

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل مرة :

(1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

☞ المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ هو محور التناظر لـ (C) .

(2) a عدد طبيعي حيث : $a = 5^6 \times 25^{1443}$ ، عدد أرقام العدد a هو : 2022 .

(3) المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$ ، حدها الأول v_0 و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 2289$ إذن : $v_0 = 1962$.

(4) لاختبار أحد الطلبة وضع أستاذ الرياضيات في علبة خمسة أسئلة في الدوال و أربعة أسئلة في الإحتمالات وثلاثة أسئلة في المتتاليات ، على الطالب أن يسحب عشوائيا سؤالا ثلاث مرات على التوالي دون إرجاع .

☞ احتمال أن يسحب الطالب سؤال في الدوال وسؤال في الإحتمالات وسؤال في المتتاليات هو : $\frac{3}{11}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 و يحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 وخمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4

(الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونسجل رقمها وليكن n .

إذا كان $n = 2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون إرجاع .

إذا كان $n = 3$: نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 .

- نعتبر الحدثين التاليين : A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون " .

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم " .

(1) أ- بين أن : $P(A) = \frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$ إحتمال الحدث B .

ب- بين أن : $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$ ، ثم إستنتج : $P_A(B)$.

ج- هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 .

- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

(1) احسب كلا من : u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 0$.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5(u_{n+1} - u_n)}{6u_n + 5}$.
 ب- إستنتج أن الفرقين : $u_{n+2} - u_{n+1}$ و $u_{n+1} - u_n$ من نفس الإشارة .

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ . برر إجابتك .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{5}{u_n}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 + \dots + nu_nv_n$.

- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $S_n = 5 \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول هي $2cm$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(-x) + f(x) = 2$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل النقطة A كمركز

التناظر يطلب تحديد إحداثيها .

ب- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، ثم فسر النتائج بيانيا .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - (x+1)$.

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$.

(2) عين إتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(0)$ ثم حدد إشارة $g(x)$.

(3) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

- (4) أ - بين أن : $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان : $g(x) = -1$.
- ب - إستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها α حيث : $2 < \alpha < 3$.
- (5) أنشئ المماس (T) ، المنحنى (C_f) و مستقيميته المقاربين .
- (6) m وسيط حقيقي ، عين بيانيا قيم m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = mx + 1$ حلان مختلفان في الإشارة و حل معدوم .
- (III) 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$ ، ثم إستنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.
- (2) احسب بـ : cm^2 مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (D) و حامل محور الترتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 1$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + 2^n \cdot u_n}$.

(1) احسب u_1 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب - ادرس رتبة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{1}{2^n \cdot u_n}$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{1}{(n+2)2^{n-1}}$.

ج - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$.

أ - بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ب - عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \leq 1,9999$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة ولا فرق بينها عند اللمس) .
نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

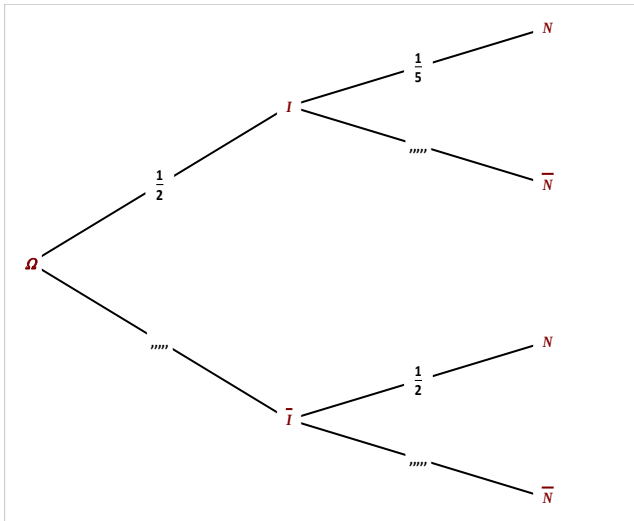
نعبر الأحداث التالية : I " الرقم الظاهر فردي " ، N " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

(1) احسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P(N)$ ، $P_I(N)$ ، $P(N \cap I)$.

(2) أ - أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تتمزج هذه التجربة ثم أكملها .

ب - بين أن : $P(N) = \frac{7}{20}$.

(3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟ .



(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ - بين أن : $P(X=1) = \frac{11}{20}$.

ب - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ج - أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

التمرين الثالث: (03 نقاط)

نعتبر التكاملين التاليين : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^x + 2}{e^x + 1} dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} dx$.

(1) أ - تحقق أن : $I - J = \int_0^{\ln 2} (1 - e^x) dx$.

ب - استنتج أن : $I - J = \ln 2 - 1$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(3) احسب J ، ثم استنتج I .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$.

(1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,5; 0,6[$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x - 1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر بيانيا النهاية عند 0 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أ - اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(4) أنشئ (T) ، ثم مثل (C_f) . (نضع : $f(\alpha) \approx -0,3$)

(5) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - |x| + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ - اثبت أن الدالة h زوجية .

ب - اشرح كيفية تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم مثله .

(6) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة : $y = mx - m$.

أ - بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها .

ب - ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$.

(7) أ - بين أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

ب - باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ حيث : $0 < \lambda < 1$ و $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (\ln x)^2 dx$.

ج - احسب بدلالة λ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$$x = \lambda , x = 1$$

إنتهى الموضوع الثاني