

النهايات والاستمرارية

1- نهايات دوال مألوفة

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = -\infty (a > 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = +\infty (a > 0)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = +\infty (a < 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = -\infty (a < 0)$

2- التفسير الهندسي للنهايات

النهاية	تفسيرها الهندسي
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = a$ بجوار $\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty (\mp\infty)$	(C_f) قد يقبل مستقيم مقارب مائل له معادلة من الشكل $y = ax + b$ بجوار $\pm\infty$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$

3- العمليات على النهايات

فيما يلي يمثل a عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

أ- نهاية مجموع دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح.ع.ت

ب- نهاية جداء دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l \neq 0$	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	∞	∞	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة الجداء

ج- نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l \neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	∞	0	l'	∞
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة حاصل قسمة

4- بعض طرق إزالة حالات عدم التعيين

- 1- الاختزال
- 2- التحليل
- 3- المرافق
- 4- العدد المشتق
- 5- المقارنة
- 6- الحصر

5- الاستمرارية

تعريف:

- f مستمرة عند قيمة x_0 معناه $f(x_0)$ معرفة
- و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \leftarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ معناه f مستمرة عند كل قيمة x_0 من هذا المجال.

6- تطبيقات مبرهنة القيم الوسطى

حالة 1:

- f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$
- k عدد حقيقي محصور تماما بين $f(a)$ و $f(b)$
- حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a, b[$
- تفسير هندسي: المنحنى (C_f) يقطع مستقيم معادلته $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a, b[$

حالة 2:

- f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$
- $f(a) \times f(b) < 0$
- حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a, b[$
- تفسير هندسي: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a, b[$

ملاحظة:

- إذا كان المجال غير محدود مثلاً $[a, +\infty[$ فإننا نكتب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ بدلا من الصورة $f(b)$ أي:
- $$f(a) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$$