

Top Maths

مجلة

نشر الملف بتاريخ 07 جانفي 2022 Bouchenak Youssouf

الاستغرافية وتطبيقاتها

السنة الثانية جميع الشعب العلمية

2^{as}

المجلة تتضمن

درس

• 11 تمرين محلول

• 08 مسائل محلول

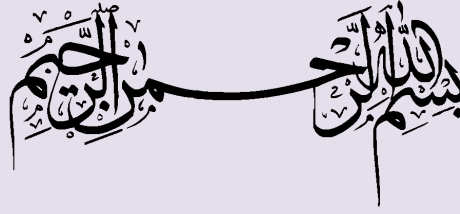
إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

Num 07.76.60.8058

Tlemcen

تجدون صفحة TopMaths على المنصات التالية





مقدمة

مجلة Top Maths في الاستغافير
المجلة موجهة للطلاب السنة الثانية
علوم تجريبية ❖ رياضيات ❖ تقني رياضي

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

□ نجدون في هذا الملف

- ① درس مفصل
- ② 11 تمرين محلولة
- ③ 08 مسائل نموذجية محلولة

📍 Tlemcen بوشناق يوسف Num 📞 07.76.60.80.58

رَبِّ قَدْ أَتَيْتَنِي مِنَ الْمَلِكِ وَعَلَّمَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ ۚ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَدَّتْ
وَلِيِّ فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ ۖ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحَقْنِي بِالصَّالِحِينَ

الاستغافية

نشاط 1 :

يسقط جسم A سقوطاً حراً بدون سرعة ابتدائية ($v = 0$) في اللحظة $t = 0$ فتكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالمعادلة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث d هي المدة بالثانية و d هي المسافة بالمتر. سرعة الكرة عند اللحظة t تسمى السرعة اللحظية

1. السرعة المتوسطة للجسم المتحرك بين اللحظتين t_0 و t_1 هي $v_m = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0}$. نريد حساب السرعة اللحظية

عند اللحظة $t = 3$. للتقرب من v_3 نحسب السرعة المتوسطة بين اللحظتين $t = 3$ و $t = 3 + h$ حيث h عدد حقيقي قريب من الصفر

أ. تحقق من أن $v_3 = 30 + 5h$.

ب. أحسب v_3 من أجل قيم h التالية: 0,1 ؛ 0,01 ؛ 0,001 ؛ 0,0001 .

ج. استنتج قيمة مقربة لـ v_3 .

2. أ. أحسب السرعة المتوسطة v_t بين لحظتين t و $t + h$.

ب. استنتج السرعة اللحظية عند لحظة كيفية t .

الحل:

$$v_3 = \frac{d(3+h) - d(3)}{h} = \frac{5(3+h)^2 - 5 \times 3^2}{h} = \frac{5h^2 + 30h}{h} = 30 + 5h \quad \text{أ. 1}$$

h	0,1	0,01	0,001	0,0001
v_3	30,5	30,05	30,005	30,0005

ب)

نلاحظ أنه كلما يقترب h من الصفر السرعة المتوسطة v_3 تقترب أكثر فأكثر من 30 m/s .

ج. نستنتج أن القيمة المقربة للسرعة اللحظية v_3 هي 30 m/s

$$v_m = \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \frac{5(t+h)^2 - 5t^2}{h} = \frac{5h^2 + 10th}{h} = 10t + 5h \quad \text{أ. 2}$$

ب) نلاحظ أنه كلما يقترب h من الصفر السرعة المتوسطة v_m تقترب أكثر فأكثر من $10t$. إذن نستنتج

السرعة اللحظية عند لحظة كيفية t هي $v(t) = 10t$.

تعليق: - عندما يأخذ h قيمة قريبة بقدر ما أمكن من العدد 0 فالسرعة تصبح لحظية (زمنية) عند اللحظة t

ونرمز لها بـ $\lim_{h \rightarrow 0} v_m$ ونكتب $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_m$

الدالة القابلة للاشتقاق عند قيمته والعدد المشتق

التعريف:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عدد حقيقي من المجال I .

نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند القيمة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث العبارة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

تقبل النهاية ℓ لما h يقترب من الصفر.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f عند القيمة x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ إذن:}$$

ملاحظة 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

تمرين رقم 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

• عين العدد المشتق للدالة f عند $x_0 = 2$.

حل:

من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 - 7}{h}$$

$$= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$= h + 6$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 6)$$

$$= 6$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2) = 6$.

تمرين رقم 02

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2$.

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعين دالتها المشتقة

حل

لدينا $f(x) = -x^2 + 2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن x_0 عدد حقيقي. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h مع $h \neq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{[-(x_0+h)^2 + 2] - (-x_0^2 + 2)}{h} = \frac{-2x_0h - h^2}{h} = -2x_0 - h$$

ومنه

وبالتالي : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x_0 - h) = -2x_0$
 إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x) = 2x$.

مثال 1:

نعتبر الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$. بين أن الدالة قابلة للاشتقاق عند 4 و حدد العدد المشتق عند 4.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

إذن الدالة قابلة للاشتقاق عند 4 و العدد المشتق عند 4 هو $f'(4) = \frac{1}{4}$.

مثال 2:

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x}$. بين أن الدالة قابلة للاشتقاق عند 1 و حدد العدد المشتق عند 1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

إذن الدالة قابلة للاشتقاق عند 1 و العدد المشتق عند 1 هو $f'(1) = -1$.

مشتقة دالة

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f .

مشتقة الدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز f' والمعرفة كما يلي: $f': x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

مثال 1:

عين الدالة المشتقة للدالة $f: x \mapsto x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0. x_0 \in \mathbb{R}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f': x \mapsto 2x$

مثال 2:

عين الدالة المشتقة للدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. x_0 \in \mathbb{R}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال 3:

عين الدالة المشتقة للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + hx_0} = \frac{-1}{x_0^2} \cdot x_0 \in \mathbb{R}^* \text{ ليكن}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f': x \mapsto \frac{-1}{x^2}$

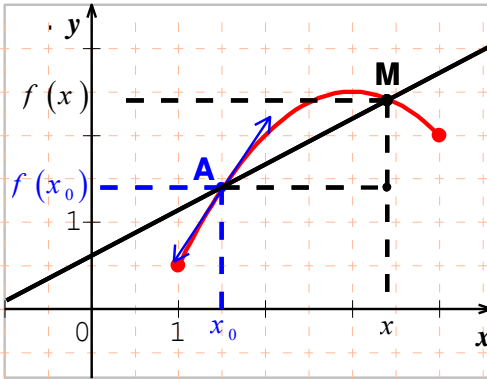
ملخص

مشتقة الدوال المألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

مماس منحنى دالة عند نقطة منه

نشاط 2 :



- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;4]$ وقابلة للاشتقاق عند x_0
 C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 النقطة A من C_f فاصلتها x_0 .
 لتكن M نقطة متغيرة من C_f فاصلتها x ونضع $h = x - x_0$.
 (1) عين معامل توجيه المستقيم (AM) بدلالة h .
 (2) ماذا يعتبر المستقيم (AM) عندما نقرب النقطة M بقدر ما أمكن إلى
 (3) أعط تفسيراً هندسياً للعدد المشتق للدالة f عند القيمة x_0 .
 (4) أكتب معادلة للمستقيم (AM) في حالة M قريبة جداً من النقطة A .

حل النشاط

- (1) معامل توجيه المستقيم (AM) هو $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
 (2) المستقيم (AM) يصبح مماساً للمنحنى C_f في النقطة A .
 (3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى C_f في النقطة A .
 (4) معادلة المماس هي من الشكل $y = f'(x_0)x + b$ بما أن النقطة A تنتمي إلى المماس فإن
 $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ ومنه $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ إذن معادلة مماس المنحنى C_f في النقطة A هي
 $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
 أي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 مماس منحنى دالة عند نقطة منه :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. التمثيل البياني لدالة f معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 .

نتيجة 1:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن منحنى C_f يقبل مماساً عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، معامل توجيهه $f'(x_0)$.

نتيجة 2:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ هي معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

تمرين رقم 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

• عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

حل:

- في التمرين المحلول الأول رأينا أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ و $f'(x) = -2x$ ؛ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 و $f'(1) = -2$ وبالتالي 2- هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند A لدينا $f(1) = 1$.
معادلة للمماس (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
ونستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y = -2x + 3$.

تمرين رقم 04

- f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ: $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$.
ليكن (C_f) و (C_g) رسميهما البيانيين في المستوى المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
عين المماسات المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

حل:

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $]-\infty, 0[$. ولدينا:

$$f'(x) = 2x \text{ و } g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$A(x_0, f(x_0)) \text{ نقطة من } (C_f) \text{ و } B(x_1, g(x_1)) \text{ نقطة من } (C_g).$$

ليكن (T) مماس (C_f) عند النقطة A و (T') مماس (C_g) عند النقطة B .

$$\text{معادلة } (T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ أي } y = 2x_0x - x_0^2$$

$$\text{معادلة } (T'): y = g'(x_1)(x - x_1) + g(x_1) \text{ أي } y = -\frac{1}{x_1^2}x + \frac{2}{x_1}$$

$$\begin{cases} 2x_0 = -\frac{1}{x_1^2} \\ -x_0^2 = \frac{2}{x_1} \end{cases} \quad (T) \text{ و } (T') \text{ منطبقان معناه}$$

$$\text{بحل هذه الجملة نحصل على } x_0 = -2 \text{ و } x_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ومنه معادلة } (T) \text{ و } (T'): y = -4x - 4.$$

التقريب التآلفي

لدينا $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ ومنه إذا كان $h \neq 0$ فإن $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ أي $f(x_0+h) - f(x_0) \approx hf'(x_0)$ ويسمى التقريب التآلفي بوضع $x - x_0 = h$ نجد $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ ومنه أحسن تقريب تآلفي للمنحنى هو مماسه عند نقطته ذات الفاصلة x_0

تمرين رقم 05

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
- ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم (O, I, J) .
- عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 0.
- عين تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 0.
- عين قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$.

حل:

- بنفس الطريقة المعتمدة في التمرين المحلول الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ ، و $f'(x) = 2x + 2$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة 0 و $f'(0) = 2$ وبالتالي 2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0. لدينا $f(0) = 1$ ومنه معادلة للمماس (T) هي: $y = f'(0)(x) + f(0)$.
- ونستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y = 2x + 1$.
- تقريب تآلفي لـ f بجوار 0 هو $f'(0)(x) + f(0)$ أي $2x + 1$. والدالة $g: x \mapsto 2x + 1$ هي أحسن تقريب تآلفي لها.
- $1.00004 = 1 + 4 \times 10^{-5}$ و $f(x) = (1+x)^2$ ومنه قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي $1 + 2 \times 4 \times 10^{-5}$ أي 1.00008 إذن قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي 1.00008 .

العمليات على الدوال المشتقة

1. مبرهنة:

إذا كانت f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ وكان λ عدد حقيقي فإن الدوال $(f + g)$ ، $(f \times g)$ و (λf) قابلة للاشتقاق على D ولدينا: $(f + g)' = f' + g'$ ، $(f \times g)' = f'g + g'f$ ، $(\lambda f)' = \lambda f'$ ،
- وإذا كانت الدالة g لا تنعدم على D فإن الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right)$ و $\left(\frac{1}{g}\right)$ قابلتين للاشتقاق على D ولدينا:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \text{ و } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

2. مشتقة الدالة: $g: x \mapsto f(ax+b)$

مبرهنة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$. a و b عددا حقيقيان. E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b \in D$.
ينتج إلى D . الدالة $g: x \mapsto f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على E و دالتها المشتقة g' هي:
 $g': x \mapsto af'(ax+b)$. حيث g' مشتقة الدالة g على D .

ملاحظة:

الدالة g هي دالة مركبة من الدالة $k: x \mapsto ax+b$ متبوعة بالدالة f أي $g = f \circ k$.

نتائج:

1. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على D فإن الدالة $\sqrt{f}$ تقبل الاشتقاق على D

$$\text{ولدينا: } (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

2. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال D حيث لا تنعدم على D فإن الدالة f^n تقبل الاشتقاق على D ولدينا: $(f^n)' = n f' f^{n-1}$.

تطبيقات:

1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال I في الحالات التالية:

أ- $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = x^2 - 3x + 1$

ب- $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$

ج- $I =]0; +\infty[$ و $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}$

د- $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = x^3$

هـ- $I =]0; +\infty[$ و $f(x) = x\sqrt{x}$

حل للتطبيقات:

1) تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال I في الحالات التالية:

أ- $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = x^2 - 3x + 1$: $f'(x) = 2x - 3$

ب- $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$ و $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$

$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x-1) - 2(x^2+3x-2)}{(2x-1)^2}$ ب: $] \frac{1}{2}; +\infty[$ معرفة على

$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x + 6x - 3 - 2x^2 - 6x + 4}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$

ج- $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}$ و $I =]0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{x \sqrt{x}}$ أي $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}^2}$ ب: $]0; +\infty[$ معرفة على

د- $f(x) = x^3$ و $I = \mathbb{R}$: لدينا: $f(x) = x \times x^2$ ومنه: $f'(x) = 1 \times x^2 + x(2x)$ ب: $f'(x) = x^2 + 2x^2 = 3x^2$ أي

هـ- $f(x) = x\sqrt{x}$ و $I =]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ب: $]0; +\infty[$ معرفة على

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

تمرين رقم 06

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.
عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي مجموع ثلاثة دوال u , v و w . حيث: $u: x \mapsto x^3$, $v: x \mapsto \frac{1}{x}$ و $w: x \mapsto \sqrt{x}$.
هذه الدوال الثلاثة قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ونعلم أن: $u': x \mapsto 3x^2$, $v': x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ و $w': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$. ودالتها المشتقة هي: $f': x \mapsto 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

تمرين رقم 07

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (x^3 + x + 1)\sqrt{x}$.
عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي جداء دالتين u و v . حيث: $v: x \mapsto \sqrt{x}$, $u: x \mapsto x^3 + x + 1$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $[0, +\infty[$ ونعلم أن: $u': x \mapsto 3x^2 + 1$ ، $v': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$. ودالتها المشتقة f' هي: $f'(x) = (3x^2 + 1)\sqrt{x} + (x^3 + x + 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

تمرين رقم 08

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -7x^3 + 4x^2 + 3x - 2$.
عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

الدالة f هي دالة كثير حدود . إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (تطبيق المبرهنات السابقة) . ودالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = (-7) \times (3x^2) + (4) \times (2x) + (3) \times (1) + 0$$

$$f'(x) = -21x^2 + 8x + 3$$

تمرين رقم 09

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{3x+5}{2x-4}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-4 \neq 0$.
 $2x-4=0$ معناه $x=2$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

- الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f = \frac{u}{v}$. حيث: $u: x \mapsto 3x+5$ ، $v: x \mapsto 2x-4$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي على كل من المجالين $]2, +\infty[$ و $]-\infty, 2[$.
نعلم أن: $u': x \mapsto 3$ ، $v': x \mapsto 2$

بما أن $v(x) \neq 0$ على D_f وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين

$$f'(x) = \frac{3(2x-4) - 2(3x+5)}{(2x-4)^2} = \frac{-22}{(2x-4)^2}$$

$]2, +\infty[$ و $]-\infty, 2[$. ودالتها المشتقة f' معرفة بـ:

تمرين رقم 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

- الدالة f معرفة على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ لأن على هذا المجال $\cos x \neq 0$.

الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f = \frac{u}{v}$. حيث: $u: x \mapsto \sin x$ ، $v: x \mapsto \cos x$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ونعلم أن: $u': x \mapsto \cos x$ ، $v': x \mapsto -\sin x$.

بما أن $v(x) \neq 0$ على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
دالتها المشتقة f' معرفة بـ:

$$f'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

تمرين 11

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \sqrt{2x-6}$.
• عين مجموعة تعريف الدالة f .

• عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل:

• تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-6 \geq 0$.
 $2x-6 \geq 0$ معناه $x \geq 3$

لتكن $D_f = [3, +\infty[$ ومنه $D_f = [3, +\infty[$

• الدالة f هي مركبة من الدالة $v: x \mapsto 2x-6$ تتبعها الدالة $u: x \mapsto \sqrt{x}$.
الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ونعلم أن $v': x \mapsto 2$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ونعلم أن $u': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

الدالة v موجبة تماماً على $[3, +\infty[$. إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $[3, +\infty[$

وتطبيقاً لمبرهنة مشتقة الدالة $f(x) = u(ax+b)$ نجد أن: $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-6}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

ملخص

u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u'v + v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

تطبيقات الاستغافية

إتجاه تغير الدالة:

مبرهنة: (تقبل بدون برهان)

لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة.

• إذا كانت f' موجبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f .

• إذا كانت f' سالبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f .

• إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f .

ملاحظة:

إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما وإما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f .

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f: x \mapsto -x^3 + 2$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f': x \mapsto -3x^2$ حيث:

الدالة f' سالبة تماما على $\mathbb{R}^*$ وتعدم في النقطة المعزولة 0 إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

القيم الحدية المحلية لدالة:

مبرهنة: (تقبل بدون برهان)

لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة.

• إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال I' محتوي في I يشمل c تقبل فيه f تقبل قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية.

ملاحظة: • يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .

حصر الدالة:

نتائج

لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال $[a, b]$ و f' دالتها المشتقة.

• إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a, b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a, b]$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

• إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a, b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a, b]$

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$$

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $[-3, 1]$ كما يلي: $f: x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وداتها المشتقة f' هي: $f': x \mapsto 2x + 2$.

الدالة f' سالبة تماما على $[-3, -1]$ و $f'(-1) = 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3, -1]$.

الدالة f' موجبة تماما على $[-1, 1]$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1, 1]$.

جدول التغيرات:

لطان x	3	-1	1
لطان $f(x)$	0	-4	0

من أجل كل x من المجال $[-3, -1]$ ، $f(-1) \leq f(x) \leq f(-3)$ أي $-4 \leq f(x) \leq 0$
 من أجل كل x من المجال $[-1, 1]$ ، $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ أي $-4 \leq f(x) \leq 0$

نقطة الانعطاف

تعريف:

f دالة قابلة للاشتقاق عند a .

القول أن النقطة $A(a; f(a))$ هي نقطة انعطاف لمنحني الدالة f إذا كان المماس عندها يخترق المنحني فيها.
 مبرهنة: إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند a وإذا كانت دالتها المشتقة f' تقبل الاشتقاق عند a حيث $f''(x)$ ينعدم ويغير من إشارته فإن منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف $A(a; f(a))$.

مثال 1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4x \quad ; \quad f''(x) = 6x - 4$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

إذن منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف $A\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{8}\right)$.

مسائل محلولة

مسألة 1 : البحث عن القيم الحدية

ما هو أصغر مجموع ممكن لما نضيف عددا موجبا تماما إلى مقلوبه؟

حل للمسألة:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

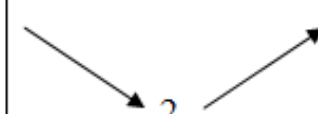
ندرس اتجاه تغير هذه الدالة:

ليكن $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ ؛ لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، إذا إشارة $f'(x)$ من

إشارة $x^2 - 1$ لدينا $f'(1) = 0$

لدينا من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$.

لدينا من أجل كل $x \in]0; 1[$ ، $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]0; 1[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f(x) \geq 2$ و $f(1) = 2$ ومنه الدالة تقبل قيمة حدية صغرى 2 وتبلغها عند 1 وبالتالي أصغر مجموع ممكن لما نضيف عددا موجبا تماما إلى مقلوبه هو 2.

مسألة رقم 02

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ وليكن (cf) تمثيلها البياني في مستوى

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

3- أدرس اتجاه تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها

4- لتكن $\omega(2; -1)$ ، بين أن مركز تناظر (cf) ثم أنشئ (cf)

حل مسألة رقم 02

3- دراسة اتجاه تغيرات الدالة f وإنشاء جدول تغيراتها

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]2; +\infty[$ و $]-\infty; 2[$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $x^2 - 4x + 3$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]3; +\infty[$ ومتناقصة على المجالين $]1; 2[$ و $]2; 3[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$

4- تبين أن ω مركز تناظر لـ (cf) ثم أنشئ (cf)

$\omega(2; -1)$

$\omega(2; -1)$ مركز تناظر لـ (cf) معناه: من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$ ، $(4-x) \in \mathbb{R} - \{2\}$ و $f(4-x) + f(x) = -2$
معناه $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ معناه $x \neq 2$ ومنه $-x \neq -2$ ومنه $(4-x) \neq 2$ ومنه $(4-x) \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$\begin{aligned} f(4-x) + f(x) &= 4-x-3 + \frac{1}{4-x-2} + x-3 + \frac{1}{x-2} \\ &= -2 + \frac{1}{-x+2} + \frac{1}{x-2} = -2 \end{aligned}$$

مسألة رقم 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. أدرس اتجاه تغير f . أحسب $f(-1)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.

2. باستعمال السؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty; 0[$ بـ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{4}{x}$

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. كثير حدود من الدرجة

الثانية جذراه 0 و 2 وبالتالي فإشارته من نفس إشارة (-3) بين الجذرين أي سالبة على المجال $[0; 2]$

لدينا: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 0$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	+
$f(x)$			0	4	

من جدول التغيرات نستنتج أن $f(x) \leq 0$ على $]-\infty; -1]$ و $f(x) \geq 0$ على $[-1; +\infty[$.

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0[$ ولدينا: $g'(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$

إذن إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$ على $]-\infty; 0[$ أي سالبة على $]-\infty; -1]$ وموجبة على $[-1; 0[$.
نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ و متزايدة تماما على $[-1; 0[$.

مسألة رقم 04

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = ax + \frac{b}{4x+2}$ مع a و b عددين حقيقيين.

1. أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- ب- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .
- ج- عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(0) = \frac{7}{2}$ و $f(0) = -\frac{3}{2}$.
- ب- برز أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) > 0$.
- ج- أنجز جدول تغيرات الدالة f .
3. نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- أ- أكتب معادلة لمماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- ج- برهن أن النقطة ω ذات الإحداثيتين $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

حل مسألة

1. أ- $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

ب- لدينا من أجل كل $x \in D_f$ ، $4x+2 \neq 0$ إذن الدالة الناطقة $x \mapsto \frac{b}{4x+2}$ تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ؛ الدالة كثير حدود $x \mapsto ax$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ولدينا مجموع هاتين الدالتين هو الدالة f ؛ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f .

ج- $f'(x) = a - \frac{4b}{(4x+2)^2}$ ؛ $f'(0) = \frac{7}{2}$ معناه $a - b = \frac{7}{2}$ ؛

$f(0) = -\frac{3}{2}$ معناه $\frac{b}{2} = -\frac{3}{2}$ وبالتالي نجد $b = -3$ و $a = \frac{1}{2}$.

ب- معادلة المماس هي $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$.

M نقطة من $\mathcal{C}_f$ حيث $(x; y)$ إحداثيتها في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و $(x'; y')$ إحداثيتها في المعلم $(\omega; \vec{i}; \vec{j})$ من

$\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\omega}$ ينتج $x' = x + \frac{1}{2}$ و $y' = y + \frac{1}{4}$ ثم نجد $y' = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{x'}$ ؛ $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$ ؛

ونبرهن أن الدالة $g: x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$ هي فردية.

$$g(-x) = \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{2}(x) - \frac{1}{x}\right) = -g(x)$$

اذن النقطة o ذات الإحداثيتين $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

مسألة رقم 05

a و b عدنان حقيقيان. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ نسمي $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في معلم.

هل يوجد عدنان a و b حيث تكون لمماس المنحنى $\mathcal{C}_f$ ، معادلة $y = 4x + 3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 ؟

حل مسألة

تكون لمماس المنحنى $\mathcal{C}_f$ ، معادلة $y = 4x + 3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 إذا فقط إذا كان $f(0) = 3$ و $f'(0) = 4$ أي $b = 3$ و $f'(0) = 4$.

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - (3x^3 + ax + 3)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \text{ ومنه } f'(0) = a \text{ وبالتالي } a = 4 \text{ و } b = 3.$$

مسألة رقم 06

ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .
المستقيم T ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ ، هو المماس للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند النقطة $A(0; 2)$.
1) حدد $f(0)$ و $f'(0)$.

2) فسر هندسيا العدد $\frac{f(x) - 2}{x}$ من أجل $x \neq 0$.

3) برر وجود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$.

حل مسألة

1) $f(0) = 2$ و $f'(0) = -3$.

2) العدد $\frac{f(x) - 2}{x}$ من أجل $x \neq 0$ هو معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $M(x; f(x))$.

3) لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = f'(0) = -3$.

مسألة رقم 07

$\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2; 3)$. T المماس للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A والموازي للمستقيم ذي المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$. أكتب معادلة للمستقيم T .

حل مسألة

لدينا $3x - 2y + 1 = 0$ معناه $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ ومنه معامل توجيه المستقيم T هو $\frac{3}{2}$ إذن معادلة للمستقيم T هي

$$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 3 \text{ أي } y = \frac{3}{2}x + 6.$$

مسألة رقم 08 يجب التنبه على قابلية الاستغاف على اليمين و اليسار

$\mathcal{C}_f$ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^2 + |x - 1|$.

(1) أثبت أنه من أجل $h \neq 0$ لدينا: $\frac{f(1+h)-1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$.

(2) هل العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

(3) أعط تفسيراً هندسياً للجواب عن السؤال (2) ؛ ثم أكتب معادلتى نصفي المماسين للمنحنى $\mathcal{C}_f$ في هذه الحالة.

حل مسألة

(1) من أجل $h \neq 0$ لدينا: $\frac{f(1+h)-1}{h} = \frac{(1+h)^2 + |h| - 1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$.

(2) لدينا $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 1$ ومنه $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$.

لا تقبل الاشتقاق عند 0. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 3$ إذن العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 أي الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

(3) المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(0;1)$ ؛ معادلتيهما $y = x + 1$ و $y = 3x + 1$.
ملاحظة:

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين وعلى يسار a حيث العددين المشتقين هما على الترتيب l_1 و l_2 وهما مختلفين فإن منحنى الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(a; f(a))$ معادلتيهما على الترتيب $y = l_1(x - a) + f(a)$ و $y = l_2(x - a) + f(a)$.

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
ثم هذا العمل بفضل من الله
تمن هذه المجلة دعوة خير

الى مجلة اخرى ان شاء الله

تجدون صفحة Top Maths على المنصات التالية



النجاح لا يحتاج إلى كثير من العلم ولكنه
يحتاج إلى الحكمة، الصبر، الذكاء، الاخلاق
وفقكم الله لما يحب ويرضى

كُتُبُ

"اللهم صل على محمد وعلى آل محمد كما صليت على إبراهيم وعلى آل إبراهيم إنك
حميد مجيد . اللهم بارك على محمد وعلى آل محمد كما باركت على إبراهيم وعلى آل
إبراهيم إنك حميد مجيد ."

لا تنسونا من صالح الدعاء



هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله، وإِن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان