساب المسافة بين نقطتين

إذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B هي

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال:

بمعلم متعامد ومتجانس. $A(3; -2)$ و $B(4; 1)$ نقطتان من مستو مزود

• حساب الطول AB

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 3)^2 + (1 - (-2))^2}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{10}} \quad \text{إذن:}$$

حساب إحداثيتي نقطة بمعرفة مركبتين شعاع
واحدائيتي نقطة أخرى

مثال:

حساب إحداثيتي النقطة D بحيث: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

لدينا: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $C(-2; -2)$

نضع: $D(x_D; y_D)$ ومنه

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - (-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} x_D + 2 = 0 & y_D + 2 = 3 \\ x_D = -2 & y_D = 3 - 2 \\ & y_D = 1 \end{array}$$

إذن: $D(-2; 1)$

facebook

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

حساب مركبتين شعاع

إذا كانت A و B نقطتان، إحداثيتهما $(x_A; y_A)$ و $(x_B; y_B)$ على الترتيب في معلم فإن مركبتين الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$

مثال:

نعتبر النقطتين $A(-1; 3)$ و $B(-2; 1)$ من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس

• حساب مركبتين الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$x_B - x_A = -2 - (-1) = -1$$

$$y_B - y_A = 1 - 3 = -2$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن:}$$

حساب إحداثيتا منتصف قطعة مستقيم

إذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتان من المستوي M منتصف القطعة $[AB]$ فإن $(x_M; y_M)$ هما إحداثيتا M

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال:

بمعلم متعامد ومتجانس. $A(2; 1)$ و $B(4; -5)$ نقطتان من مستو مزود

M منتصف القطعة $[AB]$

• حساب إحداثيتي النقطة M

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

إذن: $M(4; -2)$

جملة معادلتين

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

طريقة الجمع والتعويض

مثال: نحل الجملة الآتية بطريقة الجمع والتعويض

$$\begin{cases} 2x - 5y = -37 & \dots(1) \\ 6x + 4y = 22 & \dots(2) \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (-3) نجد :

$$\begin{cases} -6x + 15y = 111 & \dots(3) \\ 6x + 4y = 22 & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفا لطرف نجد :

$$-6x + 6x + 15y + 4y = 111 + 22$$

$$19y = 133$$

$$y = \frac{133}{19}$$

$$y = 7$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (2) نجد :

$$6x + 4 \times 7 = 22$$

$$6x + 28 = 22$$

$$6x = 22 - 28$$

$$6x = -6$$

$$x = \frac{-6}{6}$$

$$x = -1$$

إذن حل الجملة هو الثنائية : $(-1; 7)$

تعريف

نسمي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل معادلة من الشكل :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث a, b, c, a', b', c' أعداد معلومة.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{نسمي حلا للجملة:}$$

كل ثنائية $(x_0; y_0)$ تكون من أجلها معادلتا الجملة محققتين في آن واحد.

طريقة التعويض

مثال: نحل الجملة الآتية بطريقة التعويض

$$\begin{cases} x + 2y = 81 & \dots(1) \\ 6x + 11y = 455 & \dots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد :

$$x = 81 - 2y \quad \dots(3)$$

بتعويض x بالعلاقة $81 - 2y$ في المعادلة (2) نجد :

$$6(81 - 2y) + 11y = 455$$

$$486 - 12y + 11y = 455$$

$$-12y + 11y = 455 - 486$$

$$-y = -31$$

$$y = 31$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (3) نجد :

$$x = 81 - 2 \times 31$$

$$x = 81 - 62$$

$$x = 19$$

إذن حل الجملة هو الثنائية : $(19; 31)$

جملة معادلتين

الجملة المعبرة عن هذه الوضعية هي :

$$\begin{cases} 60x + 50y = 53500 & \dots(1) \\ 30x + 40y = 36500 & \dots(2) \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 2 - نجد :

$$\begin{cases} 60x + 50y = 53500 & \dots(1) \\ -60x - 80y = -73000 & \dots(3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفا لطرف نجد :

$$\cancel{60x} + 50y - \cancel{60x} - 80y = 53500 - 73000$$

$$-30y = -19500$$

$$y = \frac{-19500}{-30}$$

$$y = 650$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (2) نجد :

$$30x + 40 \times 650 = 36500$$

$$30x + 26000 = 36500$$

$$30x = 36500 - 26000$$

$$30x = 10500$$

$$x = \frac{10500}{30}$$

$$x = 350$$

ومنه حل الجملة هو الثنائية : (350; 650)

إذن :

سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير هو : **350DA**

سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير هو : **650DA**

تمرين 1:

هل الثنائية (1; 3) حل لهذه للجملة:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

حل التمرين 1:

بتعويض احدائتي الثنائية (1; 2) في الجملة نجد:

$$\begin{cases} 3 + 2 \times 1 = 5 \\ 3 \times 3 + 4 \times 1 = 14 \neq 13 \end{cases}$$

إذن الثنائية (1; 2) ليست حلا للجملة.

تمرين 2:

بعدما تم الانتهاء من تبليط أرضية أحد المدرسة القرآنية

تقدم الصديقان محمد و سعيد من أجل تقديم المساعدة.

فتم تكليفهما بشراء مصاحف للطلبة.

ذهب الصديقان لإحدى المكاتب.

✽ اشترى محمد 60 مصحف من الحجم الصغير

و 50 مصحف من الحجم الكبير بمبلغ 53500 DA.

✽ اشترى سعيد 30 مصحف من الحجم الصغير

و 40 مصحف من الحجم الكبير بمبلغ 36500 DA.

- ما سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير و ما سعر

المصحف الواحد من الحجم الكبير ؟

حل التمرين 2:

نرمز لسعر المصحف الواحد من الحجم الصغير ب x

نرمز لسعر المصحف الواحد من الحجم الكبير ب y

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

facebook

الدالة التآلفية

$$f(x) = ax + b$$

تعريف

- a و b عددان .
- عندما نرفق كل عدد x بالعدد $ax + b$ نقول أننا عرفنا دالة تآلفية.
- العدد $ax + b$ يسمى صورة العدد x بالدالة ونرمز لهذه الصورة بـ $f(x)$ ونكتب:
$$f(x) = ax + b$$
- a و b هما معامل الدالة التآلفية.

مثال: $f(x) = 3x - 2$ أو $f: x \mapsto 3x - 2$ هي دالة تآلفية معاملها: $a = 3$ و $b = -2$

حساب صورة عدد وتعيين عدد علمت صورته

طريقة:

- لحساب صورة العدد x_0 بالدالة f نعوض x بالعدد x_0 في العبارة $f(x)$ ونجري العمليات.
- لتعيين العدد x الذي صورته k بالدالة f نحل المعادلة $f(x) = k$ ذات المجهول x .

حساب صورة عدد

f دالة تآلفية حيث: $f(x) = 3x + 1$

- حساب صورة العدد 4 بالدالة f

$$f(4) = 3 \times 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

إذن صورة العدد 4 بالدالة f هي: 13

- حساب صورة العدد -1 بالدالة f

$$f(-1) = 3 \times (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$$

إذن صورة العدد -1 بالدالة f هي: -2

الدالة الخطية

$$f(x) = ax$$

تعريف

- a عدد معطى.
- عندما نرفق كل عدد x بالجداء $a \times x$ نقول أننا عرفنا دالة خطية f معاملها a .
- العدد $a \times x$ يسمى صورة العدد x بالدالة f ونرمز لهذه الصورة بـ $f(x)$ ونكتب:
$$f(x) = ax$$
- نرمز لهذه الدالة بـ: $f: x \mapsto ax$

مثال: $f(x) = 5x$ أو $f: x \mapsto 5x$ هي دالة خطية معاملها: $a = 5$

حساب صورة عدد وتعيين عدد علمت صورته

طريقة:

- لحساب صورة العدد x_0 بالدالة f ، نعوض x بالعدد x_0 في العبارة $f(x)$ ونجري العمليات.
- لتعيين العدد x الذي صورته m بالدالة f نحل المعادلة $f(x) = m$ ذات المجهول x .

حساب صورة عدد

f دالة خطية حيث: $f(x) = 2x$

- حساب صورة العدد 5 بالدالة f

$$f(5) = 2 \times 5 = 10$$

إذن صورة العدد 5 بالدالة f هي: 10

- حساب صورة العدد -2 بالدالة f

$$f(-2) = 2 \times (-2) = -4$$

إذن صورة العدد -2 بالدالة f هي: -4

facebook

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

الدالة التآلفية

حساب عدد علمت صورته

k دالة حيث : $k(x) = 2x - 5$
حساب العدد الذي صورته 20 :

$$\begin{aligned} k(x) &= 20 \\ 2x - 5 &= 20 \\ 2x &= 20 + 5 \\ 2x &= 25 \\ x &= \frac{25}{2} \\ x &= 12.5 \end{aligned}$$

إذن العدد الذي صورته 20 بالدالة k هو 12.5

تعيين دالة تآلفية انطلاقاً من عددين وصورتيهما

لتعيين عبارة دالة تآلفية h معاملها a و b علماً

أن $h(x_1) = y_1$ و $h(x_2) = y_2$

1- نحسب المعامل a حيث:

$$a = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} ; x_1 \neq x_2$$

2- نحسب المعامل b وذلك بحل المعادلة

$$h(x_2) = y_2 \quad \text{أو} \quad h(x_1) = y_1$$

مثال:

إيجاد عبارة الدالة h حيث: $h(5) = 38$ و $h(3) = 24$

- حساب المعامل a :

لدينا :

$$a = \frac{h(5) - h(3)}{5 - 3} = \frac{38 - 24}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$h(x) = 7x + b \quad \text{ومنه} \quad \boxed{a = 7}$$

- حساب المعامل b :

لدينا :

$$\begin{cases} h(5) = 38 \\ h(5) = 7 \times 5 + b = 35 + b \end{cases}$$

$$35 + b = 38 \quad \text{ومنه} :$$

$$b = 38 - 35$$

$$\boxed{b = 3}$$

إذن عبارة الدالة h هي : $h(x) = 7x + 3$

الدالة الخطية

حساب عدد علمت صورته

g دالة خطية حيث : $g(x) = -7x$
حساب العدد الذي صورته 21 :

$$\begin{aligned} g(x) &= 21 \\ -7x &= 21 \\ x &= \frac{21}{-7} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

إذن العدد الذي صورته 21 بالدالة g هو -3

تعيين دالة خطية انطلاقاً من عدد وصورته

لتعيين عبارة دالة تآلفية g معاملها a علماً أن

$$g(m) = n$$

نحل المعادلة $am = n$ ذات المجهول a .

مثال:

إيجاد عبارة الدالة g حيث : $g(-2) = -6$

g دالة خطية معناه : $g(x) = ax$

$$a = \frac{g(x)}{x} \quad \text{ومنه} :$$

$$a = \frac{g(-2)}{-2}$$

$$a = \frac{-6}{-2}$$

$$a = 3$$

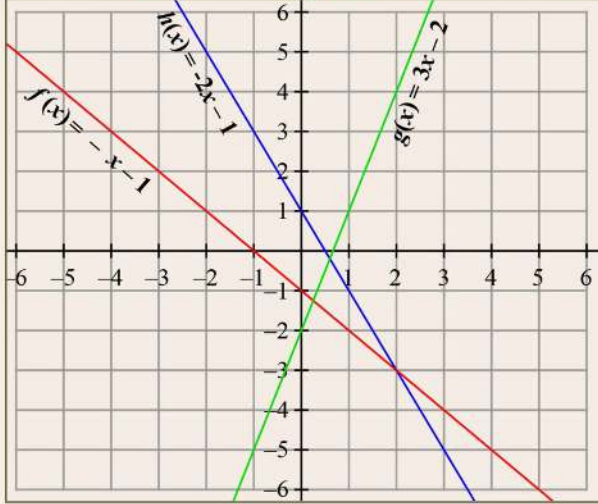
إذن عبارة الدالة g هي : $g(x) = 3x$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

facebook

الدالة التآلفية

قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية



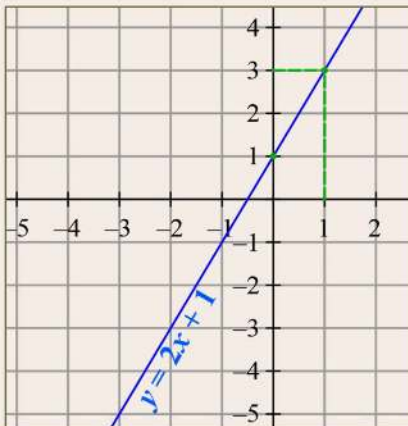
- صورة العدد 2- بالدالة f هي: 1
- صورة العدد 2 بالدالة f هي: -3
- صورة العدد 2 بالدالة g هي: 4
- صورة العدد 1- بالدالة h هي: 3
- العدد الذي صورته 5- بالدالة f هو: 4
- العدد الذي صورته 5- بالدالة g هو: -1
- العدد الذي صورته 5 بالدالة h هو: -2
- العدد الذي صورته 5- بالدالة h هو: 3

تمثيل دالة تآلفية بيانياً

تمثيل الدالة التآلفية k بيانياً حيث :

$$k(x) = 2x + 1$$

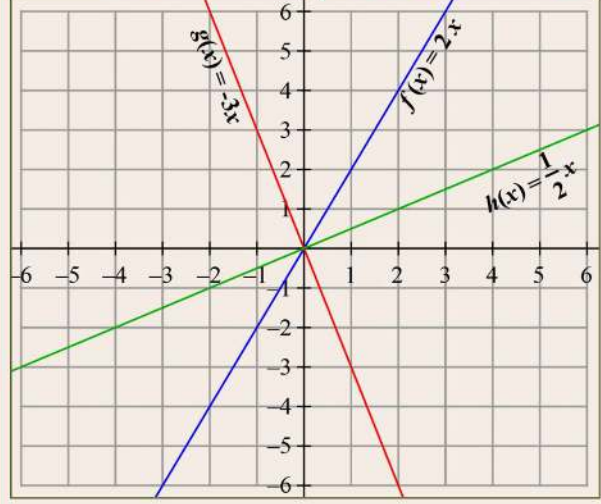
x	0	1
$k(x)$	1	3
النقطة	(0;1)	(1;3)



صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

الدالة الخطية

قراءة التمثيل البياني لدالة خطية



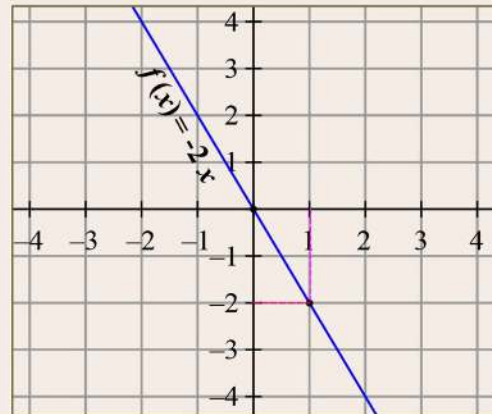
- صورة العدد 1 بالدالة f هي: 2
- صورة العدد 2 بالدالة f هي: 4
- صورة العدد 1- بالدالة g هي: 3
- صورة العدد 4- بالدالة h هي: -2
- العدد الذي صورته 6 بالدالة f هو: 3
- العدد الذي صورته 6 بالدالة g هو: -2
- العدد الذي صورته 3- بالدالة h هو: -6
- العدد الذي صورته 1 بالدالة h هو: 2

تمثيل دالة خطية بيانياً

تمثيل الدالة الخطية f بيانياً حيث :

$$f(x) = -2x$$

x	0	1
$f(x)$	0	-2
النقطة	(0;0)	(1;-2)



الدالة التآلفية

تعيين عبارة دالة تآلفية انطلاقاً من تمثيلها البياني

لتعيين عبارة دالة تآلفية بيانياً نقرأ من التمثيل البياني قيمتي المعاملين a و b .

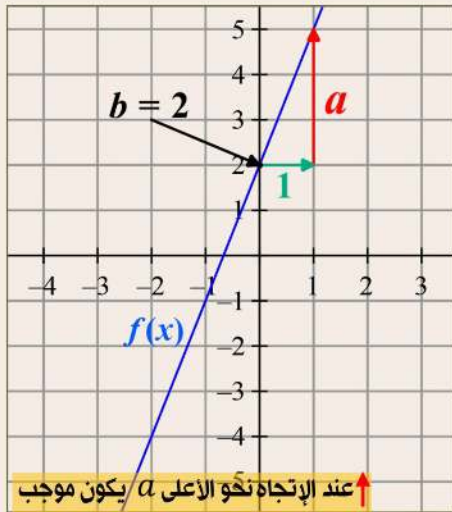
- العدد b هو الترتيب إلى المبدأ

- العدد a هو معامل توجيه الدالة وإيجاده :

نزح إنطلاقاً من b بتدرية واحدة نحو اليمين ثم

نصعد أو ننزل في اتجاه مستقيم نحو التمثيل البياني.

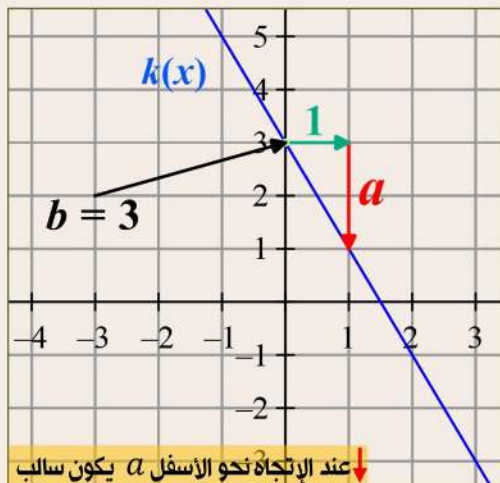
تعيين عبارة الدالة f إنطلاقاً من تمثيلها البياني



صفحة: حمزة حميدي للرياضيات
facebook

$f(x) = 3x + 2$ ومنه $b = 2$ و $a = 3$

تعيين عبارة الدالة k إنطلاقاً من تمثيلها البياني



$k(x) = -2x + 3$ ومنه $b = 3$ و $a = -2$

الدالة الخطية

تعيين عبارة دالة خطية انطلاقاً من تمثيلها البياني

لتعيين عبارة دالة خطية بيانياً نقرأ من التمثيل البياني قيمة المعامل a .

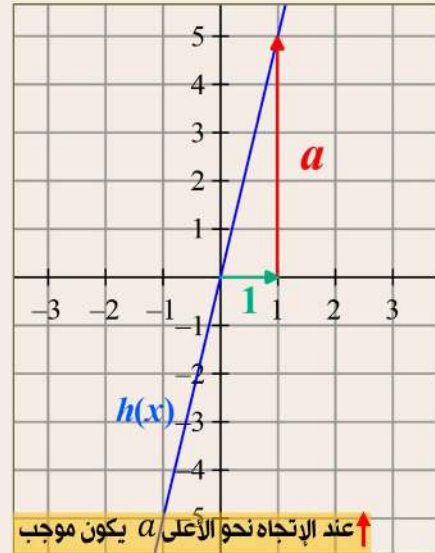
- العدد a هو معامل توجيه الدالة وإيجاده :

نزح إنطلاقاً من المبدأ بتدرية واحدة نحو اليمين

ثم نصعد أو ننزل في اتجاه مستقيم نحو التمثيل

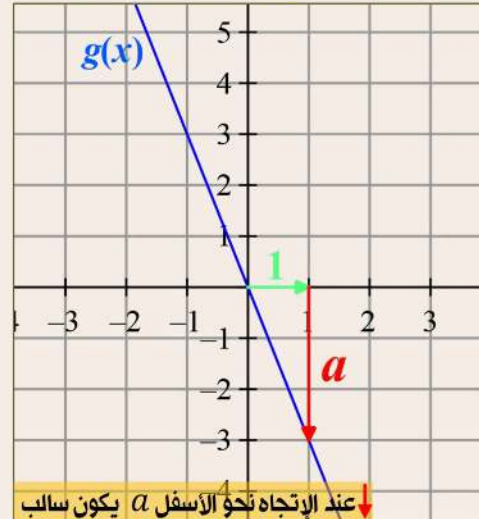
البياني.

تعيين عبارة الدالة h إنطلاقاً من تمثيلها البياني



$h(x) = 5x$ ومنه $a = 5$

تعيين عبارة الدالة g إنطلاقاً من تمثيلها البياني



$g(x) = -3x$ ومنه $a = -3$

الدوال

تمرين:

عدد تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط هو 30

انخفض عدد التلاميذ ب 10%

- احسب عدد التلاميذ بعد الانخفاض.

الحل:

- حساب عدد التلاميذ بعد الانخفاض:

$$y = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times 30 = \frac{90}{100} \times 30 = 27$$

عدد التلاميذ بعد الانخفاض هو: 27 تلميذ.

عند زيادة x ب $t\%$ يعني ضرب x في $1 + \frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي:

$$x \rightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$$

تمرين:

سعر كتاب هو 700da ، ازداد سعره ب 13%

- احسب سعر الكتاب بعد الزيادة.

الحل:

حساب سعر الكتاب بعد الزيادة:

$$y = \left(1 + \frac{13}{100}\right) \times 700 = \frac{113}{100} \times 700 = 791$$

سعر الكتاب بعد الزيادة هو: 791da

تمرين:

سعر قميص هو 2500DA

أصبح سعره بعد التخفيض 2400DA

- عين الدالة التي تترجم هذه الوضعية.

- ماهي نسبة هذا التخفيض؟

الحل: ليكن x السعر قبل التخفيض و $f(x)$ السعر

بعد التخفيض ومنه:

$$2400 = a \times 2500 \text{ ومنه: } f(x) = ax$$

$$f(x) = 0,96x \text{ ومنه: } a = \frac{2400}{2500} = 0,96$$

حساب نسبة هذا التخفيض: (نرمز لنسبة التخفيض ب p)

$$p = \frac{100 \times 100}{2500} = 4$$

2500	100
100%	p

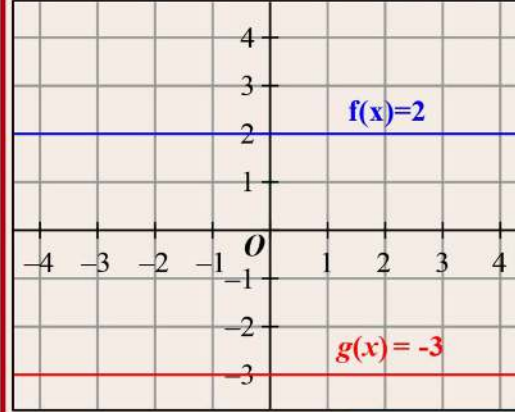
نسبة هذا التخفيض هي: 4%

الدالة الثابتة

$f(x) = ax + b$ دالة تآلفية حيث: $a = 0$ تصبح الدالة f دالة ثابتة تكتب

من الشكل: $f(x) = b$

● التمثيل البياني للدالة الثابتة عبارة عن مستقيم يوازي محور الفواصل.



مثال:

تطبيقات التناسبية

الدوال الخطية والنسب المئوية

عند أخذ $t\%$ من x يعني ضرب x في $1 - \frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي:

$$x \rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$$

تمرين:

انعقد مؤتمر دولي للبلدان المصنعة بحضور 40 خبيراً

اقتصادياً، حيث نسبة الخبراء العرب في المؤتمر هي 55%

- ما هو عدد الخبراء العرب في هذا المؤتمر؟

الحل:

- حساب عدد الخبراء العرب في المؤتمر:

$$\frac{55}{100} \times 40 = 22$$

عدد الخبراء العرب في المؤتمر هو: 22 خبيراً.

عند تخفيض x ب $t\%$ يعني ضرب x في $1 - \frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي:

$$x \rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$$

الدالة الخطية والتناسبية

- جدول قيم دالة خطية هو جدول فيه أعداد السطر الثاني هي صور أعداد السطر الأول بدالة الخطية.
- جدول قيم دالة خطية هو جدول تناسبية.
- معامل الدالة الخطية هو معامل تناسبية هذا الجدول.

مثال:

$f(x) = -2x$ دالة خطية حيث f جدول قيم الدالة f هو جدول تناسبية

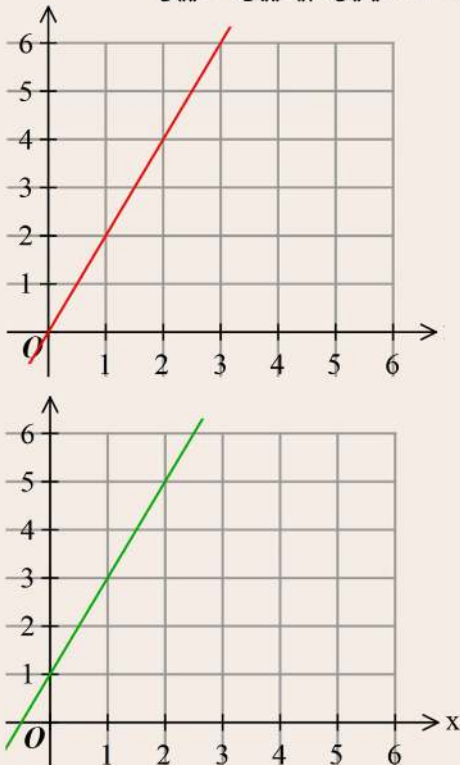
x	-3	-1	0	5
$f(x)$	6	2	0	-10

$\times (-2)$

(-2) هو معامل تناسبية هذا الجدول.

تمرين:

إليك التمثيلين البيانيين التاليين:



أي منهما يمثل وضعية تناسبية؟

الحل:

- البيان الأول يمثل وضعية تناسبية لأنه عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ.

- البيان الثاني لا يمثل وضعية تناسبية لأنه لا يمر من المبدأ.

المقادير المركبة

- عندما نحسب جداء مقدارين نتحصل على مقدار جداء.
- عندما نحسب حاصل قسمة مقدارين، نتحصل على مقدار حاصل القسمة.

$$E = P \times t$$

P : الإستطاعة الكهربائية: (kw أو w)

t : الزمن (h)

وحدة الطاقة الكهربائية: wh أو kwh

$$V_m = \frac{d}{t}$$

d : المسافة (m أو km)

t : الزمن (s أو h)

وحدة السرعة المتوسطة: m/s أو km/h

$$m_v = \frac{m}{v}$$

m : الكتلة (g أو kg)

v : الحجم (cm^3 أو m^3)

وحدة الكتلة الحجمية: g/cm^3 أو kg/m^3

مثال:

حساب الكتلة الحجمية لجسم كتلته $2,4kg$ وحجمه $0,01m^3$

$$m_v = \frac{m}{v} = \frac{2,4}{0,01} = 240$$

الكتلة الحجمية لهذا الجسم هي: $240kg/m^3$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

facebook

الدوال

إنجاز التمثيل البياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما بدلالة الآخر

يسمح التمثيل البياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما معطى بدلالة الآخر بعد إنجازهما من إيجاد قيمة المجهول دون حساب.

تمرين:

تقترح وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري صيغتين كالآتي:

● التسعيرة الأولى : DA 8 ديناراً للدقيقة.

● التسعيرة الثانية : DA 4 للدقيقة الواحدة و DA 500 كاشتراك شهري .

- باستعمال التمثيل البياني حدد أفضل تسعيرة للزبون حسب عدد الدقائق المستهلكة خلال شهر واحد

(يؤخذ: $1cm$ يمثل 25 دقيقة على محور الفواصل ، $1cm$ يمثل $200DA$ على محور الترتيب)

الحل

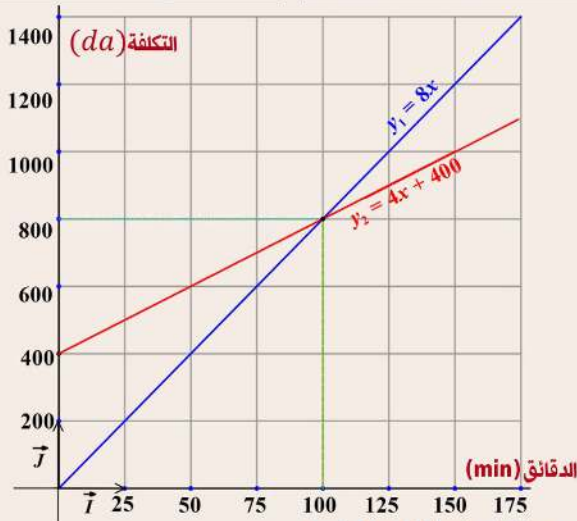
نرمز للتسعيرة الأولى بـ y_1 و التسعيرة الثانية بـ y_2

التعبير بدلالة x عن y_1 و y_2 :

$$y_1 = 8x \quad y_2 = 4x + 400$$

x	0	100
y_2	400	800
النقطة	(0;400)	(1;800)

x	0	100
y_1	0	800
النقطة	(0;0)	(1;800)



من البيان نستنتج ما يلي:

- إذا كان عدد الدقائق المستهلكة أقل من 100 دقيقة فإن التسعيرة الأولى أفضل من الثانية.
- إذا كان عدد الدقائق المستهلكة أكبر من 100 دقيقة فإن التسعيرة الثانية أفضل من الأولى.

تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بيانياً

● نعني بتفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانياً أن نرفق بهذه الجملة مستقيمين يمثلان الدالتين التآلفيتين المرفقتين بالجملة.

● الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين، عند وجودها، هي حل هذه الجملة.

مثال:

نعتبر الجملة:

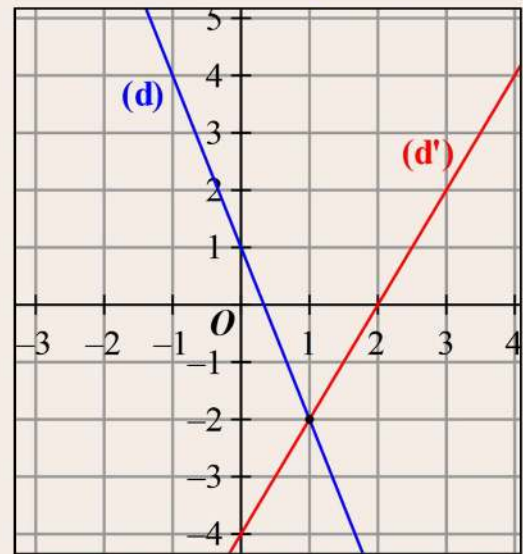
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

لتفسير حل هذه الجملة بيانياً، نعبر عن y بدلالة x في كلتا المعادلتين فنجد:

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

في معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O نرسم المستقيمين (d) و (d') المعرفين بمعادلتيهما:

$$y = -3x + 1 \quad \text{و} \quad y = 2x - 4$$



حل الجملة هو الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع (d) و (d') ، بقراءة بيانية نجد: $(1; -2)$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

7