

## ثانوية مقدم محفوظ بقادرية ولاية البويرة سلسلة تمارين الاحتمالات المستوى النهائي

### (1) تمارين للفهم : احتمال حادثة -الحوادث المستقلة- الاحتمال الشرطي - شجرة الاحتمالات

#### التمرين (1):

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 الى 6، ونسجل ما يظهر على الوجه العلوي للزهرة. نعتبر الحوادث التالية:

A " الحصول على رقم قابل للقسمه على 5 " B " الحصول على رقم قابل للقسمه على 3 "

C " الحصول على رقم زوجي " D " الحصول على رقم فردي "

E " الحصول على رقم قابل للقسمه على 3 وزوجي "

(1) عين الحوادث: A و B و C و D و E

(2) قارن بين الحادثتين C و D

(3) هل الحادثتين A و C غير متلائمتين ؟

(4) نفس السؤال للحادثتين A و B

#### حل التمرين (1)

(1) مجموعة الإمكانات  $\Omega$  هي  $\{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{5\}$  ،  $B = \{3,6\}$  ،  $C = \{2,4,6\}$

$D = \{1,3,5\}$  ،  $E = \{6\}$

(2) - المقارنة بين الحادثتين C و D

نلاحظ أن  $\overline{C} = D$  و  $\overline{D} = C$

ومنه الحادثتين C و D متعاكستان لان  $C \cup D = \Omega$  و  $C \cap D = \emptyset$

(3) -  $A \cap C = \{6\}$  اذن الحادثتين A و C متلائمتان

(4)  $A \cap B = \emptyset$  اذن الحادثتين A و B غير متلائمتين

#### التمرين (2)

زهرتي نرد غير مزيفتين لونهما مختلفان و أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 .

نرمي هذين النردين و نسجل الرقمين الذين يظهران على الوجهين العلويين .

(1) - عين على شكل جدول مجموعة إمكانات الحدوث .

(2) - عين الحوادث التالية :

A : ظهور رقمين فرديين

$B$  : ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7 .

$C$  : ظهور رقمين أوليان .

$D$  : ظهور رقمين أحدهما فردي و الآخر زوجي .

$A \cap B$  ,  $A \cap C$  ,  $\overline{B}$  ,  $\overline{D}$  ,  $\overline{B \cap D}$

(3) - أحسب احتمالات كلا من الحوادث السابقة .

## حل التمرين (2)

(1) - تعيين في جدول مجموعة إمكانات الحوادث : ليكن النردين  $D_1$  و  $D_2$

| $D_1 \backslash D_2$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                    | (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) |
| 2                    | (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) |
| 3                    | (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) |
| 4                    | (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) |
| 5                    | (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) |
| 6                    | (6;1) | (6;2) | (6;3) | (6;4) | (6;5) | (6;6) |

(2) - تعيين الحوادث :

$$A = \{(1;1), (1;3), (3;1), (1;5), (3;3), (3;5), (5;1), (5;3), (5;5)\}$$

$$B = \left\{ (2;6), (3;5), (3;6), (4;5), (4;6), (5;5), (5;6), (6;2), (5;3) \right. \\ \left. (5;4), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6) \right\}$$

$$C = \{(2;2), (2;3), (2;5), (3;2), (3;3), (3;5), (5;2), (5;3), (5;5)\}$$

$$D = \{ (1;2), (1;4), (1;6), (2;1), (2;3), (2;5), (3;2), (3;4), (3;6) \\ (4;1), (4;3), (4;5), (5;2), (5;4), (5;6), (6;1), (6;3), (6;5) \}$$

$$A \cap B = \{(3;5), (5;3), (5;5)\}$$

$$\overline{B} = \{ (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (3;1) \\ (3;2), (3;3), (3;4), (5;1), (4;1), (4;2), (4;3), (5;1), (5;2), (6;1) \}$$

$$\overline{B \cap D} = \{ (1;1), (1;3), (1;5), (2;2), (2;4), (3;1), (3;3), (4;2), (5;1) \}$$

(3) - حساب الاحتمالات :

$$p(A) = \frac{9}{36} = \frac{3}{12} \quad , \quad p(B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$p(C) = \frac{9}{36} = \frac{3}{12} \quad , \quad p(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad ; \quad p(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p(\bar{B} \cap \bar{D}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad p(\bar{B}) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \quad ; \quad p(\bar{D}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

### التمرين (3)

$A$  و  $B$  حادثتان حيث :  $p(A) = \frac{1}{2}$  و  $p(B) = \frac{3}{4}$  و  $p(A \cap B) = \frac{2}{5}$

(1) أحسب  $p_B(A)$  و  $p_A(B)$

(2) أحسب  $p(\bar{A} \cap \bar{B})$  ثم استنتج  $p_A(\bar{B})$

### حل التمرين (3) :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15} \quad \text{و} \quad p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) \quad \text{ومنه} \quad (2)$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B)) = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{20}$$

$$p_A(\bar{B}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - p(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$$

### التمرين (4)

في ثانوية توزيع تلاميذ السنة النهائية حسب الجنس معطي في الجدول التالي :

| السن \ الجنس | أقل من 18 سنة | 18 سنة | أكثر من 18 سنة | المجموع |
|--------------|---------------|--------|----------------|---------|
| بنات         | 5             | 30     | 25             | 60      |
| ذكور         | 0             | 20     | 20             | 40      |
| المجموع      | 5             | 50     | 45             | 100     |

نختار تلميذا عشوائيا:

(1) أحسب احتمال أن يكون التلميذ عمره 18 سنة  $P(A)$

(2) أحسب احتمال أن تكون بنتا  $P(B)$

(3) أحسب احتمال أن يكون بنتا وعمرها 18 سنة  $P(A \cap B)$

(4) أحسب الاحتمالات :  $P_B(A)$  و  $P_A(B)$  و  $P(B) \times P(A)$  ماذا تلاحظ ؟

#### حل التمرين (4):

(1) احتمال أن يكون التلميذ عمره 18 سنة  $P(A) = \frac{50}{100} = 0,5$

(2) احتمال أن تكون بنتا :  $P(B) = \frac{60}{100} = 0,6$

(3) احتمال أن يكون بنتا وعمرها 18 سنة :  $P(A \cap B) = \frac{30}{100} = 0,3$

(4) حساب الاحتمالات :  $P_B(A)$  و  $P_A(B)$  و  $P(B) \times P(A)$  :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \quad \text{أو} \quad P_B(A) = \frac{30}{60} = 0,5$$

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \text{أو} \quad P_A(B) = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$$

#### التمرين (5)

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرة واحدة في الهواء ونراقب الوجه العلوي للزهرة .

نعتبر الحادثتين : "A" الحصول على رقم زوجي و "B" الحصول على رقم أكبر من أو يساوي 3

احسب  $P(A)$  و  $P(B)$

#### حل التمرين (5)

مجموعة الإمكانات هي :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{و} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

احتمال كل عنصر من  $\Omega$  هو  $P_i = \frac{1}{6}$  مع  $i \in \{1, \dots, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

#### التمرين (6)

نرمي زهرة نرد مغشوشة بحيث : احتمال الحصول على الرقمين 4 و 5 متساو وهو ضعف احتمال الحصول على

احد الرقمين 2 ؛ 3 وهو  $\frac{2}{3}$  احتمال الحصول على احد الرقمين 1؛ 6 .

ما احتمال الحصول على رقم زوجي ؟

### حل التمرين (6):

نضع  $P(\{4\}) = P(\{5\}) = \alpha$  ومنه قانون احتمال  $P$  معطى حسب الجدول التالي :

| $x_i$        | 1                   | 2                  | 3                  | 4              | 5              | 6                   |
|--------------|---------------------|--------------------|--------------------|----------------|----------------|---------------------|
| $P(\{x_i\})$ | $\frac{2}{3}\alpha$ | $\frac{\alpha}{2}$ | $\frac{\alpha}{2}$ | $\alpha$       | $\alpha$       | $\frac{2}{3}\alpha$ |
|              | $\frac{2}{13}$      | $\frac{3}{26}$     | $\frac{3}{26}$     | $\frac{3}{13}$ | $\frac{3}{13}$ | $\frac{2}{13}$      |

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\alpha = \frac{3}{13} \text{ معناه } \frac{13}{3}\alpha = 1 \text{ معناه } \frac{2}{3}\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha + \frac{2}{3}\alpha = 1$$

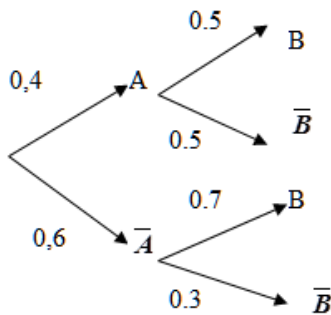
نسمي  $A$  الحادثة : احتمال الحصول على رقم زوجي .

$$P(A) = P\{2;4;6\} = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{26} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \text{ ومنه :}$$

### التمرين (7)

فريق لكرة القدم احتمال فوزه على منافسه هو 0,7 إذا لم تمطر و 0,5 إذا أمطرت  
فإذا كان احتمال سقوط المطر في يوم المباراة حسب الأرصاد الجوية هو 0,4 ، فما هو احتمال فوز الفريق على منافسه  
عندئذ ؟

### حل التمرين (7):



ليكن  $A$  هو الحادث "سقوط المطر"  $p(A) = 0,4$

$\bar{A}$  هو الحادث "عدم سقوط المطر"  $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

وليكن  $B$  هو الحادث "فوز الفريق" :

من الشجرة نجد ان احتمال الفوز هو :

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

$$p(B) = 0,4 \times 0,5 + 0,6 \times 0,7 = 0,62$$

### التمرين (8)

اجري استبيان في أقسام إحدى الثانويات فأعطى النتائج التالية:

20% من تلاميذ الثانوية يمارسون كرة اليد . 60% من تلاميذ الثانوية يمارسون كرة الطائرة .

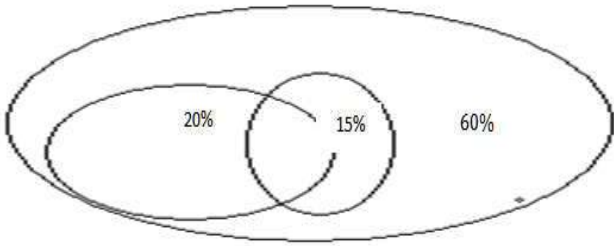
15% من تلاميذ الثانوية يمارسون كرة اليد و كرة الطائرة معا .

سئل عشوائيا تلميذ من هذه الثانوية . ما احتمال أن يكون :

(1) - هذا التلميذ يمارس كرة اليد أو كرة الطائرة .

(2) - هذا التلميذ لا يمارس كرة اليد ولا يمارس كرة الطائرة.

### حل التمرين (8)



لنمثل الوضعية بالمجموعات :

نعتبر الحوادث التالية :

$A$  "مجموعة التلاميذ الذين يمارسون كرة اليد"

$B$  "مجموعة التلاميذ الذين يمارسون كرة الطائرة"

$C$  "مجموعة التلاميذ الذين يمارسون كرة اليد والطائرة"

(1) الحادث  $A \cup B$  (التلميذ يمارس كرة اليد أو كرة الطائرة) هو

$$\text{لدينا: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,15 \quad \text{و} \quad P(A) = 0,2 \quad P(B) = 0,6$$

$$\text{إذن: } P(A \cup B) = 0,2 + 0,6 - 0,15 = 0,65$$

(2) الحادث: (التلميذ لا يمارس كرة اليد ولا يمارس كرة الطائرة) هو الحادث المعاكس لـ  $A \cup B$

$$p(C) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35 \quad \text{ومنه} \quad p(C) = \overline{p(A \cup B)}$$

### التمرين (9):

يحتوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع ( أي

بعد كل سحبة نعيد الكرة إلى الصندوق ) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على

ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

(1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

(2) نعيد التجربة هذه المرة لكن دون إرجاع الكرة المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

- ما احتمال الحادثة  $A$  " الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

### حل التمرين (9):

(1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد ( هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل

كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد )

و بالتالي هناك  $5 \times 5 \times 5 = 125$  عددا ممكنا

(2) في الحالة الثانية هناك  $5 \times 4 \times 3 = 60$  عددا ( حيث أن الأرقام مختلفة مثلى مثلى ، الكرة المسحوبة لا ترجع )

- المخرج الذي يحقق الحادثة  $A$  " الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 " :

يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي

$$4 \times 1 \times 3 = 12 \quad \text{حالة ملائمة و بالتالي: } P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

### التمرين (10):

صندوق يحوي خمس قريصات مرقمة بالأرقام 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 و ثلاث قريصات مرقمة بالأرقام 1 ، 3 ، 5 لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع قريصتين من الصندوق ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

### حل التمرين (10):

نسمي A الحادثة " القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا " و B الحادثة " القريصة الثانية تحمل رقما زوجيا " واضح أن  $p(A) = \frac{5}{8}$  و نريد حساب  $p(A \cap B)$  اي  $p(A) \times p(B / A)$  حسب التعريف

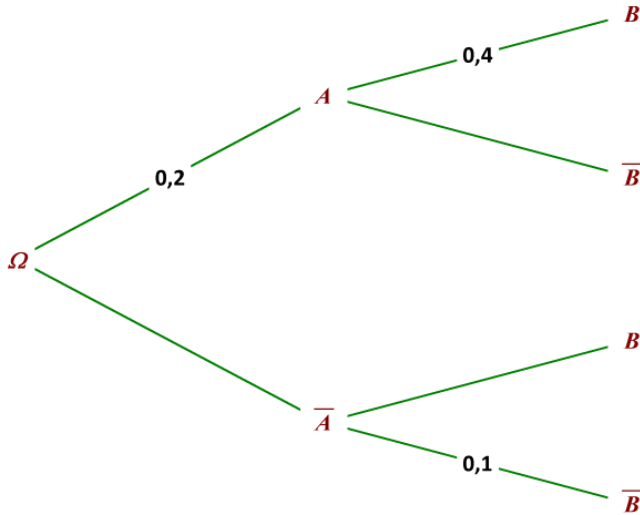
و  $p(B / A)$  هو احتمال سحب رقما زوجيا من الصندوق الذي بقي فيه أربعة أرقام زوجية من بين 7 أرقام

$$p(B / A) = \frac{4}{7} \text{ أي}$$

$$p(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \text{ و بالتالي}$$

### التمرين (11)

نعتبر شجرة الإحتمالات التالية



(1) أكمل شجرة الإحتمالات

(2) ماذا تمثل الإحتمالات التالية :  $p_A(B)$  و  $p_{\bar{A}}(B)$

؟

(3) عيّن :  $p(A \cap B)$  و  $p(\bar{A} \cap B)$

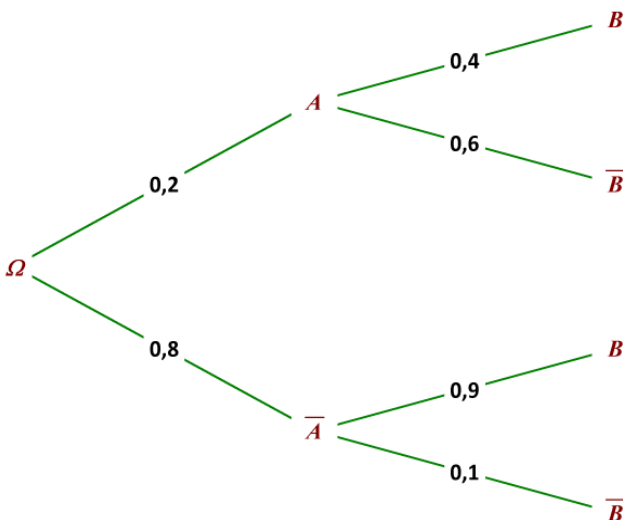
(4) إستنتج  $p(B)$

### حل التمرين (11):

(1) نكمل الشجرة باستعمال القواعد الخاصة بالشجرة

(2) بقراءة فروع الشجرة نجد :  $p_A(B) = 0,4$

و  $p_{\bar{A}}(B) = 0,9$



(3) من الشجرة و باستعمال خاصية الفرع والطريق او المسلك من الشجرة نجد :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$$

$$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$$

(4) من الشجرة و باستعمال الخاصية المتعلقة بمجموع إحتتمالات الطرق المؤدية إلى الحادث نجد :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) + p_A(B) \times p(A) = 0,2 \times 0,4 + 0,8 \times 0,9 = 0,72 + 0,08 = 0,8$$

### التمرين (12)

يحتوي وعاء على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات خضراء، نسحب من هذا الوعاء كرتين على التوالي بدون ارجاع الكرة الى الكيس قبل السحب الموالي

(1) استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة هذه الوضعية

(2) احسب احتمال تحقق كل من الحدثين  $A$  و  $B$  حيث:

$A$ : "الحصول على اللونين معا "

$B$ : "الحصول على لون واحد "

(3) نسحب في هذه المرة ثلاث كرات على التوالي , احسب احتمال الحادثتين  $A$  و  $B$

### حل التمرين (12):

عند نمذجة الوضعية المطروحة في هذا لتمرين نعد شجرة الاحتمالات كما هي مبينة في المخطط المقابل، حيث يشير الحرف R إلى كرة حمراء ويشير الحرف V إلى كرة خضراء.

(أ) حساب احتمال الحادثة  $A$ :

الحادثة  $A$ : "الحصول على اللونين معا "

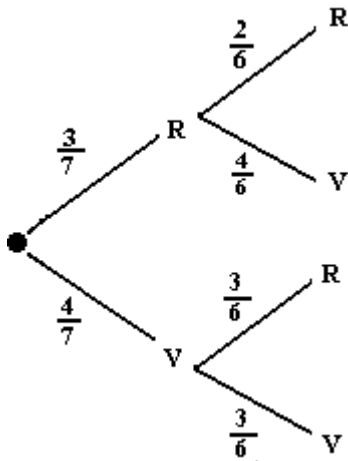
أي سحب كرة حمراء وأخرى خضراء بغض النظر عن اللون الذي يظهر أولاً.

هذا الحادث يتكون من مسارين  $(R; V)$  و  $(V; R)$ .

احتمال تحقق المسار  $(R; V)$  هو  $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$  و احتمال تحقق المسار  $(V; R)$

$$\text{هو } \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

العدد  $\frac{3}{7}$  هو احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الأول



و العدد  $\frac{4}{6}$  هو احتمال شرطي وهو احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني علما أن السحب الأول أعطى كرة حمراء

$$p(A) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

(ب) حساب احتمال الحادثة **B** :

الحادثة **B** هي : " الحصول على لون واحد " أي كرتين من لون أحمر أو كرتين من لون أخضر .  
هذا الحادثيتكون من مسارين  $(R; R)$  و  $(V; V)$  .

$$\text{احتمال تحقق المسار } (R; R) \text{ هو } \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \text{ و احتمال تحقق المسار } (V; V) \text{ هو } \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$p(B) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

(3) سحب ثلاث كرات على التوالي بدون ارجاع : هذه الوضعية تتمذج بالشجرة كما يلي:

(أ) حساب احتمال الحادثة **A** :

" الحصول على اللونين معا " أي كرة حمراء وكرتين خضراوين أو كرتين حمراوين وكرة خضراء

الحادثة **A** تتكون من 6 مسارات  $(R; R; V)$  ،  $(R; V; R)$  ،

$(V; R; R)$  ،  $(R; V; V)$  ،  $(V; R; V)$  ،  $(V; V; R)$  .

$$p(A) = \left( \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \right) + \left( \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \right) + \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \right) + \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \right) = \frac{180}{210} = \frac{6}{7}$$

(ب) حساب احتمال الحادثة **B** :

" الحصول على لون واحد " أي ثلاث كرات حمراء أو 3 كرات خضراء

الحادثة **B** تتكون من مسارين هما  $(R; R; R)$  ،  $(V; V; V)$  .

$$p(B) = \left( \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \right) = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

ملاحظة : يمكن ملاحظة ان الحادثة **B** هي الحادثة المعاكسة للحادثة **A**

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{180}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

**التمرين (13):**

في ثانوية يوجد 250 تلميذ يدرسون لغة أجنبية ثانية يتوزعون حسب اختيارهم لهذه اللغة ؛ كما يوضحه الجدول التالي :

| الترددات<br>(التواترات) | الانجليزية | الإيطالية | الاسبانية | المجموع |
|-------------------------|------------|-----------|-----------|---------|
| الذكور                  | 0.20       | 0.044     | 0.156     | 0.40    |
| الاناث                  | 0.12       | 0.156     | 0.324     | 0.60    |
| المجموع                 | 0.32       | 0.20      | 0.48      | 1       |

في تجربة عشوائية نختار تلميذا واحدا عشوائيا .

نعتبر الحوادث التالية :

$A$  : "التلميذ المختار يدرس الإنجليزية"  $F$  : "التلميذ المختار أنثى"

$G$  "التلميذ المختار ذكر"  $T$  "التلميذ المختار يدرس الإيطالية"  $E$  "التلميذ المختار يدرس الاسبانية"

(1) أحسب الاحتمال الذي نرمز له  $P_F(A)$  والذي يعني أن التلميذ يدرس الإنجليزية علما أنه أنثى

(2) شكل شجرة الاحتمالات مبرزا فيها الحادثتين  $F$  و  $G$  في الفرعين الأولين والحوادث  $A$  و  $T$  و  $E$  في الفروع التالية لهما

### حل التمرين (13) :

عدد التلاميذ الاناث في الثانوية هو :

$$150 = 0.60 \times 250 \text{ أي } 150 \text{ تلميذة}$$

عدد التلميذات اللاتي تدرسن الإنجليزية هو :

$$30 = 0.12 \times 250 \text{ أي } 30 \text{ تلميذة}$$

$$\text{اذن } P_F(A) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ هذا}$$

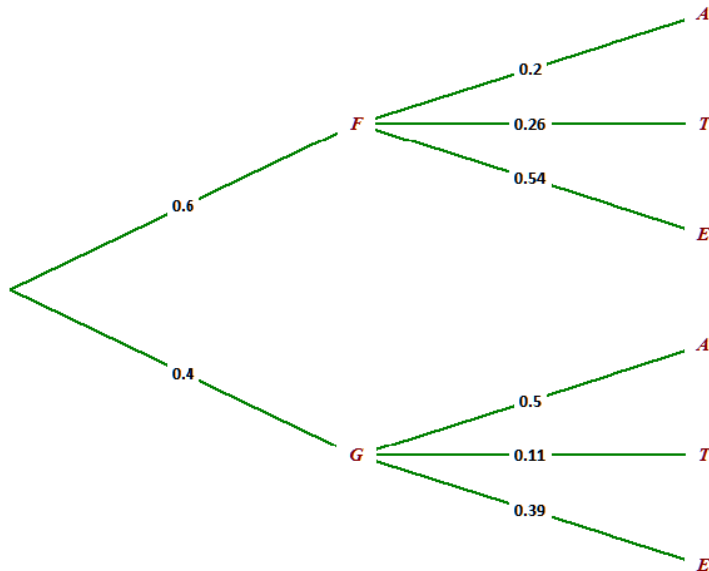
$$\text{الاحتمال يساوي أيضا : } \frac{0.12}{0.6} = 0.2 \text{ أي}$$

$$\frac{P(A \cap F)}{P(F)}$$

(2) شجرة الاحتمالات : في المستوى الأول

$$\text{لدينا } P(F) = 0.6 \text{ و } P(G) = 0.4$$

في المستوى الثاني نسجل احتمالات الحوادث :  $A$  و  $T$  و  $E$  علما ان الحادثتين  $F$  و  $G$  قد تحققت .



$$P_G(T) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{0.044}{0.4} = 0.11 \quad \text{و} \quad P_F(A) = \frac{0.12}{0.6} = 0.2 \quad \text{مثلا :}$$

$$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{0.156}{0.4} = 0.39 \quad \text{أي} \quad P(E \cap G) = P_G(E) \times P(G) \quad \text{و}$$

### التمرين (14):

يحتوي كيس ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين. نسحب عشوائيا عددا من الكرات على التوالي دون إرجاع. نعتبر الحوادث التالية:

$M$ : "الكرتان مختلفتا اللون".

$N$ : "كرة على الأكثر حمراء".

(1) إذا كان عدد الكرات المسحوبة اثنتين، هل الحادثتان  $M$  و  $N$  مستقلتان.

(2) إذا كان عدد الكرات المسحوبة ثلاثة، هل الحادثتان  $M$  و  $N$  مستقلتان.

### حل التمرين (14):

(1) سحب كرتين :

نرمز للكرة البيضاء بالحرف  $B$  و للحمراء بـ  $R$

مجموعة النتائج هي :  $E = \{(B, B), (B, R), (R, B), (R, R)\}$

$$p(M).p(N) = \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \quad \text{ولدينا} \quad p(M) = \frac{2}{4} \quad \text{و} \quad p(N) = \frac{3}{4}$$

$$p(M \cap N) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن:} \quad M \cap N = \{(B, R), (R, B)\}$$

نلاحظ ان  $p(M \cap N) \neq p(M).p(N)$  إذن  $M, N$  غير مستقلتين

(2) سحب ثلاث كرات تكون مجموعة النتائج:

$$E = \{(B, B, B), (B, B, R), (B, R, B), (R, B, B), (B, R, R), (R, B, R), (R, R, B), (R, R, R)\}$$

$$p(M).p(N) = \frac{3}{8} \quad \text{و منه} \quad p(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad ; \quad p(N) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p(M \cap N) = \frac{3}{8} \quad , \quad M \cap N = \{(B, B, R), (B, R, B), (R, B, B)\}$$

نلاحظ أن  $p(M \cap N) = p(M).p(N)$  إذن  $M$  و  $N$  حادثتان مستقلتان

### التمرين (15)

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء  $R$  و 3 كرات خضراء  $V$  و كرتين سوداء  $N$

نسحب عشوائيا من الكيس كرة واحدة

(1) عين قانون الاحتمال لهذه التجربة

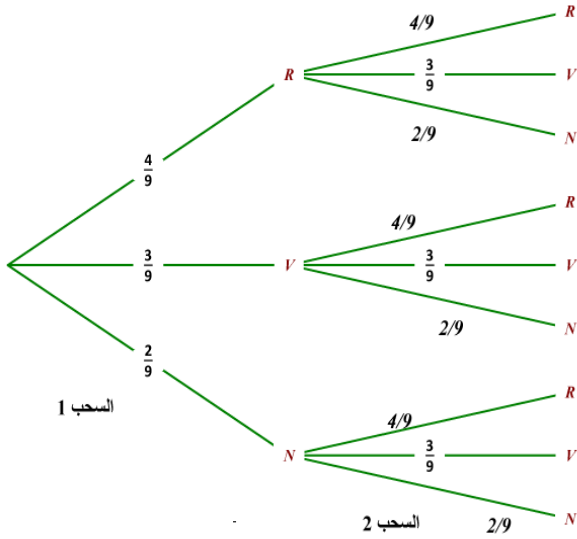
(2) نعيد هذه التجربة مرتين , بحيث نعيد الكرة الأولى المسحوبة الى الكيس قبل السحب الموالي . التجريتان متماثلتان ومستقلتان

(أ) شكل شجرة كل المخارج للسحب الأول والثاني مبينا احتمال كل مخرج في كل فروع الشجرة

(ب) ليكن الحادث التالي :  $S$  " الحصول على كرة واحدة حمراء فقط " , أحسب  $P(S)$

### حل التمرين (15) :

(1) مجموع الكرات في الكيس هو : 9 كرات



| المخرج   | R             | V             | N             |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| الاحتمال | $\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

احتمال سحب كرة حمراء هو :  $P(R) = \frac{4}{9}$

احتمال سحب كرة خضراء هو :  $P(V) = \frac{3}{9}$

احتمال سحب كرة سوداء هو :  $P(N) = \frac{2}{9}$

(2) (أ) شجرة المخارج للتجريتين : سحب كرتين على التوالي بالارجاع

(ب) حساب :  $P(S)$  وهو الحادث الذي يتحقق بالمخارج التالية :  $(R, V)$  و  $(R, N)$  و  $(V, R)$  و  $(N, R)$

هذا الاحتمال هو مجموع احتمالات كل مخرج تكون فيه الكرة المسحوبة حمراء

$$P(S) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{81}$$

### التمرين (16) :

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء . نسحب من الكيس كرتين على التوالي بحيث : بعد كل سحب نعيد

الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

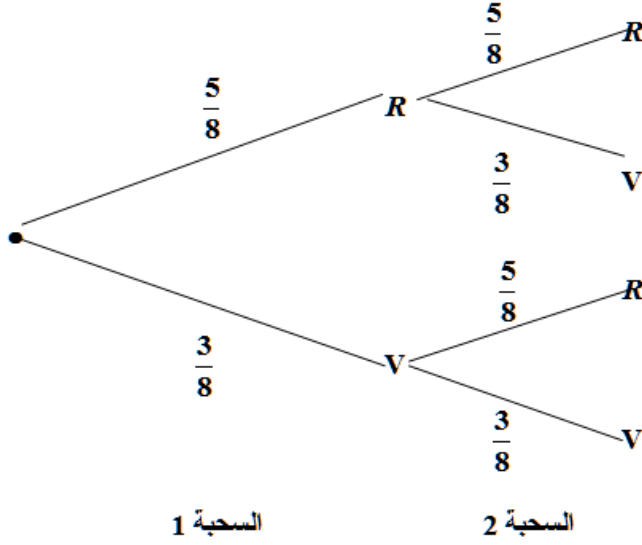
استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة هذه التجربة العشوائية .

(1) ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

(2) ما احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني .

### حل التمرين (16) :

توضيح حول الشجرة:



### السحبة 1:

عند سحب كرة من الكيس نحصل إما على كرة حمراء  $R$  أو كرة خضراء  $V$  كما هو موضح على الشجرة و لدينا :  $p(R) = \frac{5}{8}$  ( نسحب 5 كرات حمراء من بين 8 كرات ) و لدينا :  $p(V) = \frac{3}{8}$  ( نسحب 3 كرات خضراء من بين 8 كرات )

### السحبة 2 :

بعد سحب الكرة الأولى من الكيس ثم إعادتها للكيس نسحب كرة أخرى .  
فإذا كانت الكرة المسحوبة في أول سحبة هي  $R$  فإن السحبة الثانية هي إما  $R$  أو  $V$  كما يظهر على الشجرة و لدينا :  
 $p_R(R) = \frac{5}{8}$  أي احتمال ظهور  $R$  علما أننا تحصلنا على  $R$  في السحبة 1 .  
و لدينا :  $p_R(V) = \frac{3}{8}$  أي احتمال ظهور  $V$  علما أننا تحصلنا على  $R$  في السحبة 1 .  
و نفس الشيء إذا كانت السحبة الأولى هي  $V$  فلدينا  $R$  أو  $V$  في السحبة الثانية .  
(1) احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون أي  $(R; R)$  أو  $(V; V)$   
و ليكن  $p_1$  :  $p_1 = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$  أي  $(R; R)$  أو  $(V; V)$   
(2) احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني أي :  $(R; V)$  أو  $(V; V)$   
و ليكن  $p_2$  :  $p_2 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

### التمرين (17) :

يضم كيس أربع كرات بيضاء و ثمان كرات حمراء .

1- نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع . هل الحادثتان  $B_1$  و  $B_2$  مستقلتان ؟

$B_1$  " الكرة الأولى بيضاء " ،  $B_2$  " الكرة الثانية بيضاء "

2- نسحب الآن عشوائيا كرتين على التوالي مع الإرجاع . هل الحادثتان  $B_1$  و  $B_2$  مستقلتان ؟

### حل التمرين (17)

$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11} , \quad p(B_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{44}{132} = \frac{1}{3} , \quad p(B_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

بما أن  $\frac{1}{11} \neq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$  فإن الحادثتين  $B_1$  و  $B_2$  غير مستقلتين

$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{9} \quad , \quad p(B_2) = \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{48}{144} = \frac{1}{3} \quad , \quad p(B_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

بما أن  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$  فإن الحادثتين  $B_1$  و  $B_2$  مستقلتان

### التمرين (18)

في قسم من مدرسة يوجد درجان يحويان قريصات ,  
الدرج الأول يحوي قريصتين سوداء و 3 حمراء , والدرج الثاني يحوي : 3 قريصات سوداء و 5 حمراء  
نختار عشوائيا درجا فنسحب قريصة واحدة عشوائيا  
نعتبر الحوادث التالية :  $U_1$  " القريصة مسحوبة من الدرج الأول " و الحادث :  $R$  " القريصة المسحوبة حمراء "  
الحادث :  $U_2$  " القريصة مسحوبة من الدرج الثاني "

(1) شكل شجرة المخارج

(2) بين ان احتمال الحادث  $R$  علما ان الحادث  $U_1$  تحقق هو العدد :  $\frac{3}{5}$

(3) أكمل الشجرة مبينا فيها احتمال كل مخرج من المخارج

حل التمرين (18) :

(1) تشكيل الشجرة

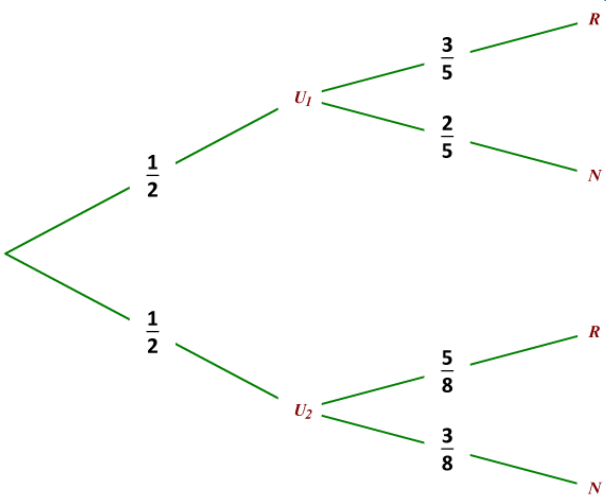
(2) توجد 3 قريصات حمراء في الدرج الأول من بين 5

قريصات

اذن احتمال سحب قريصة حمراء من الدرج الأول

$$P_{U_1}(R) = \frac{3}{5} \text{ هو}$$

(3) تكلمة الاحتمالات



### التمرين (19)

في ثانوية يوجد 40% من التلاميذ ذكور نصفهم داخليون . إضافة الى هذا 70% من مجموع تلاميذ الثانوية ليسوا

داخليين . نسأل تلميذا عشوائيا من هذه الثانوية و نعتبر الحوادث التالية :

C " التلميذ المختار من جنس ذكر " . A " التلميذ المختار داخلي "

|  |         |           |         |
|--|---------|-----------|---------|
|  | داخلي A | $\bar{A}$ | المجموع |
|--|---------|-----------|---------|

|                    |  |  |     |
|--------------------|--|--|-----|
| الذكور $C$         |  |  | 0,4 |
| ليس ذكور $\bar{C}$ |  |  |     |
| المجموع            |  |  | 1   |

(1) أكمل قيم التواترات في الجدول المقابل .

(2) ما هو احتمال أن يكون التلميذ المختار لا

يكون ذكرا وصفته داخلي ؟

(3) علما أن التلميذ ليس ذكرا , ما هو احتمال ان تكون صفته داخلي

### حل التمرين (19) :

|                    | $A$ داخلي | $\bar{A}$ | المجموع |
|--------------------|-----------|-----------|---------|
| الذكور $C$         | 0,2       | 0,2       | 0,4     |
| ليس ذكور $\bar{C}$ | 0,1       | 0,5       | 0,6     |
| المجموع            | 0,3       | 0,7       | 1       |

(1) من معطيات التمرين

وبحساب الفروق بين التواترات نجد :

$$1 - 0,4 = 0,6$$

و 70 % من مجموع تلاميذ الثانوية

$$\frac{70}{100} = 0,7$$

$$1 - 0,7 = 0,3$$

نصف الذكور داخليون تعني تواترها هو :  $\frac{0,4}{2} = 0,2$  .

(2) احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يكون ذكرا وصفته داخلي هو :  $p(A \cap \bar{C})$

$$p(A \cap \bar{C}) = 0,1$$

(3) احتمال ان تكون صفته داخلي علما أنه ليس ذكرا هو :  $p_{\bar{C}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$

### التمرين (20)

في إحدى حدائق التسلية توجد عجلة كبيرة مقسمة إلى مناطق مرقمة

و ملونة كما هو مبين في الشكل المقابل .يقوم المشرف على هذه اللعبة

بتدوير العجلة التي تتوقف بعد عدة ثواني و يعلن عن الرقم الفائز المحدد بالسهم .

(1) أحسب احتمالات الحوادث التالية :

A " الرقم الفائز مضاعف لـ 5 "

B " الرقم الفائز ليس مضاعفا لـ 5 "

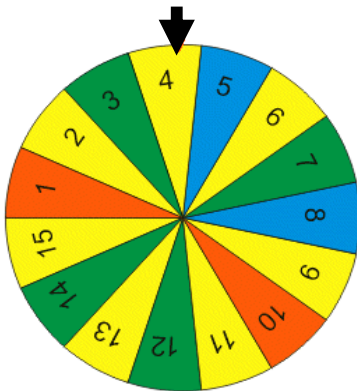
C " الرقم الفائز زوجي و أقل من 11 "

(2) هذه اللعبة تقتضي أن يدفع كل لاعب 10 دنانير ثم يختار رقما واحد

- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه أزرقا يربح اللاعب 100 DA

- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه بنيا يربح اللاعب 50 DA

- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه أخضرا يربح اللاعب 10 DA



- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه أصفرًا لا يربح اللاعب أي شيء .  
 نعتبر  $X$  الربح الحقيقي الذي يجنيه كل لاعب يجرب حظه  
 - عرّف قانون الاحتمال للربح الحقيقي  $X$  و احسب أمله الرياضيائي . هل هذه اللعبة عادلة ؟

### حالات تمرين (20)

(1) لدينا  $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$

عدد الأرقام المضاعفة لـ 5 و الموجودة على العجلة هو 3

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \quad \text{و منه}$$

$$B \text{ هي الحادثة العكسية للحادثة } A \text{ ومنه } p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

ملاحظة :- يمكن حساب  $p(B)$  مباشرة ولكن يفضل الاستفادة مما سبق

$$p(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(2)

| $x_i$        | - 10           | 0              | + 40           | + 90           |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

$$E(X) = (-10) \times \frac{7}{15} + 0 \times \frac{4}{15} + 40 \times \frac{2}{15} + 90 \times \frac{2}{15} = \frac{190}{15} = \frac{38}{3}$$

و بالتالي اللعبة غير عادلة .

تكون اللعبة عادلة إذا كان الأمل الرياضيائي معدوما

### التمرين (21)

نفرض أن احتمال ميلاد ذكر واحتمال ميلاد أنثى في عائلة ما متساويين . احسب احتمال أن يكون في عائلة ذات 4 أفراد

(1) البكر هو الذكر (المولود الأول) .

(2) - عدد الإناث يساوي عدد الذكور

(3) - يوجد إناث فقط

### حل التمرين (21) :

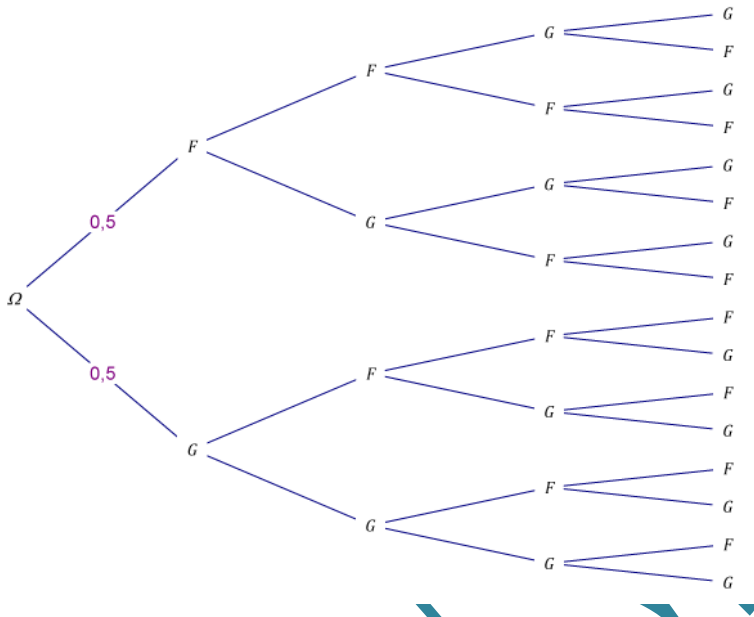
نسمي  $F$  الحادثة " ميلاد أنثى " ونسمي الحادثة  $G$  " ميلاد ذكر "

بما أن احتمال ميلاد بنت تساوي احتمال ذكر إذن :  $P(F) = P(G) = \frac{1}{2}$

يمكن تمثيل هذه الوضعية بشجرة احتمالات:

- إذا كان البكر هو الأنثى  $F$

- إذا كان البكر هو الذكر  $G$



كل "طريق" يمثل إمكانية أو مخرج (يوجد

16 إمكانية متساوية الاحتمال  $\frac{1}{16}$ )

لتكن الحادثة A "البكر هو ذكر" مخرجها

8 و هي :

$GFFF$  و  $GFFG$  و  $GFGF$  و

$GFGG$  و  $GGFF$  و  $GGFG$  و  $GGGF$

و  $GGGG$

$$p(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

لتكن الحادثة B "عدد الإناث يساوي عدد الذكور" مخرجها 6 وهي :

$GGFF$  و  $FGGF$  و  $FGFG$  و  $FFGG$  و  $GGFF$  و  $GFGF$

$$p(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

لتكن الحادثة C "يوجد إناث فقط" مخرج واحد فقط هو  $FFFF$  واحتماله :  $p(C) = \frac{1}{16}$

## التمرين (22)

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و 2 كرات بيضاء غير متميزة عند اللمس.

نسحب عشوائيا 2 كرات على التوالي دون إرجاع و نعتبر أن كل الكرات لها نفس الاحتمال .

(1) مثل الوضعية بواسطة شجرة الاحتمالات .

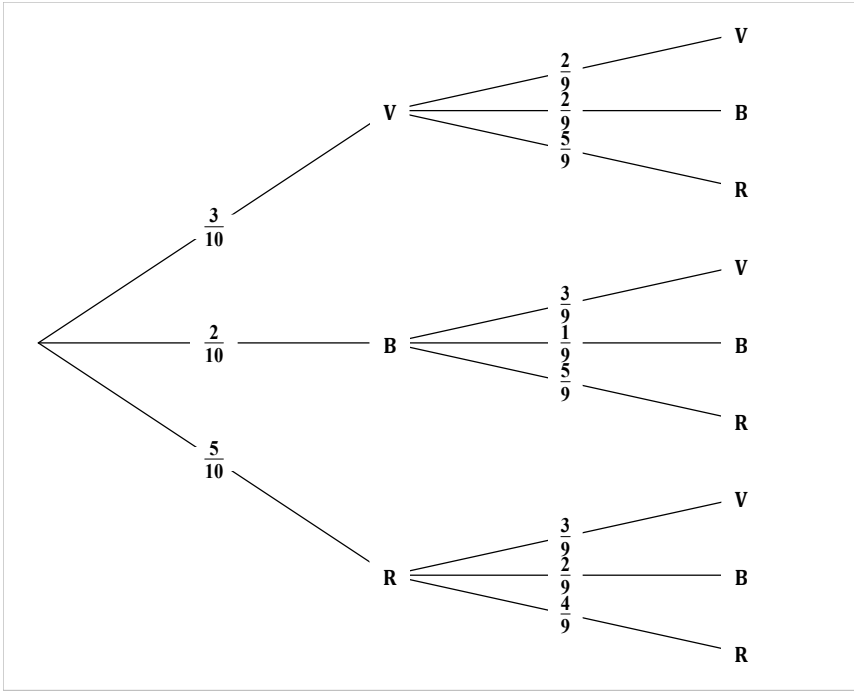
(2) أحسب احتمال الحصول على :

(أ)  $A$  كرتين من نفس اللون .

(ب)  $C$  كرة خضراء في السحب الأول .

(ج)  $D$  اللونين معا .

(3) أحسب احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني .



### حل التمرين (22)

(1) شجرة الاحتمالات: نرمز

ب:  $B$  للكرة البيضاء .

$V$  للكرة الخضراء .

$R$  للكرة الحمراء .

(2) (أ) الحدث  $A$  له ثلاث مسارات :  $V \rightarrow V$  أو  $B \rightarrow B$  أو  $R \rightarrow R$  :

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{14}{45}$$

(ب) الحدث  $C$  له ثلاث مسارات :  $V \rightarrow V$  أو  $V \rightarrow B$  أو  $V \rightarrow R$  :

$$P(C) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{14}{45}$$

(ج) الحدث  $D$  له 5 مسارات :  $V \rightarrow R$  أو  $V \rightarrow B$  أو  $B \rightarrow V$  أو  $B \rightarrow R$  أو  $R \rightarrow V$  :

أو  $V \rightarrow B$  أو  $R \rightarrow B$  :

$$P(D) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{31}{45}$$

$$P(D) = 1 - P(A) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45} \quad \text{طريقة (2): } D = \bar{A} \text{ معناه :}$$

(3) ليكن  $P(E)$  احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني .

الحدث  $E$  له ثلاث مسارات :  $V \rightarrow V$  أو  $B \rightarrow V$  أو  $R \rightarrow V$  :

$$P(E) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$

### التمرين (23) :

يحتوي وعاء على 4 كرات صفراء و 8 كرات خضراء

نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع

(1)- احسب احتمال الحصول على كرة صفراء ثم كرة خضراء .

(أ) احسب احتمال الحصول على كرة خضراء ثم كرة صفراء .

(ب) احسب احتمال الحصول على نفس اللون ( اللونين معا).

(2)- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كلا من الوضعية السابقة و حساب الاحتمالات .

### حل التمرين (23) :

(1)نفرض  $J_1$  حادثة الحصول على كرة صفراء في أول سحب و  $V_1$  حادثة الحصول على كرة خضراء في أول سحب و  $J_2$  حادثة الحصول على كرة صفراء في ثاني سحب و  $V_2$  حادثة الحصول على كرة خضراء في ثاني سحب

$$P(J_1 \cap V_2) = P(J_1) \cdot P_{J_1}(V_2) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P(V_1 \cap J_2) = P(V_1) \cdot P_{V_1}(J_2) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P(J_1 \cap J_2) + P(V_1 \cap V_2) = P(J_1) \cdot P_{J_1}(J_2) + P(V_1) \cdot P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{1}{11} + \frac{14}{33} = \frac{17}{33}$$

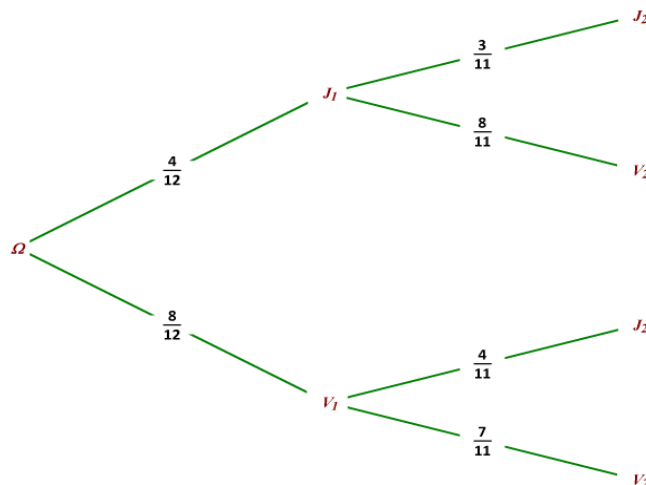
(2)- نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :

$$p(J_1 \cap J_2) = p(J_1) \times p_{J_1}(J_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11} \quad \text{ومنه} \quad p_{J_1}(J_2) = \frac{3}{11} \quad \text{و} \quad p(J_1) = \frac{4}{12}$$

$$p(J_1 \cap V_2) = p(J_1) \times p_{J_1}(V_2) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} = \frac{8}{33} \quad \text{و} \quad p_{J_1}(V_2) = \frac{8}{11} -$$

$$p(V_1 \cap J_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(J_2) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{33} \quad \text{ومنه} \quad p_{V_1}(J_2) = \frac{4}{11} \quad \text{و} \quad p(V_1) = \frac{8}{12}$$

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33} \quad \text{و} \quad p_{V_1}(V_2) = \frac{7}{11} -$$



## (2) تمارين للفهم : المتغير العشوائي - الامل الرياضي

### التمرين (24) :

يضم كيس 5 كرات متماثلة ، 3 منها بيضاء (B) و الباقي سوداء (N). نسحب كرتين عشوائيا و نعتبر  $X$  عدد الكرات البيضاء المحصل عليها ،

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  في كل من الحالات التالية :

(1) سحب كرتين في آن واحد

(2) السحب على التوالي دون إرجاع

(3) السحب على التوالي مع الإرجاع

### حل التمرين (24) :

(1) سحب كرتين في آن واحد:

هنا لا يهم الترتيب و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو  $C_5^2 = 10$  ، كلهم من الشكل  $\{(N; N), (N; B), (B; B)\}$

الحادث  $X = 0$  يعني : الكرتين سوداء وعدد الحالات لسحب كرتين سوداء هي 1 (حالة واحدة )

$$p(N; N) = p(X = 0) = \frac{1}{10}$$

الحادث  $X = 1$  يعني الحصول على كرة بيضاء وبالتالي الأخرى تكون سوداء ومنه :

$$p(N; B) = p(X = 1) = \frac{6}{10}$$

الحادث  $X = 2$  يعني الحصول على كرتين بيضاء ومنه :

$$p(B; B) = p(X = 2) = \frac{3}{10}$$

(2) السحب على التوالي دون إرجاع :

هنا الترتيب مهم و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو 20 ( لسحب الكرة الأولى لدينا 5 اختيارات و إذا ما أردنا سحب الكرة الثانية نجد أمامنا 4 اختيارات مادام الأولى لم تعاد إلى الكيس و بالتالي

$$p(N; N) = p(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

|       |                |                 |                |
|-------|----------------|-----------------|----------------|
| $x_i$ | 0              | 1               | 2              |
| $p_i$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{12}{20}$ | $\frac{6}{20}$ |

$$p((N; B), (B; N)) = p(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{20}$$

$$p(B; B) = p(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

(3) السحب على التوالي مع الإرجاع :

هنا الترتيب مهم و التكرار مسموح ( مادام الكرة المسحوبة تعاد إلى الكيس فيمكن سحبها في المرة الثانية و عليه فأمامنا 5

اختيارات كلما أردنا سحب كرة و بالتالي فعدد المخارج الكلي  $5 \times 5 = 25$  )

|       |                |                 |                |
|-------|----------------|-----------------|----------------|
| $x_i$ | 0              | 1               | 2              |
| $p_i$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{12}{25}$ | $\frac{9}{20}$ |

$$p(N; N) = p(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$p((N; B), (B; N)) = p(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$$p(B; B) = p(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

### التمرين (25)

قطعة نقود صنعت مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف  $A$  ضعف احتمال ظهور الوجه الآخر و الذي يحمل الحرف  $B$ .

(1) أحسب الاحتمالات التالية :

$$p(A \cap B), p(\overline{A}), p(B), p(A)$$

(2) - نفرض أن ظهور الوجه  $A$  يعطي ربح 100 دج و ظهور الوجه  $B$  يعطي خسارة 50 دج .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح أو الخسارة .

(أ) أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير  $X$

(ج) أحسب التباين و الإنحراف المعياري للمتغير  $X$

### حل التمرين (25)

(1) لتكن مجموعة الإمكانات :  $p(\Omega) = 1$  و  $\Omega = \{A, B\}$  و منه  $p(A) + p(B) = 1$

لكن :  $p(A) = 2p(B)$  و منه :  $3p(B) = 1$

إذن :  $p(B) = \frac{1}{3}$  و عليه  $p(A) = \frac{2}{3}$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

حساب  $p(A \cap B)$  :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = 0 \text{ و منه } 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - p(A \cap B)$$

(2) (أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  :

|         |               |               |
|---------|---------------|---------------|
| قيم $X$ | 100           | -50           |
| $p(X)$  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(ب) الأمل الرياضي للمتغير  $X$  :

$$E(X) = 100 \times \frac{2}{3} - 50 \times \frac{1}{3} = \frac{200 - 50}{3} = 50$$

$$V(X) = \frac{2}{3}(100 - 50)^2 + \frac{1}{3}(-50 - 50)^2 = \frac{2}{3}(2500) + \frac{1}{3}(10000) = 5000 \text{ : التباين (ج)}$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad \text{و منه : } \sigma(X) \approx 70,7 \quad \text{لدينا :}$$

### التمرين (26) :

يدفع لاعبان A و B ، 6 و 10 دينارا على الترتيب و يرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 و يدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي .  
- أحسب أمل الربح لكل لاعب .

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| + | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

### حل التمرين (26)

عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي :  $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين

ضعف مجموع الرقمين هو  $S' = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$  :

يدفع اللاعب A ستة دنانير و يأخذ ضعف النتيجة و بالتالي

قيم الربح هي :  $E' = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  (قيم المتغير العشوائي)

قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي :

|       |                |                |                |                |                |                |                |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_i$ | -2             | 0              | 2              | 4              | 6              | 8              | 10             |
| $p_i$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$\sum_{i=1}^7 p_i = 1 \quad \text{و}$$

الأمل الرياضي هو :

$$\mu = \frac{1}{16} \times (-2) + \frac{2}{16} \times (0) + \frac{3}{16} \times (2) + \frac{4}{16} \times (4) + \frac{3}{16} \times (6) + \frac{2}{16} \times (8) + \frac{1}{16} \times (10) = \frac{64}{16} = 4$$

إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينار .

لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم  $x_i$  للاعب A و بالتالي أمل ربحه  $\mu' = \mu - 4 = 0$   
بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة ( لا له و لا عليه )

ملاحظة: • إذا كان الأمل موجبا فاللعبة في صالح اللاعب

• إذا كان الأمل سالبا فاللعبة ليست في صالح اللاعب

• إذا كان الأمل معدوما فاللعبة متوازنة (عادلة)

### التمرين (27) :

نرمي زهرة نرد متجانسة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 بحيث : نربح 10DA إذا ظهر الرقم 1 و نربح 50DA إذا ظهر الرقم 6 ونخسر 20DA إذا ظهر رقم من الأرقام المتبقية الأخرى .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل امكانية قيمة الربح او الخسارة الموافقة لها

(أ) عين قيم المتغير العشوائي

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

(ج) احسب معدل الربح او الخسارة

**حل التمرين (27) :**

(أ) مجموعة المخارج هي :  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ومنه قيم المتغير العشوائي هي  $\{-20, 10, 50\}$

(ب) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

$$p_1 = p(X = 50) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$p_2 = p(X = 10) = p(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$p_3 = p(X = -20) = p(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

|                    |               |               |               |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|
| $X = x_i$          | -20           | 10            | 50            |
| $p_i = p(X = x_i)$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

(ج) معدل الربح او الخسارة هو الامل الرياضي :

$$E(X) = -20 \times \frac{4}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} = \frac{-10}{3}$$

**التمرين (28) :**

يحتوى كيس على 4 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء و 8 كريات صفراء و 5 كريات خضراء . نسحب عشوائيا كرة من الكيس .

ليكن المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل كرة بيضاء العدد 2 و بكل كرة حمراء العدد -3 و بكل كرة صفراء العدد 1 و بكل كرة خضراء العدد -1 .

(1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

(2) احسب كلا من الامل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$  .

**حل التمرين (28) :**

(1) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  : عدد الكريات هو 20

عملية سحب كرة واحدة نتائجها هي : اما بيضاء او حمراء او صفراء او خضراء

$$p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} : \text{احتمال الحصول على كرة بيضاء هو :}$$

$$p_2 = \frac{3}{20} : \text{احتمال الحصول على كرة حمراء هو :}$$

$$p_3 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} : \text{احتمال الحصول على كرة صفراء هو :}$$

احتمال الحصول على كرة خضراء هو :  $p_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

و يكون قانون الاحتمال كما يلي : قيم المتغير العشوائي هي :  $\{2, -3, 1, -1\}$

| قيم $X$      | 2              | -3             | 1              | -1             |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{5}{20}$ |

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  :

$$E(X) = 2 \times \frac{4}{20} + (-3) \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + (-1) \times \frac{5}{20}$$

$$E(X) = 0,1 \quad \text{إذن} \quad E(X) = \frac{8 - 9 + 8 - 5}{20} = \frac{2}{20}$$

- التباين للمتغير العشوائي  $X$  :

$$V(X) = \frac{4}{20}(2-0,1)^2 + \frac{3}{20}(-3-0,1)^2 + \frac{8}{20}(1-0,1)^2 + \frac{5}{20}(-1-0,1)^2$$

$$V(X) = \frac{4}{20} \times 3,61 + \frac{3}{20} \times 9,61 + \frac{8}{20} \times 0,81 + \frac{5}{20} \times 1,21$$

$$V(X) = 2,79 \quad \text{أي} \quad V(X) = \frac{55,8}{20}$$

- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,79} \quad \text{و منه} \quad \sigma(X) \simeq 1,67$$

### التمرين (29)

هياأنا 100ظرف: ‘ظرف واحد يحوي 200دجو 5 اظرفة تحتوي على 100د ج و 10 اظرفة تحتوي على 50 د ج

والباقية فارغة. ننظم لعبة كما يلي :

- شخص يشتري ظرفا ب 20 د ج يختاره عشوائيا ‘ ويربح ما بداخله.

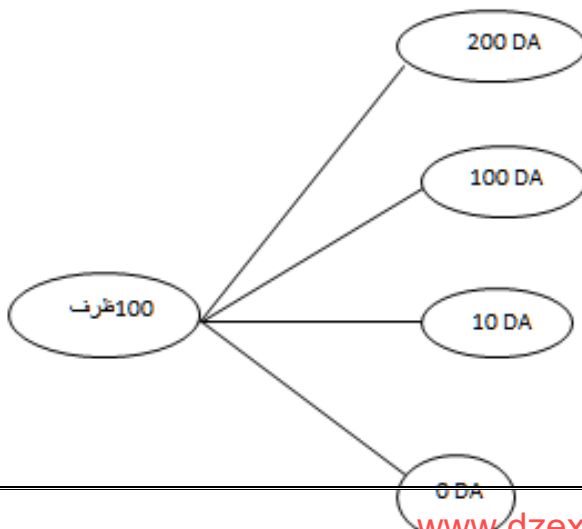
(1)- ادرس قيم  $X$  الربح المفترض ؟ والربح الصافي؟

(2)- هل اللعبة متوازنة؟

### حل التمرين (29):

(1) الظرف المختار إما فارغ أو يحوي

50 د ج او 100دج او 200دج



ومنه قيم  $X \in \{0, 50, 100, 200\}$  هي:

ومنه الربح المفترض هو:  $P(x_i)$

|           |                  |                  |                 |                 |
|-----------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| $X = x_i$ | 0                | 50               | 100             | 200             |
| $P(x_i)$  | $\frac{84}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | $\frac{5}{100}$ | $\frac{1}{100}$ |

والربح الصافي بعد ان يدفع ثمن الظرف وهو 20 دينارا يكون  $P(x_i)$ :

|           |                  |                  |                 |                 |
|-----------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| $X = x_i$ | -20              | 30               | 80              | 180             |
| $P(x_i)$  | $\frac{84}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | $\frac{5}{100}$ | $\frac{1}{100}$ |

يمثل الجدول الأخير قانون توزيع الاحتمال المتعلق بالمتغير  $X$ .

(2) هل اللعبة متوازنة:

لمعرفة ذلك نحسب إمكانيات الربح في احتمال حدوثها وهو ما يعرف بالأمل الرياضي فنجد:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(x_i)$$

$$E(X) = -20 \times (0.84) + 30 \times (0.1) + 80 \times (0.05) + 180 \times (0.01) = -8 (< 0)$$

هذا يعني أنها ليست في صالح اللاعب أي إمكانيات الخسارة أكبر فهي ليست متوازنة

ملاحظة: • إذا كان الأمل موجبا فاللعبة في صالح اللاعب

• إذا كان الأمل سالبا فاللعبة ليست في صالح اللاعب

• إذا كان الأمل معدوما فاللعبة متوازنة

### التمرين (30)

يحتوي صندوق على 37 قرينة مرقمة من 1 إلى 37 لا نميز بينها باللمس ، منها 18 قرينة حمراء

نعتبر اللعبتين التاليتين :

اللعبة الأولى :

يدفع اللاعب 10 دنانير و يسحب قرينة واحدة عشوائيا . إذا كانت القرينة المسحوبة حمراء يربح 10 دنانير و إلا

خسر ما دفعه

اللعبة الثانية

يدفع اللاعب 10 دنانير و يحدّد رقما قبل السحب ثم يسحب القرينة و يربح 350 دينارا إذا كان الرقم المسحوب هو

المحدد سابقا و إلا خسر ما دفعه .

- قارن بين اللعبتين ( الربح المتوسط )

### حل التمرين (30)

اللعبة الأولى :

نعتبر  $X$  متغير عشوائي يمثل مقدار الربح أو الخسارة ومنه قيم  $X$  هي  $\{-10; 10\}$   
قانون الاحتمال للمتغير  $X$  هو :

|              |                 |                 |
|--------------|-----------------|-----------------|
| $X$          | 10              | -10             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{18}{37}$ | $\frac{19}{37}$ |

الربح المتوسط  $E_1(X)$  :

$$E_1(X) = 10\left(\frac{18}{37}\right) - 10\left(\frac{19}{37}\right) = \frac{-10}{37}$$

اللعبة الثانية :

ليكن  $Y$  متغير عشوائي يمثل مقدار الربح أو الخسارة ومنه قيم  $Y$  هي  $\{-10; 350\}$   
قانون الاحتمال للمتغير  $Y$  هو :

|              |                |                 |
|--------------|----------------|-----------------|
| $Y$          | 350            | -10             |
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{1}{37}$ | $\frac{36}{37}$ |

متوسط الربح هو  $E_2(Y)$  :

$$E_2(Y) = \frac{350}{37} - 10\left(\frac{36}{37}\right) = \frac{-10}{37}$$

خلاصة :

اللعبتين لهما نفس الربح المتوسط ( لا توجد أفضلية في الاختيار )

### التمرين (31)

نرمز الى جهتي قطعة نقدية بالحرفين  $P$  و  $F$  و نرمي ثلاث مرات متتالية للقطعة النقدية

نسمي النتيجة المحصل عليها مثلا وجه، وجه، ظهر "ونكتب"  $FFP$  "

(1) مثل هذه التجربة في شجرة ثم أعط عدد الرميات الممكنة

(2) نفرض أن هذه الرميات متساوية الاحتمال.

(أ) ما هو احتمال الحصول على " الوجه "  $F$  في الرمية الثانية.

(ب) نرفق بكل رمية : 20 نقطة للظهر " $P$ " و 10 نقط للوجه " $F$ "

نرمز ب :  $X$  لمجموع النقط المحصل عليها , أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضي.

### حل التمرين (31):

(1). انجاز الشجرة :

عدد الحالات الكلية لرمي القطعة ثلاث مرات هو "8"

(2) (أ) حساب احتمال ظهور وجه "F" في الرمية الثانية

عدد مخارج هذه الحادثة هو 4 وهي :

FFF و FFP و PFF و PPF

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ ان } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب) قانون الاحتمال :

ظهور P 20 نقطة و ظهور F 10 نقاط

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: {30, 40, 50, 60}

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

|              |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|
| $X = x_i$    | 30 | 40 | 50 | 60 |
| $P(x = x_i)$ |    |    |    |    |

"احتمال الحصول على F ثلاث مرات"  $P(X = 30)$

"احتمال الحصول على F مرتين"  $P(X = 40)$

"احتمال الحصول على F مرة واحدة فقط"  $P(X = 50)$

"احتمال الحصول على P ثلاث مرات"  $P(X = 60)$

$$E(X) = \frac{1}{8} 30 + \frac{3}{8} 40 + \frac{3}{8} 50 + \frac{1}{8} 60 = 45$$

### التمرين (32):

يحتوي كيس على 4 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء و 8 كريات صفراء و 5 كريات خضراء . نسحب بلا اختيار كرة من الكيس .

ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل كرة بيضاء العدد 2 و بكل كرة حمراء العدد -3 و بكل كرة صفراء العدد 1 و بكل كرة خضراء العدد -1 .

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

- احسب كل من الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

### حل التمرين (32):

- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  :

$$p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} : \text{احتمال الحصول على كرة بيضاء هو}$$

$$p_2 = \frac{3}{20} : \text{احتمال الحصول على كرة حمراء هو}$$

$$p_3 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} : \text{احتمال الحصول على كرة صفراء هو}$$

$$p_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} : \text{احتمال الحصول على كرة خضراء هو}$$

و يكون قانون الاحتمال كما يلي :

|              |                |                |                |                |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| قيم $X$      | 2              | -3             | 1              | -1             |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{5}{20}$ |

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  :

$$E(X) = 2 \times \frac{4}{20} + (-3) \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + (-1) \times \frac{5}{20}$$

$$E(X) = 0,1 : \text{إذن } E(X) = \frac{8-9+8-5}{20} = \frac{2}{20} \text{ و منه}$$

- التباين للمتغير العشوائي  $X$  :

$$V(X) = \frac{4}{20}(2-0,1)^2 + \frac{3}{20}(-3-0,1)^2 + \frac{8}{20}(1-0,1)^2 + \frac{5}{20}(-1-0,1)^2$$

$$V(X) = \frac{4}{20} \times 3,61 + \frac{3}{20} \times 9,61 + \frac{8}{20} \times 0,81 + \frac{5}{20} \times 1,21$$

$$V(X) = 2,79 \text{ أي } V(X) = \frac{55,8}{20} \text{ و منه}$$

- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$  :

$$\sigma(X) = 1,67 \text{ و منه } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,79}$$

### التمرين (33)

يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و ثلاث قريصات صفراء تحمل الأرقام 1، 2، 3

نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت القريصة المسحوبة

بيضاء و إلا يساوي 0 . وليكن  $Y$  المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة برقم القريصة المسحوبة

(1) عرف قانوني الإحتمال لكل من  $X$  و  $Y$

(2) أحسب الامل الرياضي لكل من  $X$  و  $Y$

(3) برهن أن المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  مستقلان

(4) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $Y \times X$  و أحسب أمله الرياضي.

### حل التمرين (33)

صندوق به 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و 3 قريصات صفراء تحمل الأرقام 1، 2، 3

سحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق

$X = 1$  القريصة المسحوبة بيضاء و إلا  $X = 0$

$Y$  يرفق كل سحبة برقم القريصة المسحوبة

(1) قانون المتغير العشوائي  $X$

|              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| $X = x_i$    | 0             | 1             |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

قانون المتغير  $Y$

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $Y = y_i$    | 1             | 2             | 3             |
| $p(Y = y_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(2) حساب الأمل الرياضي لكل من  $X$  و  $Y$

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2 \quad \text{و} \quad E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p[(X=0) \cap (Y=1)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=0) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$p[(X=0) \cap (Y=2)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=0) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p[(X=0) \cap (Y=3)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=0) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p[(X=1) \cap (Y=1)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=1) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p[(X=1) \cap (Y=2)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=1) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p[(X=1) \cap (Y=3)] = \frac{1}{6}, \quad p(X=1) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

إذن المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلان

### (3): حساب الاحتمالات باستعمال العد:

#### التمرين (34) :

صندوق يحوي 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 لا نميز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا و في آن واحد قريصتين .

(1) ما احتمال سحب رقمين فرقهما 4 ؟

(2) احسب الاحتمال الشرطي لكي يكون مجموع الرقمين المسحوبين هو 10 علما أن فرقهما هو 4

#### حل التمرين (34):

مجموعة الإمكانات هي مجموعة توفيقات عنصرين من مجموعة القريصات العشر .

$$\text{عدد هذه التوفيقات هو: } C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

(1) نسمي A الحادثة " الرقمين المسحوبين فرقهما 4 "  $A = \{\{1,5\}, \{2,6\}, \{3,7\}, \{4,8\}, \{5,9\}, \{6,10\}\}$

و عدد امكانياتها هو 6 إذن  $p(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

(2) لتكن B الحادثة " الرقمين المسحوبين مجموعهما 10 "  $B = \{\{1,9\}, \{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}\}$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{6} \text{ و منه } A \cap B = \{\{3,7\}\}$$

#### التمرين (35) :

يحتوي كيس على 6 قريصات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب من الكيس قريصتين في آن واحد .

(1) احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7 .

(2) احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7 و علما أن فرقهما 3 .

#### حل التمرين (35):

(1) عدد إمكانيات سحب قريصتين في آن واحد من الكيس هو عدد التوفيقات ذات عنصرين من مجموعة ذات 6

$$\text{عناصر و عددها : } C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = 15$$

لتكن A الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 7

$A = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$  و منه عدد إمكانياتها هو 3 .

$$\text{و منه : } P(A) = \frac{3}{15} \text{ أي : } P(A) = \frac{1}{5}$$

(2) لتكن B الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 3

$$A \cap B = \{\{2,5\}\} \quad ; \quad B = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6\}\}$$

احتمال الحصول على B علما أن A محققة هو :

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad \text{ولدينا مما سبق :} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_A(B) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{15} \times \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \quad \text{و لدينا :} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{15} \quad \text{و عليه :}$$

إذن احتمال سحب رقمين مجموعهما 7 علما أن فرقهما 3 هو  $\frac{1}{3}$

### التمرين (36) :

يحتوي كيس 8 كرات منها : 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات.

(1) - (أ) - ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب

(ب) - احسب الاحتمالات التالية :

A "سحب 3 كرات من نفس اللون" .

B "سحب كرة على الأقل حمراء" .

C "كرتين على الأكثر حمراء" .

(2) نسمي  $x$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها .

(أ) - ماهي قيم المتغير العشوائي  $x$  ؟

(ب) - احسب الاحتمالات التالية :  $P(x=1)$  ،  $P(x=3)$  واستنتج :  $P(x=2)$

(ج) - احسب الامل الرياضي ، و التباين ثم الانحراف المعياري .

### حل التمرين (36) :

(1) (أ) - الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي عدد التوفيقات :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

(ب) - الحادث A :

الحصول على " ثلاث كرات من نفس اللون " اي (3 خضراء) او (3 حمراء)

$$C_3^3 + C_4^3 = 5 \quad \text{عدد الحالات الملائمة :}$$

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{56} = \frac{1+4}{56} = \frac{5}{56}$$

الحادث B الحصول على " كرة على الأقل حمراء "

اي ((1احمر))و((2لون اخر)) او ((2ح))و((1لون اخر)) او ((3احمر))

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3}{56} = \frac{24 + 24 + 4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

الحادث C الحصول على "كرتين على الأكثر حمراء"

اي ((2ح))و((1لون اخر)) او ((1احمر))و((2لون اخر)) او ((3لون اخر))

$$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3}{56} = \frac{24 + 24 + 4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

(2) (أ) تعيين قيم المتغير العشوائي x هي:  $x = \{1, 2, 3\}$

(ب) - الحادث :  $(x=1)$  يعني الحصول على لون واحد . اي (3احمر) او (3خضر)

اذن الحادث :  $(x=1)$  هو الحادث A ومنه :

$$P(x=1) = P(A) = \frac{5}{56}$$

- الحادث  $(x=3)$  يعني الحصول على الألوان الثلاثة . اي كرة من كل لون .

$$P(x=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{56} = \frac{12}{56}$$

- استنتاج  $P(x=2)$

لدينا من قانون توزيع الاحتمال  $P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 1$  اذن :

$$P(x=2) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56} \quad \text{ومنه} \quad P(x=2) = 1 - (P(x=1) + P(x=3))$$

(ج) حساب الامل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :

|                    |                |                 |                 |
|--------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $X = x_i$          | 1              | 2               | 3               |
| $p_i = p(X = x_i)$ | $\frac{5}{56}$ | $\frac{39}{56}$ | $\frac{12}{56}$ |

$$E(x) = \left(1 \times \frac{5}{56}\right) + \left(2 \times \frac{39}{56}\right) + \left(3 \times \frac{12}{56}\right) = 2,12$$

- حساب التباين والانحراف المعياري :

$$V(x) = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(x))^2 \times p_i = 0,28$$

$$\delta = \sqrt{v(x)} = 0,53 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

### التمرين (37):

نسحب ورقتين عشوائيا من بين 20 ورقة مرقمة من 1 إلى 20 .

احسب احتمال أن يكون المجموع فرديا في كل حالة مما يلي :

- (1) سحب الورقتين معا (في ان واحد) .  
 (2) سحب الورقتين الواحدة بعد الأخرى دون إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية .  
 (3) سحب الورقتين الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية .

### حل التمرين (37)

يكون المجموع فرديا إذا كانت ورقة تحمل رقما زوجيا و الأخرى فرديا .

(1) - عدد الطرق الممكنة لسحب الورقتين معا :  $C_{20}^2 = 190$

عدد الطرائق الملائمة لسحب ورقتين إحداهما تحمل رقم زوجي و الأخرى فردي أي مجموع الرقمين فردي هو :

$$C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 100$$

الاحتمال :  $p_1 = \frac{100}{190} = \frac{10}{19}$

(2) - عدد الطرائق الممكنة لسحب الورقتين على التوالي دون الإعادة :

$$A_{20}^2 = 20 \times 19 = 380$$

- عدد الحالات الملائمة لسحب ورقتين مجموعها فردي، أي أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية أو الأولى فردية و الثانية زوجية و عددها :  $10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$

الاحتمال :  $p_2 = \frac{200}{380} = \frac{10}{19}$

(3) - عدد طرق سحب ورقتين على التوالي مع الإرجاع هو :  $20 \times 20 = 400$

- عدد الطرق الملائمة حتى يكون المجموع فرديا :  $10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$

لأن إما أن تكون الأولى فردية و الثانية زوجية أو أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية .

الاحتمال هو :  $p_3 = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$

### التمرين (38)

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم و امرأة واحدة اسمها فاطمة

نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

(1) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية :

$A$  " تكوين لجنة تضم 3 رجال " .  $B$  " تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتين " .

$C$  " تكوين لجنة تضم إبراهيم " .  $D$  " تكوين لجنة تضم إما إبراهيم أو فاطمة " .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة.

(أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  و عرف قانون احتماله .

(ب) أحسب الأمل الرياضي

### حل التمرين (38)

(1) عدد اللجان الكلية التي يمكن تشكيلها هو :  $C_{12}^3 = 220$

$$P(A) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{14}{55} \quad \text{ومنه} \quad A \text{ "تكوين لجنة تضم 3 رجال " . ومنه}$$

$$B \text{ "تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتين " : عدد اللجان هو } C_8^1 \times C_4^2$$

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{12}{55} \quad \text{ومنه}$$

$$C \text{ "تكوين لجنة تضم إبراهيم " أي امرأتان ورجل واحد هو إبراهيم . عدد اللجان هو : } C_1^1 \times C_{11}^2$$

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_{11}^2}{220} = \frac{1}{4}$$

$$D \text{ "تكوين لجنة تضم إما إبراهيم أو فاطمة " أي (إبراهيم وعضوين من الباقي دون فاطمة ) أو (فاطمة و 2 من الباقي دون إبراهيم ) . عدد اللجان } C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2$$

$$P(D) = \frac{C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2}{220} = \frac{9}{22}$$

(2) (أ) القيم التي يأخذها  $X$  هي : 3, 2, 1, 0

$$P(X=1) = P(B) = \frac{12}{55}, \quad P(X=0) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{1}{55} \quad \text{قانون احتمال } X : \text{ لدينا :}$$

$$P(X=3) = P(A) = \frac{14}{55}, \quad P(X=2) = \frac{C_8^2 \times C_4^1}{220} = \frac{28}{55}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي

| $x_i$        | 0              | 1               | 2               | 3               |
|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{55}$ | $\frac{12}{55}$ | $\frac{28}{55}$ | $\frac{14}{55}$ |

(ب) الأمل الرياضي :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{55} + 1 \times \frac{12}{55} + 2 \times \frac{28}{55} + 3 \times \frac{14}{55} = \frac{2}{1}$$

### التمرين (39)

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء .

نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي و دون إرجاع .

(1) - استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة الوضعية

(2) - احسب احتمال تحقق كل من الحدثين  $A$  و  $B$  حيث :

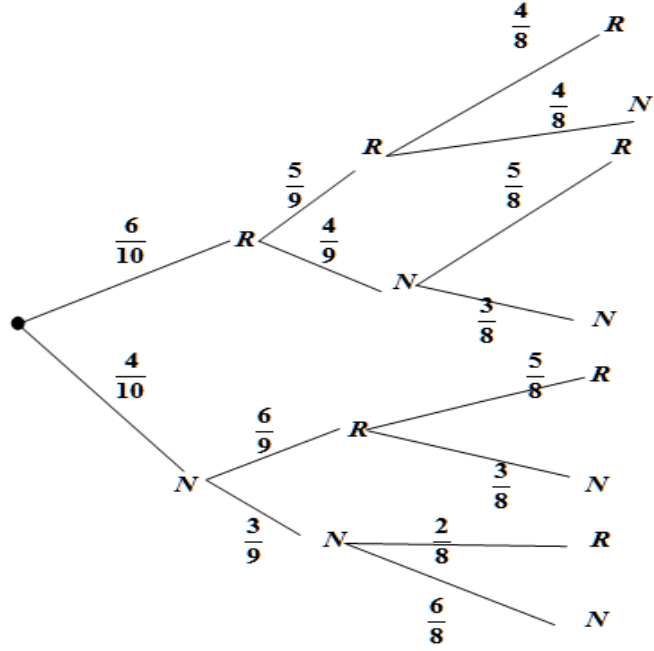
$A$  : الحصول على اللونين معا .

$B$  : الحصول على لون واحد .

### حل التمرين (39)

نرمز بالرمز  $R$  لكرة حمراء و بالرمز  $N$  لكرة سوداء .

(1) نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



و عليه الحادثة  $A$  تتكون من 6 مسارات نرمز لها بالرموز :

$$(N; R; R); (R; N; N); (R; N; R); (R; R; N); (N; N; R); (N; R; N)$$

$$p(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{576}{720}$$

و الحادثة  $B$  تتكون من مسارين هما :  $(R; R; R); (N; N; N)$

$$p(B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{144}{720}$$

ويمكن حساب هذا الاحتمال بالحدث المعاكس للحدث  $A$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{576}{720} = \frac{144}{720}$$

### طريقة ثانية:

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو :  $A_0^3 = 720$

(1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث  $A$  هي :

$(R; R; N); (R; N; R); (N; R; R); (N; N; R); (N; R; N); (R; N; N)$  و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول

على  $A$  هو :

$$3.C_6^2 \times C_4^1 + 3.C_6^1 \times C_4^2 = 3 \times 120 + 3 \times 72 = 576$$

$$p(A) = \frac{576}{720} \quad \text{احتمال الحدث } A :$$

- الحالات الملائمة لوقوع الحدث  $B : (R; R; R); (N; N; N)$

$$p(B) = \frac{144}{720} \quad \text{و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول على } B \text{ هو : } C_6^3 + C_4^3 = 144$$

#### التمرين (40) :

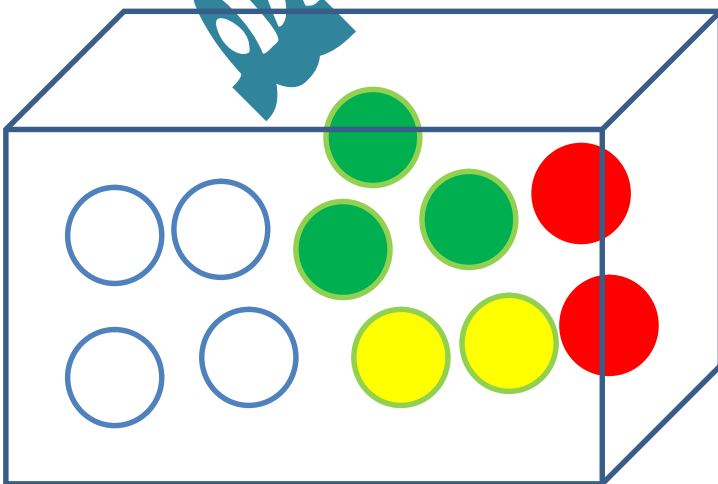
يحتوي صندوق كرتين لونهما أحمر ، وثلاث كرات لونها أخضر ، وأربع كرات لونها أبيض ، وكرتان لونهما أصفر .

نسحب كرتين في ان واحد وبطريقة عشوائية من هذا الصندوق

- (1) (أ)- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أحمر .
- (ب)- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أبيض .
- (ج) ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أصفر .
- (د)- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أخضر .
- (2) ما هو احتمال سحب كرتين من نفس اللون .
- (3) ما هو احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون .
- (4) ما هو احتمال سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر .
- (5) ما هو احتمال ان تكون احدهما على الأقل خضراء .

#### حل التمرين (40)

رسم توضيحي :



$$C_{11}^2 = \frac{11!}{2!9!} = 55 \quad \text{عدد الحالات الممكنة هو :}$$

(1) (أ) نسمي  $A$  حادثة سحب كرتين لونهما أحمر :

$$P(A) = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

(ب) نسمي  $B$  حادثة سحب كرتين لونهما أبيض :

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$$

(ج) نسمي  $C$  حادثة سحب كرتين لونهما أصفر :

$$P(C) = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

$$(د) نسمي  $D$  حادثة سحب كرتين لونهما أخضر :  $P(D) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55}$$$

(2) احتمال سحب كرتين من نفس اللون : نسمي الحادثة  $T$  " سحب كرتين من نفس اللون "

الطريقة (1)

$$P(T) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$$

الطريقة (2)

بما أن الحوادث  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  مستقلة فيمكننا حساب :

$$P(T) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$$

(3) - احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون : نسمي الحادثة  $H$  " سحب كرتين مختلفتي اللون "

$$P(H) = 1 - P(T) = \frac{4}{5}$$

(4) - احتمال سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر: نسمي الحادثة  $R$  " سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا

$$P(R) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} \quad \text{أصفر " :}$$

(5) - احتمال ان تكون احدهما على الاقل خضراء : نسمي الحادثة  $V$  " ان تكون احدهما على الاقل خضراء "

$$P(V) = \frac{C_3^1 C_8^1 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3 \times 8 + 3}{55} = \frac{27}{55}$$

**التمرين (41)**

نفرض أنه في مدينة ما ، إجمالي ميلاد ذكر أو أنثى متساويان نختار عشوائيا عائلة ذات 5 أطفال ، أحسب احتمال :

(1) من بين الأطفال الخمسة يوجد 4 ذكور على الأقل

(2) عدد الإناث أكبر من عدد الذكور

(3) ثلاثة أطفال على الأقل متتابعون من نفس الجنس

**حل التمرين (41):**

اختار خمسة أطفال يعني تشكيل قائمة ذات 5 عناصر من العنصرين  $F$  و  $G$  ،  $F$  " أنثى "  $G$  " ذكر "

مثلا :  $FGFGG$  هو اختيار عدد الاختيارات الممكنة هو عدد القوائم أي  $2^5 = 32$

(1) لتكن الحادثة  $A$  " يوجد 4 ذكور على الأقل "

نسمي  $A_1$  " يوجد 4 ذكور " و  $A_2$  " يوجد 5 ذكور "

$$p(A_2) = \frac{C_5^5}{2^5} \quad \text{و} \quad p(A_1) = \frac{C_5^4}{2^5} \quad \text{إن}$$

نعلم أن  $A = A_1 \cup A_2$  و بالتالي  $p(A) = p(A_1) + p(A_2)$

$$= \frac{3}{16}$$

$$A_2 = \{GGGGG\}$$

$$A_1 = \{GGGGF, GGGFG, GGFGG, GFGGG, FGGGG\}$$

(2) نسمي الحادثة B " عدد الإناث أكبر من عدد الذكور "

نسمي  $B_1$  " يوجد 5 إناث "  $B_2$  " يوجد 4 إناث "  $B_3$  " يوجد 3 إناث "

نعلم أن  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$  إذن  $p(B) = p(B_1) \cup p(B_2) \cup p(B_3)$

$$= \frac{1 + C_5^4 + C_5^3}{2^5} = \frac{1}{2}$$

(3) نسمي الحادثة C " ثلاثة أطفال على الأقل من نفس الجنس متتابعون "

و اعتبرنا الإناث مثلا يكون لدينا  $\{FFFGG, GFFFG, GGFFF, GFFFF, FFFFF\}$

نفس الشيء بالنسبة للذكور و بالتالي

$$p(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

### التمرين (42) :

يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 .

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الكيس .

(1) أحسب احتمال الحصول على : (أ) ثلاث كرات من نفس اللون .

(ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم . (ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثلي مثلي .

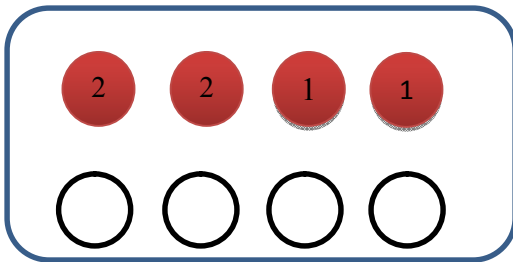
(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

(ب) أحسب الامل الرياضي

(ج) أحسب التباين والانحراف المعياري

### حل التمرين (42) :



رسم توضيحي :

(1) الحالات الكلية لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

(أ) - نسمي A حادثة الحصول على " ثلاث كرات من نفس

اللون " (3 حمراء) او (3 بيضاء)

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \frac{4 + 4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

(ب) - نسمي B حادثة الحصول على " ثلاث كرات تحمل نفس الرقم " (3 كرات رقم 1) او (3 كرات رقم 2)

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \frac{4+1}{56} = \frac{5}{56}$$

(ج) - نسمي  $C$  حادثة الحصول على " ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى " (رقم 0) و (رقم 1) و (رقم 2)

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} = \frac{1 \times 4 \times 3}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

(2) (أ) - قيم المتغير العشوائي هي  $x = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(x=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{56} = \frac{6 \times 4}{56} = \frac{24}{56} \quad \text{و} \quad P(x=0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56} \quad \text{و} \quad P(x=2) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{56} = \frac{4 \times 6}{56} = \frac{24}{56}$$

|  | 0              | 1               | 2               | 3              | المجموع |
|--|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------|
|  | $\frac{4}{56}$ | $\frac{24}{56}$ | $\frac{24}{56}$ | $\frac{4}{56}$ | 1       |

(ب) - حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = \left(0 \times \frac{4}{56}\right) + \left(1 \times \frac{24}{56}\right) + \left(2 \times \frac{24}{56}\right) + \left(3 \times \frac{4}{56}\right) = 1.5$$

(ج) - حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 (x_i - E(x))^2 \times p_i = \frac{15}{28}$$

$$\delta = \sqrt{v(x)} = 0.73 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

### التمرين (43)

يحتوي كيس على 5 كرات خضراء و 3 كرات صفراء .

نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بحيث بعد كل سحب نعيد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

(1) - احسب احتمال تحقق كل من الحدثين  $C$  و  $D$  حيث :

$C$  : الحصول على اللونين معا

$D$  : الحصول على لون واحد .

(2) - استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين وحساب تحقق كلا من الحدثين  $C$  و  $D$  .

### حل التمرين (43)

نرمز بالرمز  $V$  لكرة خضراء و بالرمز  $J$  لكرة صفراء .

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو :  $8^3$  أي 512 .

(1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث  $C$  هي :

$$(V; V; J); (V; J; V); (J; V; V); (V; J; J); (J; J; V); (J; V; J)$$

و عليه عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث هو :  $3 \times 5^2 \times 3 + 3 \times 5^1 \times 3^2 = 360$

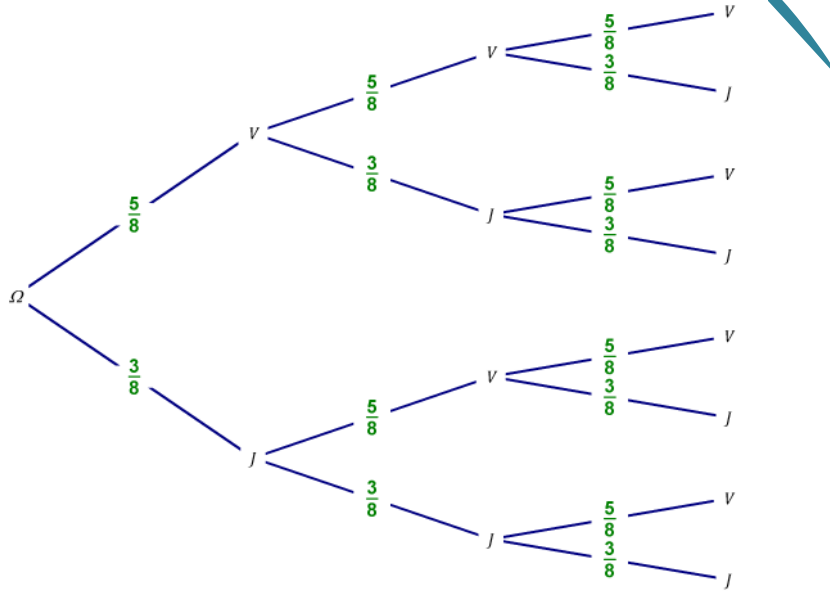
$$p(C) = \frac{360}{512}$$

- الحالات الملائمة لوقوع الحدث  $D$  هي :  $(V; V; V), (J; J; J)$

عدد الحالات الملائمة لوقوع  $D$  هو :  $5^3 + 3^3 = 152$

$$p(D) = \frac{152}{512}$$

(2)-نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



و عليه :

$$p(C) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{360}{512}$$

$$p(D) = \frac{152}{512} \quad \text{إذن} \quad p(D) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}$$

#### التمرين (44)

يتكون قسم دراسي من 10 تلاميذ أعمارهم 16 سنة و 5 تلاميذ أعمارهم 17 سنة و 20 تلميذا أعمارهم 18 سنة ، أرادوا تشكيل لجنة مكونة من تلميذين .

- (1)- ما هو عدد الطرق لاختيار هذين التلميذين .
- (2) - ما احتمال اختيار تلميذين مجموع سنهما 34 سنة .
- (3) - نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذين يرفق بكل من هذه الإمكانيات لاختيار تلميذين مجموع سني هذين التلميذين .
- أكتب قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي .
- أحسب الأمل الرياضي .

- أحسب التباين و الانحراف المعياري .

### حل التمرين (44)

(1) عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين :

$$C_{35}^2 = \frac{35!}{(35-2)! \times 2!} = \frac{35 \times 34 \times 33!}{33! \times 2} = 595$$

(2) - احتمال اختيار تلميذين مجموع سنيهما 34 سنة :

( أي تلميذ عمره 16 سنة و آخر 18 سنة أو تلميذين عمر كل منهما 17 سنة ) .

$$C_{10}^1 \times C_{20}^1 + C_5^2 = 210$$

$$\text{الاحتمال هو : } \frac{210}{595} = \frac{6}{17}$$

(3) - قيم  $X$  هي : 36, 35, 34, 33, 32

$$p[X = 32] = \frac{C_{10}^2}{595} = \frac{45}{595} = \frac{9}{119}$$

$$p[X = 33] = \frac{C_{10}^1 \times C_5^1}{595} = \frac{50}{595} = \frac{10}{119}$$

$$p[X = 34] = \frac{C_{10}^1 \times C_{20}^1 + C_5^2}{595} = \frac{210}{595} = \frac{42}{119}$$

$$p[X = 35] = \frac{C_5^1 \times C_{20}^1}{595} = \frac{100}{595} = \frac{20}{119}$$

$$p[X = 36] = \frac{C_{20}^2}{595} = \frac{190}{595} = \frac{38}{119}$$

قانون الاحتمال :

| قيم $X$ | 32              | 33               | 34               | 35               | 36               |
|---------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $p$     | $\frac{9}{119}$ | $\frac{10}{119}$ | $\frac{42}{119}$ | $\frac{20}{119}$ | $\frac{38}{119}$ |

- الأمل الرياضي :

$$E(X) = \frac{32 \times 9}{119} + \frac{33 \times 10}{119} + \frac{34 \times 42}{119} + \frac{35 \times 20}{119} + \frac{36 \times 38}{119}$$

$$E(X) = \frac{288 + 330 + 1428 + 700 + 1368}{119} = \frac{4114}{119}$$

$$E(X) \approx 34,57 \quad \text{إذن :}$$

- التباين :

$$V = (32-35)^2 \times \frac{9}{119} + (33-35)^2 \times \frac{10}{119} + (34-35)^2 \times \frac{42}{119}$$

$$+ (35-35)^2 \times \frac{20}{119} + (36-35)^2 \times \frac{38}{119} = \frac{81+40+42+0+38}{119} = \frac{201}{119} = 1,7$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{V} = 1,3$$

### التمرين (45) :

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متميزة عند اللمس .  
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق و نسجل لونها ،ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

(أ)  $A$  "الحصول على كرتين بيضاوين" .

(ب)  $B$  "الحصول على كرتين من نفس اللون" .

(2) نعرف لعبة حظ كما يلي : تمنح لكل كرة بيضاء العلامة  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) و لكل كرة سوداء العلامة  $(-\alpha)$

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع النقط المحصل عليها.

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي  $E(X)$  .

(ب) عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون اللعبة مربحة .

(3) نضيف  $(n-3)$  كرة سوداء إلى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه .

. ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علما أن احتمال الحادثة  $A$  يساوي  $\frac{1}{4}$  .

### حل التمرين (45)

(1) بما أن السحب على التوالي ودون إرجاع فإن عدد الطرق الممكنة للسحب هو عدد القوائم ذات عنصرين من مجموعة ذات 10 عناصر ومنه عدد الطرق هو :  $n^p = 10^2 = 100$

(أ) الحادث  $A$  : عدد الطرق للحصول على كرتين بيضاوين هو :  $7^2 = 49$  ومنه :  $P(A) = \frac{49}{100}$

(ب) الحادث  $B$  : عدد الطرق للحصول على كرتين بيضاوين أو سوداوين هو :  $7^2 + 3^2 = 58$

$$\text{ومنه : } P(B) = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$$

(2) (أ) قيم المتغير العشوائي  $X$  هي :  $-2\alpha$  أو 0 أو  $2\alpha$  .

$(x = -2\alpha)$  معناه الحصول على كرة سوداء ثم كرة سوداء . عدد الإمكانيات هو :  $3 \times 3$

$(x = 0)$  معناه الحصول على (كرة سوداء ثم كرة بيضاء) أو (كرة بيضاء ثم كرة سوداء) .

$$\text{عدد الإمكانيات هو : } 3 \times 7 + 7 \times 3 = 42$$

$(x = 2\alpha)$  معناه الحصول على (كرة بيضاء ثم كرة بيضاء) . عدد الامكانيات هو  $7 \times 7$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي في الجدول التالي :

| $x_i$        | $-2\alpha$      | 0                | $2\alpha$        |
|--------------|-----------------|------------------|------------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{9}{100}$ | $\frac{42}{100}$ | $\frac{49}{100}$ |

الأمل الرياضي  $E(X)$  :

$$E(X) = (-2\alpha) \times \frac{9}{100} + 0 \times \frac{42}{100} + 2\alpha \times \frac{49}{100} = \frac{49\alpha - 9\alpha}{50} = \frac{4}{5}\alpha$$

(ب) تكون اللعبة مربحة إذا كان  $E(X) > 0$  : معناه  $\alpha > 0$

(3) إيجاد عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق:

أصبح في الصندوق  $n+3 = (n-3) + 3$  كرة سوداء و 7 كرات بيضاء . مجموع الكرات  $n+7$

$$P(A) = \frac{7^2}{(n+7)^2} = \frac{49}{(n+7)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{وبما اناحتمال الحادثة } A \text{ يساوي } \frac{1}{4} \text{ فإن } \frac{49}{(n+7)^2} = \frac{1}{4} \text{ اي } (n+7)^2 = (14)^2$$

بحل هذه المعادلة نجد  $n = -21$  مرفوض لأنه ليس طبيعي) و  $n = 7$

، معناه يجب إضافة  $(n-3)$  اي 4 كرات سوداء للكيس حتى يكون:  $P(A) = \frac{1}{4}$

#### التمرين (46) :

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس .

نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس ، إذا كانت سوداء نتوقف عن

السحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نسحب كرة أخرى و هكذا أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

(1) (أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

"A" الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء .

"B" الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء .

(ب) استنتج حساب الاحتمال  $p(C)$  لكي لا نجري السحبة الثالثة .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها.

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضياتي .

#### حل التمرين (46)

(1) (أ) الحادث "A" الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء "

عدد الحالات الكلية للسحب هو:  $C_7^1$  والحالات الملائمة لسحب كرة سوداء هو:  $C_4^1$

$$\text{اذن } p(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

- الحادث "B" الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء " : لكي يتحقق الحدث يجب :

(أن نسحب في المرة الأولى كرة بيضاء و لا تعاد إلى الكيس) و (نسحب في المرة الثانية كرة سوداء )

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو  $C_7^1 \times C_6^1$  :

$$p(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^1 \times C_6^1} = \frac{3 \times 4}{7 \times 6} = \frac{2}{7} \quad \text{إذن :}$$

(ب) لكي لا نجري السحبة الثانية يجب أن نتوقف إما عند السحبة الأولى أو عند السحبة الثانية

أي : "(نسحب كرة سوداء في المرة الأولى) أو (نسحب كرة سوداء في المرة الثانية)"

إذن يتحقق الحادث  $C$  إذا تحقق  $A$  أو تحقق  $B$

$$p(C) = p(A) + p(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{إذن الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو :}$$

(2) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي : 1 و 2 و 3 و 4 .

$$p(X=1) = p(A) = \frac{4}{7} \quad \text{يتحقق الحدث } (X=1) \text{ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة سوداء :}$$

- يتحقق الحدث  $(X=2)$  إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء ثم سحبنا كرة سوداء

$$p(X=2) = p(B) = \frac{2}{7} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث  $(X=3)$  إذا :

(سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء) ثم (سحبنا في المرة الثانية كرة بيضاء) ثم (سحبنا في المرة الثالثة كرة سوداء).

$$p(X=3) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث  $(X=4)$  إذا :

(سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء) ثم (سحبنا في المرة الثانية كرة بيضاء) ثم (سحبنا في المرة الثالثة كرة بيضاء)

ثم (سحبنا في المرة الرابعة كرة سوداء)

$$p(X=4) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_4^1}{C_4^1} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{35} \quad \text{إذن :}$$

|            |               |               |                |                |
|------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $x_i$      | 1             | 2             | 3              | 4              |
| $p(X=x_i)$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{1}{35}$ |

- نلخص النتائج في الجدول التالي :

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{76}{35} \quad \text{- الأمل الرياضي}$$

**التمرين (47) :**

يحتوي صندوق  $U_1$  على 3 كرات خضراء و 2 كرات حمراء و يحتوي صندوق  $U_2$  على 3 كرات حمراء و 2 كرات خضراء و

نعتبر أن جميع الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب كرة واحدة من الصندوق  $U_1$  و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق  $U_2$  .

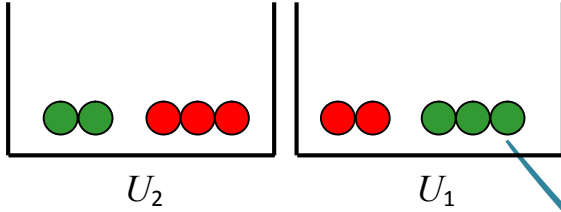
(1) أحسب احتمال الحصول على 3 كرات خضراء .

(2) أحسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما أن الكرة المسحوبة من الصندوق  $U_1$  حمراء

(3) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المحصل عليها.

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي.

(ب) أحسب التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$  .



### حل التمرين (47)

(1) نسمي الحادث  $A$  "الحصول على 3 كرات خضراء" .

تحقق  $A$  معناه : (سحب كرة خضراء من  $U_1$ ) و (سحب كرتين من  $U_2$ )

اذن احتمال سحب 3 كرات خضراء هو :

$$p(A) = \frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{50}$$

إذن :

(2) نسمي الحادث  $B$  : "الحصول على الأقل على كرة خضراء" .

و  $C$  الحدث : "الكرة المسحوبة من  $U_1$  حمراء"

الاحتمال المطلوب (احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما أن الكرة المسحوبة من الصندوق  $U_1$  حمراء)

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \text{ ، و } P_C(B) \text{ هو الاحتمال الشرطي}$$

الحدث  $B \cap C$  هو "الحصول على الأقل على كرة خضراء و الكرة المسحوبة من  $U_1$  حمراء" .

يتحقق الحدث  $B \cap C$  إذا سحبنا :

(من  $U_1$  كرة حمراء و من  $U_2$  كرة حمراء و كرة خضراء) أو (من  $U_1$  كرة حمراء ومن  $U_2$  2 كرات خضراء)

$$p(B \cap C) = \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3 \times 2}{5 \times 10} + \frac{2 \times 1}{5 \times 10} = \frac{7}{25}$$

إذن :

$$p(C) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} \text{ و}$$

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{10}$$

و منه :

(3) (أ) قيم المتغير العشوائي  $X$  هي :  $\{0;1;2;3\}$

يتحقق الحدث ( $X = 0$ ) إذا سحبنا 3 كرات خضراء أي : إذا سحبنا كرة خضراء من  $U_1$  و 2 كرتين خضراء من  $U_2$

$$P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 10} = \frac{3}{50} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث ( $X=1$ ) إذا سحبنا كرة حمراء و 2 كرتين خضراء أي إذا سحبنا :

(كرة حمراء من  $U_1$  و 2 كرتين خضراء من  $U_2$ ) أو (كرة خضراء من  $U_1$  و كرة خضراء و كرة حمراء من  $U_2$ )

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2} + \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \times 1}{5 \times 10} + \frac{3 \times 2 \times 3}{5 \times 10} = \frac{2}{5} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث ( $X=2$ ) إذا سحبنا 2 كرتين حمراء و كرة خضراء أي إذا سحبنا :

(كرة حمراء من  $U_1$  و كرة خضراء و كرة حمراء من  $U_2$ ) أو (كرة خضراء من  $U_1$  و 2 كرات حمراء من  $U_2$ )

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_5^1} + \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{2}{5} \times \frac{2 \times 3}{10} + \frac{3 \times 3}{5 \times 10} = \frac{21}{50} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث ( $X=3$ ) إذا سحبنا : (كرة حمراء من  $U_1$  و 2 كرتين حمراء من  $U_2$ ) :

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{2 \times 3}{5 \times 10} = \frac{3}{25} \quad \text{إذن :}$$

يلخص قانون الاحتمال في الجدول التالي :

| $x_i$      | 0              | 1             | 2               | 3              |
|------------|----------------|---------------|-----------------|----------------|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{50}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{21}{50}$ | $\frac{3}{25}$ |

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{50} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{21}{50} + 3 \times \frac{3}{25} = 1,6 \quad \text{- الأمل الرياضي}$$

$$V(X) = (0-1,6)^2 \times \frac{3}{50} + (1-1,6)^2 \times \frac{2}{5} + (2-1,6)^2 \times \frac{21}{50} + (3-1,6)^2 \times \frac{3}{25} = 0,156 + 0,144 + 0,0672 + 0,2352 = 0,6024$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,776 \quad \text{- الانحراف المعياري}$$

#### التمرين (48) :

لدينا نرددين  $D_1$  و  $D_2$  بحيث :

- وجوه النرد  $D_1$  متساوية الاحتمال ، أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنتان يحملان الرقم 2 .

- وجوه النرد  $D_2$  مرقمة من 1 إلى 6 و احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم  $k$  هو  $\frac{k}{21}$  .

(1) إذا رمينا النرد  $D_1$  مرة واحدة فما هو احتمال الحادث  $A$  " ظهور الرقم 2 "

(2) إذا رمينا النردين معا فما هو احتمال " ظهور الرقم 1 " في الحالتين :

(أ) الحادث  $B$  " مرة واحدة بالضبط " .

(ب) الحادث  $C$  " مرتين " .

(3) نرمي النردين معا وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي عدد المرات التي يظهر فيها الرقم 2 .

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضياتي .

### حل التمرين (48)

(1) لدينا وجهان يحملان الرقم 2 من بين 6 أوجه إذن احتمال ظهور الرقم 2 إذا رمينا النرد  $D_1$  مرة واحدة هو :

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(2) احتمال ظهور الرقم 1 في  $D_1$  هو  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  ، لوجود أربعة أوجه تحمل الرقم 1 من بين 6 أوجه

وا احتمال ظهور الرقم 1 في  $D_2$  هو  $\frac{1}{21}$  ، لأن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم  $k$  هو  $\frac{k}{21}$

(أ) للحصول على الرقم 1 مرة واحدة بالضبط عند رمي  $D_1$  و  $D_2$  ، يجب أن يظهر :

(الرقم 1 في  $D_1$  و رقم غير 1 في  $D_2$ ) أو (رقم يختلف عن 1 في  $D_1$  و الرقم 1 في  $D_2$ )

$$p(B) = \frac{4}{6} \times \left(1 - \frac{1}{21}\right) + \frac{1}{21} \times \frac{1}{3} = \frac{41}{63}$$
 هو : احتمال الحادثة  $B$

(ب) للحصول على الرقم 1 مرتين عند رمي  $D_1$  و  $D_2$  ، يجب أن يظهر :

$$p(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{21} = \frac{2}{63}$$
 هو : احتمال هذه الحادثة  $C$

(3) قانون الاحتمال :

لدينا القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي : 0 و 1 و 2

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{21}\right) = \frac{38}{63}$$
 يتحقق الحدث  $(X=0)$  إذا لم يظهر الرقم 2 في أي من النردين :

$$P(X=1) = \frac{2}{6} \times \left(1 - \frac{2}{21}\right) + \frac{4}{6} \times \frac{2}{21} = \frac{23}{63}$$
 يتحقق الحدث  $(X=1)$  إذا ظهر الرقم 2 مرة واحدة فقط :

$$P(X=2) = p(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{21} = \frac{2}{63}$$
 يتحقق الحدث  $(X=2)$  إذا ظهر الرقم 2 في النردين معا :

$$E(X) = 0 \times \frac{38}{63} + 1 \times \frac{23}{63} + 2 \times \frac{2}{63} = \frac{27}{63} = \frac{3}{7}$$
 الأمل الرياضياتي  $E(X)$  :

### التمرين (49) باك خارجي

يحتوي كيس 10 قريصات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس . منها 4 بيضاء تحمل الرقم 0 و منها 3 قريصات

حمراء تحمل الرقم 7 و منها قريستان بيضاء تحملان الرقم 2 و منها قريصة واحدة حمراء تحمل الرقم 5

(1) نسحب في آن واحد 4 قريصات من الكيس . ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب

(2) نفرض ان كل السحبات متساوية الاحتمال ونعتبر الحوادث التالية :

A " الأرقام الأربعة متشابهة "

B " القريصات المسحوبة يمكن تشكيل العدد 2000 "

C " كل القريصات المسحوبة بيضاء "

D " كل القريصات من نفس اللون "

E " على الأقل قريصة تحمل رقما يختلف عن الآخرين "

(أ) بين ان احتمال الحادث B هو :  $\frac{4}{105}$

(ب) احسب احتمال الحوادث : A, C, D, E

(ج) نفرض ان الحادث C قد تحقق . احسب احتمال الحادث B

(3) نعتبر قواعد اللعبة التالية :

- اذا استطاع اللاعب تكوين العدد 5000 فانه يربح 75 دج

- اذا استطاع اللاعب تكوين العدد 7000 فانه يربح 50 دج

- اذا استطاع اللاعب تكوين العدد 2000 فانه يربح 20 دج

- اذا استطاع اللاعب تكوين العدد 0000 فانه يخسر 25 دج

- وفي كل السحبات الأخرى يخسر 5 دج

وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يمثل الربح او خسارة اللاعب

(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

(ب) احسب الامل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$

### حل التمرين :

(1) نسحب في آن واحد 4 قريصات من بين 10 . اذن عدد الحالات الممكنة للسحب هو  $C_{10}^4$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

(2) كل السحبات متساوية الاحتمال :

(أ) الحادث B : "يمكن تشكيل العدد 2000 " يتحقق عندما نسحب قريصة مرقمة بالعدد 2 من بين القريصتين التين

تحتلان الرقم 2 وثلاث قريصات مرقمة بالرقم 0 من بين الأربعة المرقمة بالرقم 0 . اذن احتمال الحادث B هو :

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{2 \times 4}{210} = \frac{4}{105}$$

(ب) الحادث A " الأرقام الأربعة متشابهة " يتحقق فقط عندما نسحب 4 قريصة مرقمة بالعدد 0 من بين الأربعة

$$P(A) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210} \text{ اذن المرقمة بالرقم 0}$$

- الحادث C " 4 قريصات بيضاء " يتحقق عندما نسحب 4 قريصات من اللون الأبيض من 6 قريصات بيضاء

$$P(C) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} \text{ إذن احتماله هو :}$$

- الحادث D " 4 قريصات من نفس اللون " يتحقق اما (سحب 4 بيضاء من 6 لونها ابيض ) أو (سحب 4 حمراء

من 4 لونها احمر )

$$P(D) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} + \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$$

الحادث  $E$  " على الأقل قرينة تحمل رقما يختلف عن الآخرين " : هذا الحادث هو الحادث المعاكس للحادث  $A$ .

$$P(E) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

(ج) نفرض ان الحادث  $C$  قد تحقق . نلاحظ أن الحادث  $B \cap C$  هو الحادث  $B$  لان الحادث  $C$  محتوئ في الحادث  $B$  . وباستعمال قانون الاحتمال الشرطي نجد ان احتمال الحادث  $B$  علما ان الحادث

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}} = \frac{8}{15}$$

(3) (أ) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  :

قيم المتغير العشوائي هي :  $\{75; 50; 20; -25; -5\}$

- لتكوين العدد 5000 يجب سحب قرينة تحمل الرقم 5 وثلاث قرينات تحمل الرقم 0

$$P(X = 75) = \frac{C_1^1 \times C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}$$

- لتكوين العدد 7000 يجب سحب قرينة تحمل الرقم 7 وثلاث قرينات تحمل الرقم 0

$$P(X = 50) = \frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{2}{35}$$

- لتكوين العدد 2000 يجب سحب قرينة تحمل الرقم 2 وثلاث قرينات تحمل الرقم 0

$$P(X = 20) = P(B) = \frac{4}{105}$$

- لتكوين العدد 0000 يجب سحب اربع قرينات تحمل الرقم 0

$$P(X = -25) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

- وفي كل السحبات الأخرى يخسر 5 دج أي  $X = -5$  وهذا الحادث يتحقق اذا لم تتحقق الحوادث السابقة

ونعلم ان مجموع هذه الاحتمالات يساوي 1

اذن :  $P(X = 75) + P(X = 50) + P(X = 20) + P(X = -25) + P(X = -5) = 1$  ومنه

$$P(X = -5) = 1 - \frac{4}{210} - \frac{2}{35} - \frac{4}{105} - \frac{1}{210} = \frac{37}{42}$$

ومنه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

|              |                 |                |                 |                 |                 |
|--------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $X = x_i$    | 75              | 50             | 20              | -25             | -5              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{105}$ | $\frac{2}{35}$ | $\frac{4}{105}$ | $\frac{1}{210}$ | $\frac{37}{42}$ |

(ب) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  :

$$E(X) = 75 \times \frac{2}{105} + 50 \times \frac{2}{35} + 20 \times \frac{4}{105} - 25 \times \frac{1}{210} - 5 \times \frac{37}{42} = \frac{11}{21}$$

## التمرين (50) باك لينان جوان 2006

يحتوي كيس  $A$  4 كرات حمراء و 6 كرات سوداء . و يحتوي كيس  $B$  على كرة حمراء و 9 كرات سوداء . كل الكرات لا يمكن تمييزها باللمس

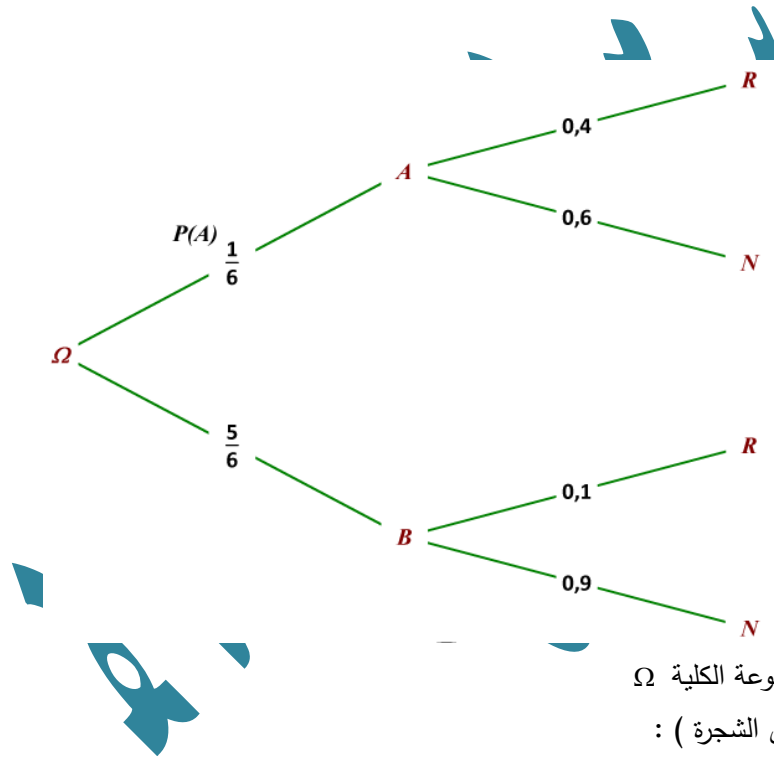
يلقي لاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة مرقمة من 1 الى 6. اذا ظهر الرقم 1 يسحب عشوائيا كرة من الكيس  $A$  واذا لم يظهر الرقم 1 فانه يسحب عشوائيا كرة من الكيس  $B$

(1) ليكن الحادث :  $R$  " اللاعب يحصل على كرة حمراء " . بين أن  $p(R) = 0,15$

(2) اذا حصل اللاعب على كرة حمراء , هل احتمال الحصول عليها من الكيس  $A$  أكبر من احتمال الحصول عليها من الكيس  $B$  ؟

حل التمرين :

يمكن استعمال شجرة الاحتمالات



(1) الحادثان  $A$  و  $B$  تشكّلان تجزئة للمجموعة الكلية  $\Omega$

وحسب قانون الاحتمالات الكلية لدينا ( من الشجرة ) :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60}$$

وبالتالي :  $p(R) = 0,15$

(2) اللاعب حصل كرة حمراء , نحسب إذن  $p_R(A)$  و  $p_R(B)$  : وحيث  $p(A \cap R) = p_A(R) \times p(A)$

$$p(B \cap R) = p_B(R) \times p(B) \text{ و}$$

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{5}{9} \text{ و } p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{4}{9}$$

اذن اذا حصل اللاعب على كرة حمراء , فان احتمال الحصول عليها من الكيس  $A$  أقل من احتمال الحصول عليها من الكيس  $B$