

مجلة المفيد في الرياضيات

المتتاليات العددية

MATH 9

لتلاميذ الثالثة ثانوي شعب علمية



ملخص الدرس

تمارين مطولة

تمارين مقترحة

للأستاذ بلجودي حمو



ملخص الدرس

المتتالية العددية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ($n \geq n_0$) العدد $u(n)$. يسمى u_n الحد العام للمتتالية u و يسمى u_{n_0} حدها الأول.

المتتاليات الحسابية

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r ($r \in \mathbb{R}$) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام:	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n - p)r$
مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:	$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$
الوسط الحسابي:	$u_a + u_c = 2u_b$: u_a, u_b, u_c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية

المتتاليات الهندسية

نقول أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها q ($q \in \mathbb{R}^*$) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = v_n \times q$.

الحد العام:	$v_n = v_0 \times q^n$ $v_n = v_p \times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:	$S = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n = \frac{v_p}{1 - q} (1 - q^{n-p+1})$ مع $q \neq 1$. إذا كان $q = 1$ ، $S = (n - p + 1) \times v_p$
الوسط الهندسي:	v_a, v_b, v_c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن $v_a \times v_c = v_b^2$

المتتاليات التراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

إذا كان	$a = 0$ أو $a = 1$ و $b = 0$	$a = 1$ و $a \neq 0$ و $b \neq 0$	$a \neq 0$ و $a \neq 1$ و $b = 0$
فإن	(u_n) ثابتة.	(u_n) حسابية أساسها b .	(u_n) هندسية أساسها a .

إذا كان $a \neq 0$ و $a \neq 1$ و $b \neq 0$ فإن (u_n) ليست لا حسابية و لا هندسية و لدراستها نستعين بمتتالية مساعدة (v_n) ذات الحد العام $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

نهاية متتالية:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[A; +\infty[$ حيث A عدد حقيقي، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

نهاية متتالية معرفة بعبارة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و مقاربة:

إذا كانت المتتالية (u_n) مقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد l حيث $f(l) = l$.

اتجاه تغير متتالية عددية:

إذا كان	$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$u_{n+1} - u_n = 0$
فإن	المتتالية (u_n) متزايدة	المتتالية (u_n) متناقصة	المتتالية (u_n) ثابتة

يمكن كذلك أن نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1

أو ندرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[n_0; +\infty[$ في حالة متتالية حدها العام $u_n = f(n)$

أو استنتاجه انطلاقا من الأساس.

اتجاه تغير متتالية حسابية انطلاقا من أساسها :

- (u_n) متتالية حسابية معرفة على N ، حدها الأول u_0 و أساسها r .
- إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

اتجاه تغير متتالية هندسية انطلاقا من أساسها :

- (u_n) متتالية هندسية معرفة على N ، حدها الأول u_0 و أساسها q .
- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.
- إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

تقارب متتالية عددية:

- (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.
- إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة.
- إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ أو النهاية غير موجودة فإن المتتالية (u_n) متباعدة.

متتالية محدودة:

- (u_n) متتالية عددية معرفة على N .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

الرتابة و التقارب:

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

متتاليتان متجاورتان:

تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا و فقط إذا كانت إحدهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و كانت $\lim (u_n - v_n) = 0$.

الاستدلال بالترجع:

- $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي .
- لبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :
- 1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
- 2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

تمارين

التمرين -1-

- (u_n) متتالية حسابية حدها الأول هو $u_0 = 2$ وأساسها $r = -3$
1. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .
 2. احسب u_{10} و u_{20} .
 3. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 4. احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل؟
 5. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 6. أحسب المجموع S حيث : $S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots + u_{20}$.

التمرين -2-

- (u_n) متتالية عددية معرفة على N حيث : $u_n = \frac{2}{3}n - 1$
1. برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 2. بين أن 39 حد من حدود المتتالية (u_n) .
 3. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 4. عين قيمة n حتى يكون : $S_n = 0$.

التمرين -3-

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 + u_2 = 12 \\ u_1 + u_2 = 5 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 ثم u_2 و u_0 و r أساس المتتالية.
2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

التمرين -4-

- (v_n) متتالية هندسية حدها الأول هو $v_0 = 2$ وأساسها $q = 3$
1. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

2. احسب v_1 و v_2 .

3. عين اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4. احسب نهاية المتتالية (v_n) . هل المتتالية (v_n) متقاربة؟ علل؟

5. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التمرين -5-

(v_n) متتالية عددية معرفة على N حيث: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. احسب نهاية المتتالية (v_n) . هل المتتالية (v_n) متقاربة؟ علل؟

3. بين أن $\frac{3}{256}$ حد من حدود المتتالية (v_n) .

4. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $v_n \geq \frac{3}{8}$.

التمرين -6-

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما أساسها q و حدها الأول u_1 حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. أحسب u_2 و q ثم استنتج u_1 .

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

3. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين -7-

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2$

أ. احسب u_1 و u_2 .

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -6$.

ج. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د. استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 6$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n . ثم تأكد من صحة جوابك على السؤال (1- د).

ج. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين -8-

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}$

1. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب في هذه الحالة، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

2. نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 1$

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

د. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين -9-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1. أبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب. ادرس اتجاه تغير (u_n) واستنتج تقاربها.

2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ. اثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. اكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. احسب عندئذ نهايتها.

ج. بين أن: $(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$

التمرين -10-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$

1. أ. احسب u_1 و u_2 .

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + n + \alpha$

أ. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.

3. نفرض $\alpha = 2$.

أ. عين أساس المتتالية (v_n) و حدها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

ج. احسب المجاميع التالية و الجداء: $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S_2 = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$ ، $P = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$ ، $S_4 = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين -11-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و $u_1 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
1. أ. احسب u_2 و u_3 .

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.
أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. احسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

ج. احسب المجموع S_n بدلالة u_n باستعمال العبارة $v_n = u_{n+1} - u_n$.

د. عبر عن u_n بدلالة S_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين -12-

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

1. أ. أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

ب: $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

ب. باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدن حساب الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 .

ج. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -3$.

ب. تحقق أن (u_n) متناقصة.

ج. هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 3$

أ. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين -13-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$.

2. برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq 1$.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة.

4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 1}{1 - u_n}$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب. أكتب v_n ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج. احسب المجموع : $S_n = \frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \dots + \frac{2}{v_n}$.

التمرين -14-

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{5x}{x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في م.م.م.

1. أ. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;4]$.

ب. أنشئ (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج. بين أنه إذا كان $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$.

2. نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) .

ب. ضع تخميناً حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$.

د. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ. استنتج تقارب المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين -15-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

1. أبرهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$.

التمرين -16-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_1 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2\sqrt{\frac{u_n}{e}}$

1. احسب كل من u_2 ، u_3 .

2. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن: $u_n > \frac{4}{e}$.

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n) .

4. استنتج أن متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5. نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n . تأكد من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين -17-

(I) لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e + \sqrt{u_n - e}$.

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e < u_n < e+1$.

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - e)(e+1 - u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

(II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e \ln(u_n - e)$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2. عبر عن v_n بدلالة n ، ثم بين أن: $u_n = e \left(1 + e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} \right)$ أحسب نهاية (u_n) مرة ثانية.

3. نضع: $S_n = \ln(3-e) + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $P_n = \left(\frac{u_0}{e} - 1\right) \times \left(\frac{u_1}{e} - 1\right) \times \left(\frac{u_2}{e} - 1\right) \times \dots \times \left(\frac{u_n}{e} - 1\right)$

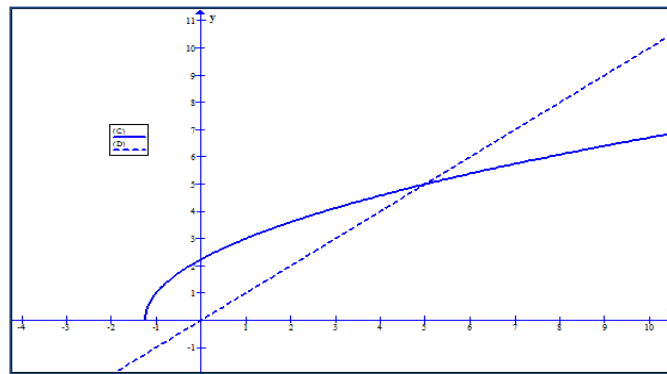
أحسب S_n ثم بين أن: $P_n = e^{S_n - n - 1}$.

التمرين -18-

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

g الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right[$ بـ: $g(x) = \sqrt{4x+5}$ و (C) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل).



نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

1. أ. أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود: u_2, u_1, u_0 و v_2, v_1, v_0 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) و تقاربهما .

2. أ. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq 5$ و $5 \leq v_n \leq 8$.

ب. أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ج. استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين ، ثم استنتج نهاية كل منهما .

3. أ. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq 5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$ و $0 \leq v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$.

ب. استنتج من اجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq 5 - u_n \leq 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ و $0 \leq v_n - 5 \leq 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ج. استنتج مرة ثانية نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3. هل (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ برر .

التمرين -19-

f الدالة العددية معرفة على $[0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة معرفة ب : $u_0 = \frac{5}{4e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1. أ. برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{e}$

ب . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{eu_n + 1}$

استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرر تقاربها .

2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$

. برهن أن (v_n) هندسية أساسها 2 ؛ معينا حدها الأول ثم اكتب عبارة v_n .

3. أ. تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $v_n = 1 + \frac{1}{eu_n - 1}$ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب . احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين -20-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$.

ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أنها متقاربة .

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

أبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب. أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين -21-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.

(1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$.

(1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{\frac{u_n}{u_n - 2}}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n المجموع s_n : $s_n = \ln(e^{-2} \times v_0)^{u_0} + \ln(e^{-1} \times v_1)^{u_1} + \dots + \ln(e^{n-2} \times v_n)^{u_n}$.

التمرين -22-

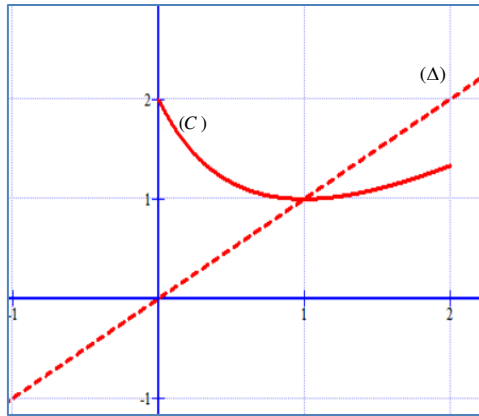
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ و ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. (انظر الشكل)

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) مبرزا خطوط الانشاء .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .



(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.
ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$ ثم استنتج أن

$$0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$$

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين -23-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

2. برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة.

4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$.

أ. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية ، ثم عين أساسها و حدها الأول.

ب. أكتب v_n ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج. احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$.

حل التمارين

حل التمرين -1-

1. عبارة الحد العام:

$$u_n = u_0 + nr = 2 - 3n = -3n + 2$$

2. حساب u_{10} و u_{20} :

$$u_{20} = -3(20) + 2 = -58$$

$$u_{10} = -3(10) + 2 = -28$$

3. اتجاه تغير المتتالية:

بما أن $r = -3 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4. حساب نهاية المتتالية:

$\lim u_n = \lim (-3n + 2) = -\infty$ و بالتالي فالمتتالية (u_n) ليست متقاربة (u_n) متباعدة).

5. حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(2 - 3n + 2) = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$$

6. حساب المجموع S :

$$S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots + u_{20} = \frac{20-10+1}{2}(u_{10} + u_{20}) = \frac{11(-28-58)}{2} = -473$$

حل التمرين -2-

1. البرهان أن (u_n) متتالية حسابية:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(n+1) - 1 - \left(\frac{2}{3}n - 1\right) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3}n + 1 = \frac{2}{3}$$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0 = \frac{2}{3}(0) - 1 = -1$

2. تبين أن 39 حد من حدود المتتالية:

$u_n = 39$ تعني $\frac{2}{3}n - 1 = 39$ و منه $n = 40 \times \frac{3}{2} = 60 \in N$. إذن 39 حد من حدود المتتالية (u_n) .

3. حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2} \left(-1 + \frac{2}{3}n - 1 \right)$$

$$= \frac{n+1}{2} \left(\frac{2}{3}n - 2 \right) = \frac{(n+1)(n-3)}{3}$$

4. عين قيمة n حتى يكون $S_n = 0$:

$S_n = 0$ تعني $\frac{(n+1)(n-3)}{3} = 0$ و منه $(n+1)(n-3) = 0$ للمعادلة حلان هما -1 و 3 (1- مرفوض) . إذن $n = 3$.

حل التمرين -3-

1 حساب $U1$:

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 + u_2 = 12 \dots (1) \\ u_1 + u_2 = 5 \dots (2) \end{cases}$$

العدد u_1 الوسط الحسابي للعددين u_0 و u_2 ومنه $u_0 + u_2 = 2u_1$.

المعادلة (1) تعني $2u_1 + 2u_1 = 12$ و منه $4u_1 = 12$ إذن $u_1 = 3$.

حساب $U0$ و $U2$ و r :

نعوض قيمة u_1 في المعادلة (2) نجد $3 + u_2 = 5$ إذن $u_2 = 2$.

نعوض قيمة u_1 و u_2 في المعادلة (1) نجد $u_0 + 2(3) + 2 = 12$ إذن $u_0 = 4$.

$$r = -1 \quad \text{إذن} \quad u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = -1$$

2. عبارة الحد العام:

$$u_n = u_0 + nr = 4 - n$$

حل التمرين -4-

1. عبارة الحد العام:

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$$

2. حساب v_1 و v_2 :

$$v_2 = 2 \times 3^2 = 18 \quad v_1 = 2 \times 3^1 = 6$$

3. اتجاه تغير المتتالية:

بما أن $q = 3 > 1$ و $v_0 = 2 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة.

4. حساب نهاية المتتالية:

بما أن $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ وبالتالي فالمتتالية (v_n) ليست متقاربة (v_n) متباعدة).

5. حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{v_0}{1-q} (1 - q^{n+1}) = \frac{2}{1-3} (1 - 3^{n+1}) = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

حل التمرين -5-

1. البرهان أن (V_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$

2. حساب نهاية المتتالية (V_n) :

بما أن $0 < q < 1$ فإن $\lim v_n = 0$ وبالتالي فالمتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

3. تبين أن $3/256$ حد من حدود المتتالية (V_n) :

$v_n = \frac{3}{256}$ تعني $3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{256}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{256}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^8$ و منه $n = 8 \in \mathbb{N}$. إذن $\frac{3}{256}$ حد من حدود المتتالية (v_n) .

في هذا السؤال قمنا بحل المعادلة $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{256}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^8$ إذن $n = 8$.

4. عين قيم n التي من أجلها يكون $v_n \geq \frac{3}{8}$:

$v_n \geq \frac{3}{8}$ تعني $3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{3}{8}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{8}$ و منه $\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \ln \frac{1}{8}$ و منه $-n \ln 2 \geq -\ln 8$ و منه $n \leq \frac{-\ln 8}{-\ln 2}$ إذن $n \leq 3$. قيم العدد الطبيعي n

التي من أجلها يكون $v_n \geq \frac{3}{8}$ هي : 0، 1، 2، 3.

حل التمرين -6-

1. حساب U_2 :

لدينا $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ حسب الوسط الهندسي $(u_2^2 = u_1 \times u_3)$: $u_2^2 \times u_2 = 216$ و منه $u_2^3 = 216$ و منه $u_2^3 = 6^3$ و منه $u_2 = 6$.

حساب q :

نعوض قيمة u_2 في المعادلة (1) نجد : $u_1 + u_3 = 20$ و لدينا $u_3 = q \times u_2$ و $u_1 = \frac{u_2}{q}$ و منه المعادلة $u_1 + u_3 = 20$ تعني

$$\frac{u_2}{q} + q \times u_2 = 20 \quad \text{و منه} \quad \frac{u_2}{q} + q \times u_2 = 20 \quad \text{و منه} \quad \frac{6}{q} + 6q = 20 \quad \text{و منه} \quad \frac{6+6q^2}{q} = 20 \quad \text{و منه} \quad 6+6q^2-20q=0 \quad \text{و منه} \quad 3q^2-10q+3=0$$

حلان هما 3 و $\frac{1}{3}$ ، لكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما و منه $q = 3$.

استنتاج U_1 :

$$u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$$

2. عبارة الحد العام :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$$

3. حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1}{q-1} (q^n - 1) = \frac{2}{3-1} (3^n - 1) = 3^n - 1$$

حل التمرين -7-

1. أ. حساب: u_1 و u_2 :

$$\bullet u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 2 = \frac{2}{3} \times \frac{-2}{3} - 2 = -\frac{22}{9} \bullet u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 2 = \frac{2}{3} \times 2 - 2 = \frac{-2}{3}$$

ب. البرهان بالتراجع أن $Un > -6$:

لتكن هذه الخاصية: $p(n)$

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $u_0 = 2 > -6$ محققة.
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n > -6$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > -6$.
- لدينا فرضا $u_n > -6$ ومنه $\frac{2}{3}u_n > -4$ ومنه $\frac{2}{3}u_n - 2 > -6$ أي $u_{n+1} > -6$
- حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي، $u_n > -6$.

ج. اتجاه تغير المتتالية (Un) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 2 - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n - 2 = -\frac{1}{3}u_n - 2$$

مما سبق، من أجل كل عدد طبيعي، $u_n > -6$ ومنه $-\frac{1}{3}u_n < 2$ ومنه $-\frac{1}{3}u_n - 2 < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

د. استنتاج أن المتتالية (Un) متقاربة:

مما سبق، من أجل كل عدد طبيعي $u_n > -6$ ، معناه أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -6. و بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما إذن هي متقاربة.

استنتاج النهاية:

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد l حيث $\lim u_n = \lim u_{n+1} = l$.
و منه $l = \frac{2}{3}l - 2$ و منه $l - \frac{2}{3}l = -2$ و منه $\frac{1}{3}l = -2$ و منه $l = -6$ إذن $\lim u_n = -6$.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 6$.

أ. البرهان أن (Vn) متتالية هندسية:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{2}{3}u_n - 2 + 6 = \frac{2}{3}u_n + 4 = \frac{2}{3}(u_n + 6) = \frac{2}{3}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$

ب. عبارة Vn بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^{n+3}}{3^n}$$

استنتاج Un بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n + 6$ ومنه $u_n = v_n - 6 = 8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6$

التحقق من السؤال 1-د:

$$\lim u_n = \lim \left(8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 \right) = -6 \quad \text{لأن} \quad \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

ج. حساب المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_0 - 6) + (v_1 - 6) + (v_2 - 6) + \dots + (v_n - 6) \\ &= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) - \underbrace{(6 + 6 + 6 + \dots + 6)}_{n+1} = \frac{8}{1 - \frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - 6(n+1) = 24 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - 6(n+1) \end{aligned}$$

حل التمرين -8-

1. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية ثابتة:

المتتالية (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ أي $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}$ ومنه $u_0 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4}$ ومنه $\alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{3}{4}$ ومنه $\frac{3}{4}\alpha = \frac{3}{4}$ ومنه $\alpha = 1$.

حساب المجموع في هذه الحالة:

المتتالية (u_n) ثابتة و بالتالي: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \times u_0 = n+1$

2. نضع $\alpha = 2$ أي $u_0 = 2$:

أ. إثبات أن (v_n) هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 1) = \frac{1}{4}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ب. عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n - 1$ ومنه $u_n = v_n + 1$ إذن $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

ج. اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 1 - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

د. حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + \dots + (v_n + 1)$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + (n+1) = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + n+1$$

حل التمرين -9-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1. البرهان أن $u_n > 1$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

• نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $u_0 = 13 > 1$ محققة .

• نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n > 1$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا $u_n > 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > 1$ أي $u_{n+1} > 1$.

حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب. اتجاه التغير :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

من السؤال السابق : $u_n > 1$ ومنه $-\frac{4}{5}u_n < -\frac{4}{5}$ ومنه $-\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استنتاج تقاربها :

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

3. إثبات أن (Vn) متتالية حسابية :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = v_n - \ln 5$$

اذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln(5)$ و حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(13 - 1) = \ln(12)$

ب. عبارة Vn :

$$v_n = v_0 + nr = -n \ln(5) + \ln(12) = \ln(12) - \ln(5^n) = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$$

استنتاج أن : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$:

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 1)} = u_n - 1$ ومنه $e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = u_n - 1$ إذن $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

حساب النهاية :

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{5^n} \right) = 1 \right] : \text{لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{5^n} = 0$$

ج. تبين أن
$$(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1}$$

لدينا : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و منه :

$$\begin{aligned} (u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) &= \left(1 + \frac{12}{5^0} - 1 \right) \left(1 + \frac{12}{5^1} - 1 \right) \left(1 + \frac{12}{5^2} - 1 \right) \times \dots \times \left(1 + \frac{12}{5^n} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{12}{5^0} \right) \left(\frac{12}{5^1} \right) \left(\frac{12}{5^2} \right) \times \dots \times \left(\frac{12}{5^n} \right) = 12^{n+1} \times \left(\frac{1}{5^0 \times 5^1 \times \dots \times 5^n} \right) = 12^{n+1} \times \frac{1}{5^{0+1+\dots+n}} = 12^{n+1} \times \frac{1}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{12^{n+1}}{\left(5^{\frac{n}{2}} \right)^{n+1}} = \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

حل التمرين -10-

1. حساب: u_1 و u_2 .

• $u_1 = 2u_0 + (1) + 1 = 2(1) + (1) + 1 = 4$ • $u_2 = 2u_1 + (2) + 1 = 2(4) + (2) + 1 = 11$

2. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية :

المتتالية (v_n) هندسية معناه $v_{n+1} = q \times v_n$ حيث q هو أساس المتتالية (v_n) .

$$u_n + n + 1 + \frac{\alpha}{2} = v_n \quad \text{المتتالية } (v_n) \text{ هندسية تعني } v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 + \alpha = 2u_n + n + 1 + n + 1 + \alpha = 2u_n + 2n + 2 + \alpha = 2 \left(u_n + n + 1 + \frac{\alpha}{2} \right)$$

أي $u_n + n + 1 + \frac{\alpha}{2} = u_n + n + \alpha$ و منه $1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ و منه $\alpha = 2$.

3. $\alpha = 2$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + n + 2$.

أ. تعيين أساس المتتالية و حدها الأول:

لدينا مما سبق $v_{n+1} = 2 \times v_n$ من أجل $\alpha = 2$. إذن أساس المتتالية (v_n) هو $q = 2$

كما و حدها الأول : $v_0 = u_0 + 0 + 2 = 1 + 2 = 3$.

ب. عبارة V_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 2^n$$

استنتاج Un بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n + n + 2$ و منه $u_n = v_n - n - 2$ إذن $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$

ج. حساب المجاميع و الجداء:

• $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{v_0}{q-1} (q^{n+1} - 1) = \frac{3}{2-1} (2^{n+1} - 1) = 3(2^{n+1} - 1)$

• $S_2 = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 = (3 \times 2^0)^2 + (3 \times 2^1)^2 + \dots + (3 \times 2^n)^2 = 3^2 \times (2^2)^0 + 3^2 \times (2^2)^1 + \dots + 3^2 \times (2^2)^n = 9 \times 4^0 + 9 \times 4^1 + \dots + 9 \times 4^n$

• $S_2 = \frac{9}{4-1} (4^{n+1} - 1) = 3(4^{n+1} - 1)$ إذن: 4 و حدها الأول 9

$$\bullet P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = (3 \times 2^0) \times (3 \times 2^1) \times (3 \times 2^2) \times \dots \times (3 \times 2^n) \\ = \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{n+1} \times 2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times \dots \times 2^n = 3^{n+1} \times 2^{1+2+\dots+n} = 3^{n+1} \times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\bullet S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3 \times 2^0} + \frac{1}{3 \times 2^1} + \dots + \frac{1}{3 \times 2^n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\bullet S_3 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \text{ إذن: } \frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ حدها الأول } \frac{1}{3} \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ هو مجموع حدود متعاقبة من } S_3$$

$$\bullet S_4 = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 0 - 2) + (v_1 - 1 - 2) + \dots + (v_n - 2 - 2) = \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{S_1} - (0 + 1 + \dots + n) - \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{n+1} = S_1 - \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1)$$

حل التمرين -11-

1. حساب u_2 و u_3 :

$$\bullet u_2 = 3u_1 - 2u_0 = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 10 \quad \bullet u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \times 10 - 2 \times 4 = 22$$

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ. إثبات أن (Vn) هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n - u_{n+1} = 2u_{n+1} - 2u_n = 2(u_{n+1} - u_n) = 2v_n$$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$:

ب. حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$\bullet S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{v_0}{q-1} (q^{n-1-0+1} - 1) = \frac{3}{2-1} (2^n - 1) = 3 \times 2^n - 3$$

ج. حساب المجموع S_n بدلالة Un :

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$ ومنه :

$$\bullet S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0 = u_n - 1$$

د. عبارة Un بدلالة S_n :

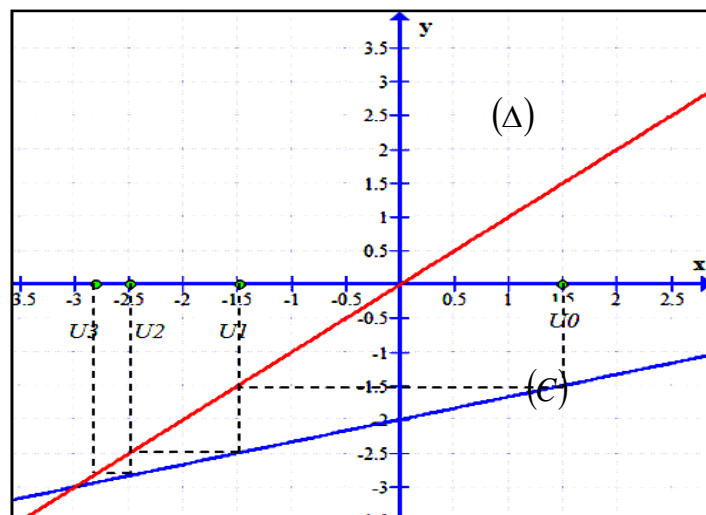
لدينا $S_n = u_n - 1$ ومنه $u_n = S_n + 1$.

استنتاج عبارة Un بدلالة n :

لدينا $S_n = u_n - 1$ و من جهة أخرى $S_n = 2^n - 1$ ومنه $u_n - 1 = 3 \times 2^n - 3$ إذن $u_n = 3 \times 2^n - 2$

حل التمرين -12-

1. أ. ب. رسم (C) و (Δ) و تمثيل الحدود:



ج. تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو -3. (-3) هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (C) .

2. أ. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq -3$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

• نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $u_0 = \frac{3}{2} \geq -3$ محققة .

• نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n \geq -3$ و نبهرن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq -3$.

لدينا $u_n \geq -3$ ومنه $\frac{1}{3}u_n \geq -1$ ومنه: $u_{n+1} \geq -3$ أي: $\frac{1}{3}u_n$ $U0$

حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq -3$:

ب. التحقق أن (u_n) متناقصة :

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n - 2$ بما أن $u_n \geq -3$ فإن: $-\frac{2}{3}u_n \leq 2$: فإن $-\frac{2}{3}u_n - 2 \leq 0$ أي: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن : المتتالية (u_n) متناقصة.

ج. التقارب :

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 3$

أ. إثبات أن (v_n) هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 + 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$

ب. عبارة u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n + 3$ و منه: $u_n = v_n - 3$ و منه: $u_n = v_0 \times q^n - 3$ و منه: $u_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

استنتاج نهاية (u_n) :

بما أن : $0 < q = \frac{1}{3} < 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = -3$

حل التمرين -13-

1. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$:

$$2 - \frac{3}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 4 - 3}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = u_{n+1}$$

2. البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $-1 \leq u_n \leq 1$:

• لدينا $-1 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ محققة .

• نفرض أن $-1 \leq u_n \leq 1$ و نبرهن أن $-1 \leq u_{n+1} \leq 1$.

لدينا فرضاً $-1 \leq u_n \leq 1$ و منه $1 \leq u_n + 2 \leq 3$ و منه $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq 1$ و منه $-3 \leq \frac{-3}{u_n + 2} \leq -1$ و منه $-1 \leq 2 - \frac{3}{u_n + 2} \leq 1$ أي $-1 \leq u_{n+1} \leq 1$

. إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $-1 \leq u_n \leq 1$.

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n + 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 1}{u_n + 2} = -\frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

لما $-1 \leq u_n \leq 1$ يكون $1 + u_n \geq 0$ و $1 - u_n \geq 0$ و $u_n + 2 > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 1}{1 - u_n}$.

أ. تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1}{1 - \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}} = \frac{\frac{2u_n + 1 + u_n + 2}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{u_n + 2}} = \frac{3u_n + 3}{1 - u_n} = 3 \left(\frac{u_n + 1}{1 - u_n} \right) = 3v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 + 1}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

ب. كتابة (v_n) بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$

استنتاج (u_n) بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n + 1}{1 - u_n}$ أي أن $v_n - u_n v_n = u_n + 1$ و منه $u_n + u_n v_n = v_n - 1$ و منه $u_n(1 + v_n) = v_n - 1$ و منه $u_n = \frac{v_n - 1}{1 + v_n}$ إذن :

$$u_n = \frac{3^{n+1} - 1}{1 + 3^{n+1}}$$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{1 + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{3^{n+1} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + 1\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \overbrace{\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}^0}{\underbrace{\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}_0 + 1} = 1$$

ج. حساب المجموع :

$$S_n = \frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \dots + \frac{2}{v_n} = 2 \times \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} \right) = 2 \times \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}} \right)$$

$$= 2 \times \left(\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^2}{1 - \frac{1}{3}} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{(n+1)-2+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

حل التمرين -14-

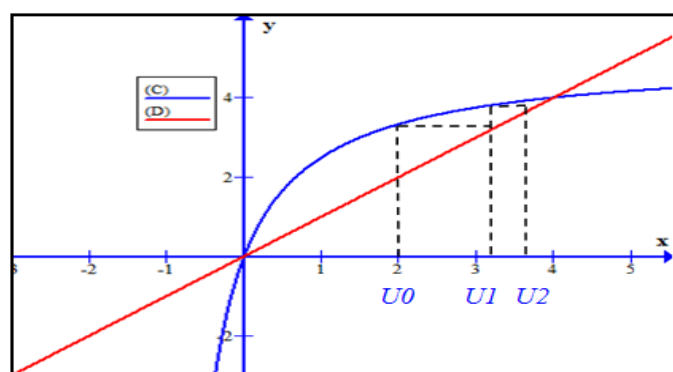
1.أ.دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{5(x+1) - 5x}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0, \text{ ولدينا } [0;4]$$

الدالة f متزايدة تماما على المجال [0;4].

ب. إنشاء (C) و (D) :

في المجال [0;4] يكون (C) يقع فوق (D).



ج. تبين أنه إذا كان $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$:

لدينا $f(0) = 5$ و $f(4) = 0.5$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال [0;4] فإنه لما $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [f(0); f(4)]$ أي $f(x) \in [0;4]$.

2.أ. التمثيل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية :

ب. تخمين حول اتجاه تغير المتتالية و تقاربها :

يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 4.

ج. البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي، $0 \leq u_n \leq 4$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية.

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $0 \leq u_0 = 2 \leq 4$ محققة .
 - نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $0 \leq u_n \leq 4$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.
- لدينا لما $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$ و منه لما $0 \leq u_n \leq 4$ فإن $0 \leq f(u_n) \leq 4$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $0 \leq u_n \leq 4$.

د.إرساة اتجاه تغير المتتالية (Un):

لدينا في المجال $[0;4]$ يكون (C) يقع فوق (D) معناه لما $x \in [0;4]$ فإن $f(x) - x \leq 0$ و منه لما $0 \leq u_n \leq 4$ فإن $f(u_n) - u_n \leq 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$. إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

هـ. استنتج تقارب المتتالية:

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة.

حساب النهاية:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ إذن $f(l) = l$ ومنه $l = \frac{5l}{l+1}$ ومنه $l^2 - 4l = 0$ هذه المعادلة تقبل حلان هما 0 و 4 و بما أن المتتالية متزايدة فإن $l = 4$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

حل التمرين -15-

1. البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $Un > -2$:

- لدينا $u_0 = 1 > -2$ محققة .
 - نفرض أن $u_n > -2$ ونبرهن أن $u_{n+1} > -2$.
- لدينا فرضاً $u_n > -2$ و منه $u_n + 5 > 3$ و منه $\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$ و منه $\frac{-9}{u_n + 5} > -3$ و منه $1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$ أي $u_{n+1} > -2$.
- إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n > -2$.

ب. إثبات المتتالية (Un) متناقصة تماماً :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 5} - u_n = \frac{u_n - 4 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$$

لما $-1 \leq u_n \leq 1$ يكون $u_n + 5 > 0$ و $-(u_n + 2)^2 < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً .

استنتاج أن المتتالية (Un) متقاربة :

بما أن المتتالية متناقصة تماماً و محدودة من الأسفل بالعدد -2 فهي متقاربة .

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

أ- تبين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها $1/3$ و تعيين حدها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} = \frac{1}{\frac{3u_n + 6}{u_n + 5}} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n + 5}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{u_n + 2 + 3}{u_n + 2} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{3}{u_n + 2} \right) = \frac{1}{u_n + 2} + \frac{1}{3} = v_n + \frac{1}{3}$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول: $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$

3. كتابة (V_n) بدلالة n :

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$$

استنتاج (U_n) بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ أي أن $u_n v_n + 2v_n = 1$ ومنه $u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n} - 2$ إذن: $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}} - 2 = \frac{3}{n + 1} - 2$

حساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n + 1} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{3}{n} \right)}_0 - 2 \right) = -2$$

4. المجموع:

$$u_n v_n = u_n \times \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n}{u_n + 2} = \frac{\frac{3}{n + 1} - 2}{\frac{3}{n + 1} - 2 + 2} = \frac{\frac{3}{n + 1} - 2}{\frac{3}{n + 1}} = \frac{3 - 2n - 2}{\frac{3}{n + 1}} = \frac{1 - 2n}{\frac{3}{n + 1}} = \frac{-2}{3}n + \frac{1}{3}$$

ومنه فإن المجموع $(u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)$ هو مجموع $n + 1$ حدا متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{-2}{3}$ و حدها الأول $\frac{1}{3}$.

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \frac{n + 1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} \right) = \frac{n + 1}{2} \left(\frac{2 - 2n}{3} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{1 - n}{3} \right) = \frac{1}{3} (1 + n)(1 - n) = \frac{1}{3} (1 - n^2)$$

حل التمرين -16-

1. حساب u_2, u_3 :

$$u_2 = 2\sqrt{\frac{u_1}{e}} = 2\sqrt{\frac{e^3}{e}} = 2e \quad u_3 = 2\sqrt{\frac{u_2}{e}} = 2\sqrt{\frac{2e}{e}} = 2\sqrt{2}$$

2. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n > \frac{4}{e}$:

نسمي $p(n)$ هذه الخاصية.

• نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = e^3 > \frac{4}{e}$ محققة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n > \frac{4}{e}$ ونبرهن صحة $p(n + 1)$ أي $u_{n+1} > \frac{4}{e}$.

لدينا: $u_n > \frac{4}{e}$ ومنه $\frac{u_n}{e} > \frac{4}{e^2}$ ومنه $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \sqrt{\frac{4}{e^2}}$ أي $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \frac{2}{e}$ ومنه $2\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \frac{4}{e}$ ومنه $u_{n+1} > \frac{4}{e}$. إذن $u_n > \frac{4}{e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

3. تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{\frac{u_n}{e}}}{u_n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{\sqrt{u_n}}$$

$$\text{لدينا: } u_n > \frac{4}{e} \text{ ومنه } \sqrt{u_n} > \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ ومنه } \frac{1}{\sqrt{u_n}} < \frac{\sqrt{e}}{2} \text{ ومنه } \frac{2}{\sqrt{e}} \times \frac{\sqrt{e}}{2} < 1 \text{ أي } \frac{2}{\sqrt{e}} < 1 \text{ أي } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية:

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ و $u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} < u_n$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4. استنتاج التقارب:

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{4}{e}$ فهي متقاربة.

حساب النهاية:

$$\text{بما أن } (u_n) \text{ متقاربة فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\text{إذن } f(l) = l \text{ ومنه } l = 2\sqrt{\frac{l}{e}} \text{ ومنه } l^2 = 4\frac{l}{e} \text{ ومنه } l = \frac{4}{e} \text{ ومنه } l \in [1; +\infty[\text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{e}$$

$$5. \text{نضع من أجل كل } n \in N^* : v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n$$

أ- البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_{n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(2\sqrt{\frac{u_n}{e}} \right) = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{u_n}{e}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} \ln(u_n) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} \ln(u_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(u_n) \right) = \frac{1}{4} v_n$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول : } v_1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln e^3 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{3}{2} = 2 - \ln 2$$

ب. كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = (2 - \ln 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

من أجل كل $n \in N^*$: $v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n$ و منه $v_n - \frac{1}{2} + \ln 2 = \frac{1}{2} \ln u_n$ و منه $2v_n - 1 + 2 \ln 2 = \ln u_n$ و منه:

$u_n = e^{2v_n - 1 + 2 \ln 2}$ و منه: $u_n = e^{-1} \times e^{2 \ln 2} \times e^{2v_n}$ و منه $u_n = \frac{1}{e} \times e^{\ln 4} \times e^{2v_n}$ و منه $u_n = \frac{1}{e} \times 4 \times e^{2v_n}$ و منه

$$u_n = \frac{4}{e} e^{2v_n}$$

التأكد من النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e} e^{2v_n} = \frac{4}{e} \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ و } 0 < q = \frac{1}{2} < 1 \text{ و منه :}$$

حل التمرين -17-

(I) لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e + \sqrt{u_n - e}$

1. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $e < u_n < e+1$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

• نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$ لدينا $e < u_0 = 3 < e+1$ محققة .

• نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $e < u_n < e+1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $e < u_{n+1} < e+1$

لدينا $e < u_n < e+1$ و منه $0 < u_n - e < 1$ و منه $0 < \sqrt{u_n - e} < 1$ و منه $e < e + \sqrt{u_n - e} < e+1$

أي $e < u_{n+1} < e+1$. حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e < u_n < e+1$

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - e)(e+1 - u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e + \sqrt{u_n - e} - u_n = \frac{(+\sqrt{u_n - e} - (u_n - e))(+\sqrt{u_n - e} + (u_n - e))}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{(u_n - e) - (u_n - e)^2}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} \\ &= \frac{(u_n - e) - (u_n^2 - 2eu_n + e^2)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{-u_n^2 + (2e+1)u_n - e^2 - e}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{(u_n - e)(e+1 - u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} \end{aligned}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا $\sqrt{u_n - e} + u_n - e > 0$

ولدينا $u_n > e$ و منه $u_n - e > 0$

و لدينا $u_n < e+1$ و منه $-u_n < -e-1$ و منه $1+e-u_n > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه فإن (u_n) متزايدة تماما .

3. استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ $e+1$ فهي متقاربة .

حساب نهايتها :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ متقاربة فإن } (u_n)$$

إذن $f(l) = l$ ومنه $l = e + \sqrt{l-e}$ ومنه $l - e = \sqrt{l-e}$ ومنه $l^2 - 2e \times l + e^2 = l - e$ ومنه $l^2 - (2e+1) \times l + e^2 + e = 0$ للمعادلة حلان هما $e+1$ و e لكن (u_n) متزايدة و بالتالي $l = e+1$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e+1$.

(II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e \ln(u_n - e)$

1. تبين أن المتتالية (Vn) هندسية أساسها $1/2$:

$$v_{n+1} = e \ln(u_{n+1} - e) = e \ln((e + \sqrt{u_n - e}) - e) = e \ln(\sqrt{u_n - e}) = e \frac{1}{2} \ln(u_n - e) = \frac{1}{2} e \ln(u_n - e) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = e \ln(u_0 - e) = e \ln(3 - e)$.

2. عبارة Vn بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = e \ln(3 - e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{تبين أن } u_n = e \left(1 + e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} \right)$$

لدينا $v_n = e \ln(u_n - e)$ ومنه $\frac{v_n}{e} = \ln(u_n - e)$ ومنه $e^{\frac{v_n}{e}} = u_n - e$ ومنه $e^{\frac{v_n}{e}} + e = u_n$ ومنه $u_n = e(e^{\frac{v_n}{e}} + 1)$ ومنه $u_n = e(e^{e \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} + 1)$

$$u_n = e \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} + 1 \right) \text{ ومنه: } u_n = e \left(e^{\frac{e \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{e} - 1} + 1 \right)$$

حساب النهاية مرة ثانية.

$$\lim e \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} + 1 \right) = e(e^{-1} + 1) = e \left(\frac{e+1}{e} \right) = e+1$$

حساب S_n :

$$S_n = \ln(3-e) + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \ln(3-e) \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \ln(3-e) \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) \right] = \ln(3-e) \left[2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) \right]$$

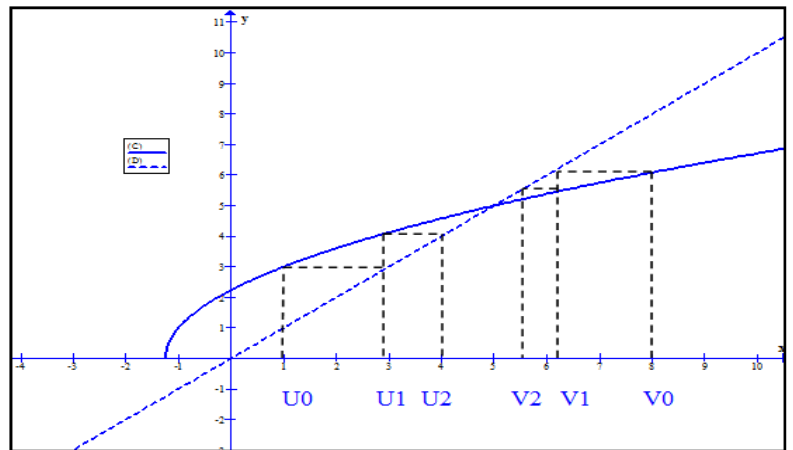
$$S_n = 2 \ln(3-e) \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right)$$

تبين أن $P_n = e^{S_n - n - 1}$:

$$\begin{aligned}
 P_n &= \left(\frac{u_0}{e} - 1 \right) \times \left(\frac{u_1}{e} - 1 \right) \times \left(\frac{u_2}{e} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{u_n}{e} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{e^{\left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^0 - 1} + 1 \right)} - 1}{e} \right) \times \left(\frac{e^{\left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 - 1} + 1 \right)} - 1}{e} \right) \times \dots \times \left(\frac{e^{\left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1} + 1 \right)} - 1}{e} \right) \\
 &= \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^0 - 1} + 1 - 1 \right) \times \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 - 1} + 1 - 1 \right) \times \dots \times \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1} + 1 - 1 \right) \\
 &= \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^0 - 1} \right) \times \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 - 1} \right) \times \dots \times \left(e^{\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1} \right) \\
 &= e^{(\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^0 - 1) + (\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 - 1) + \dots + (\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1)} = e^{(\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^0) + (\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^1) + \dots + (\ln(3-e) \times \left(\frac{1}{2} \right)^n) - 1 - 1 - \dots - 1} \\
 P_n &= e^{S_n - n - 1}
 \end{aligned}$$

حل التمرين -18-

1. أتمثيل الحدود على محور الفواصل :



ب. تخمين حول اتجاه تغير كل من (vn) و (Un):

يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 5 و (v_n) متناقصة و متقاربة نحو 1.

2. أثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي، 1 ≤ u_n ≤ 5 :

نعتبر p(n) هذه الخاصية .

• نتحقق من صحة الخاصية p(0) لدينا 1 ≤ u₀ = 1 ≤ 5 محققة .

• نفرض صحة الخاصية p(n) أي 1 ≤ u_n ≤ 5 ونبرهن صحة p(n+1) أي 1 ≤ u_{n+1} ≤ 5

لدينا 1 ≤ u_n ≤ 5 ومنه 4 ≤ 4u_n ≤ 20 ومنه 9 ≤ 4u_n + 5 ≤ 25 ومنه 1 ≤ 3 ≤ √(4u_n + 5) ≤ 5

ومنه 1 ≤ u_{n+1} ≤ 5 أي 1 ≤ √(4u_n + 5) ≤ 5 .

حسب الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : 1 ≤ u_n ≤ 5

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي، $5 \leq v_n \leq 8$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

• نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$. لدينا $5 \leq u_0 = 8 \leq 8$ محققة .

• نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $5 \leq v_n \leq 8$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $5 \leq v_{n+1} \leq 8$

لدينا $5 \leq v_n \leq 8$ ومنه $20 \leq 4v_n \leq 32$ ومنه $25 \leq 4v_n + 5 \leq 37$ ومنه $5 \leq \sqrt{4v_n + 5} \leq \sqrt{37} \leq 8$

ومنه $5 \leq \sqrt{4v_n + 5} \leq 8$ أي $5 \leq v_{n+1} \leq 8$.

حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5 \leq v_n \leq 8$

ب. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4u_n + 5} - u_n = \frac{(\sqrt{4u_n + 5} - u_n)(\sqrt{4u_n + 5} + u_n)}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{4u_n + 5 - u_n^2}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{4u_n + 5 - u_n^2}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(5 - u_n)}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n}$$

لدينا $1 \leq u_n \leq 5$ ومنه $2 \leq u_n + 1 \leq 6$ أي $u_n + 1 > 0$ كذلك $-5 \leq -u_n \leq -1$ ومنه $0 \leq 5 - u_n \leq 4$ أي $5 - u_n \geq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، المتتالية (u_n) متزايدة .

دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{4v_n + 5} - v_n = \frac{(\sqrt{4v_n + 5} - v_n)(\sqrt{4v_n + 5} + v_n)}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{4v_n + 5 - v_n^2}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{4v_n + 5 - v_n^2}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{(v_n + 1)(5 - v_n)}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n}$$

لدينا $5 \leq v_n \leq 8$ ومنه $3 \leq v_n + 1 \leq 9$ أي $v_n + 1 > 0$ كذلك $-8 \leq -v_n \leq -5$ ومنه $-3 \leq 5 - v_n \leq 0$ أي $5 - v_n \leq 0$ ومنه $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ، المتتالية (v_n) متناقصة .

ج. استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 5 فهي متقاربة .

المتتالية (v_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 5 فهي متقاربة .

استنتاج نهاية كل منهما:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{بما أن } (u_n) \text{ متقاربة فإن}$$

إذن $f(l) = l$ ومنه $l = \sqrt{4l + 5}$ ومنه $l^2 = 4l + 5$ ومنه $l^2 - 4l - 5 = 0$ للمعادلة حلان هما -1 و 5 ، لكن $1 \leq u_n \leq 5$ وبالتالي $l = 5$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.

بما أن (v_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$

إذن $f(l') = l'$ ومنه $l' = \sqrt{4l' + 5}$ ومنه $l'^2 = 4l' + 5$ ومنه $l'^2 - 4l' - 5 = 0$ للمعادلة حلان هما -1 و 5 ، لكن $5 \leq v_n \leq 8$ وبالتالي $l' = 5$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$.

3.أ. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $0 \leq 5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$:

$$5 - u_{n+1} = 5 - \sqrt{4u_n + 5} = \frac{(5 - \sqrt{4u_n + 5})(5 + \sqrt{4u_n + 5})}{5 + \sqrt{4u_n + 5}} = \frac{25 - 4u_n - 5}{5 + \sqrt{4u_n + 5}} = \frac{20 - 4u_n}{5 + \sqrt{4u_n + 5}} = \frac{4}{5 + \sqrt{4u_n + 5}}(5 - u_n)$$

و اوضح أن $\frac{4}{5 + \sqrt{4u_n + 5}}(5 - u_n) \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$ و منه $5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$ أي $5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$ و لدينا : $u_{n+1} \leq 5$ و منه : $-u_{n+1} \geq -5$

و منه : $5 - u_{n+1} \geq 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $0 \leq v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$:

$$v_{n+1} - 5 = \sqrt{4v_n + 5} - 5 = \frac{(\sqrt{4v_n + 5} - 5)(\sqrt{4v_n + 5} + 5)}{5 + \sqrt{4v_n + 5}} = \frac{4v_n + 5 - 25}{5 + \sqrt{4v_n + 5}} = \frac{4v_n - 20}{5 + \sqrt{4v_n + 5}} = \frac{4}{5 + \sqrt{4v_n + 5}}(v_n - 5)$$

و اوضح أن $\frac{4}{5 + \sqrt{4v_n + 5}}(v_n - 5) \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$ و منه $v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$ أي $v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$ و لدينا : $v_{n+1} \geq 5$ و منه :

$v_{n+1} - 5 \geq 0$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$

ب. استنتاج من أجل كل عدد طبيعي : $0 \leq 5 - u_n \leq 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 5 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(5 - u_n)$ و منه $0 \leq 5 - u_1 \leq \frac{4}{5}(5 - u_0)$ و $0 \leq 5 - u_2 \leq \frac{4}{5}(5 - u_1)$

$$0 \leq 5 - u_3 \leq \frac{4}{5}(5 - u_2) \text{ و و } 0 \leq 5 - u_n \leq \frac{4}{5}(5 - u_{n-1})$$

بضرب المتراحات طرفا إلى طرف نجد : $0 \leq (5 - u_1) \times (5 - u_2) \times (5 - u_3) \times \dots \times (5 - u_n) \times \frac{4}{5}(5 - u_0) \times \frac{4}{5}(5 - u_1) \times \frac{4}{5}(5 - u_2) \times \dots \times \frac{4}{5}(5 - u_{n-1})$

$$0 \leq 5 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 4 \text{ و منه : } 0 \leq 5 - u_n \leq \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5}}_n \times (5 - u_0)$$

$$0 \leq 5 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \text{ و منه : } 0 \leq 5 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5} \times 5$$

استنتاج من أجل كل عدد طبيعي $0 \leq v_n - 5 \leq 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq v_{n+1} - 5 \leq \frac{4}{5}(v_n - 5)$ و منه $0 \leq v_1 - 5 \leq \frac{4}{5}(v_0 - 5)$ و $0 \leq v_2 - 5 \leq \frac{4}{5}(v_1 - 5)$ و $0 \leq v_3 - 5 \leq \frac{4}{5}(v_2 - 5)$

$$0 \leq v_n - 5 \leq \frac{4}{5}(v_{n-1} - 5) \text{ و و } 0 \leq v_n - 5 \leq \frac{4}{5}(v_{n-1} - 5)$$

بضرب المتراحات طرفا إلى طرف نجد : $0 \leq (v_1 - 5) \times (v_2 - 5) \times (v_3 - 5) \times \dots \times (v_n - 5) \leq \frac{4}{5} (v_0 - 5) \times \frac{4}{5} (5 - v_1) \times \frac{4}{5} (5 - v_2) \times \dots \times \frac{4}{5} (5 - v_{n-1})$ بعد

$$الاختزال نجد : $0 \leq v_n - 5 \leq \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5}}_n \times (v_0 - 5)$ و منه : $0 \leq v_n - 5 \leq 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$$

هل (Un) و (Vn) متجاورتان:

(u_n) و (v_n) متجاورتان لأن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية.

حل التمرين -19-

1. إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{e}$

نضع : $u_n > \frac{1}{e} \dots \dots \dots p(n)$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = \frac{5}{4e} > \frac{1}{e}$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض أن $u_n > \frac{1}{e}$ ونبرهن أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ فإن : $f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right)$ ومنه $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.

نستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي : $u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{eu_n + 1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{eu_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - eu_n^2 - u_n}{eu_n + 1} = \frac{u_n - eu_n^2}{eu_n + 1} = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{eu_n + 1}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتبرير تقاربها :

$$لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{eu_n + 1}$ ومنه إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $\frac{1}{e} - u_n$ وبما أن $u_n > \frac{1}{e}$ فإنه ينتج $\frac{1}{e} - u_n < 0$$$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

تبرير التقارب:

بما أن (u_n) محدودة من أسفل ومتناقصة فهي متقاربة .

2. معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$

*** إثبات أن (v_n) هندسية أساسها 2 ؛ تعيين حدها الأول :**

$$v_{n+1} = \frac{eu_{n+1}}{eu_{n+1}-1} = \frac{\frac{2eu_n}{eu_n+1}}{\frac{2eu_n}{eu_n+1}-1} = \frac{2eu_n}{eu_n+1} \times \frac{eu_n+1}{2eu_n-eu_n-1} = \frac{2eu_n}{eu_n-1} = 2v_n$$

$$v_0 = \frac{eu_0}{eu_0-1} = \frac{e\left(\frac{5}{4e}\right)}{e\left(\frac{5}{4e}\right)-1} = \frac{5}{4} \times 4 = 5 \text{ ومنه } (v_n) \text{ هندسية أساسها 2 وحدها الأول}$$

وكتابة عبارة v_n :

$$v_n = 5 \times 2^n \text{ ومنه } v_n = v_0 \times q^n$$

3. أ. التحقق أنه من أجل كل n فإن $v_n = 1 + \frac{1}{eu_n-1}$:

$$\text{لدينا : } v_n = 1 + \frac{1}{eu_n-1} \text{ ومنه } 1 + \frac{1}{eu_n-1} = \frac{eu_n-1+1}{eu_n-1} = \frac{eu_n}{eu_n-1}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$u_n = \frac{1}{e(v_n-1)} + \frac{1}{e} \text{ ومنه } \frac{1}{v_n-1} = eu_n-1 \text{ ومنه } v_n-1 = \frac{1}{eu_n-1} \text{ ومنه } v_n = 1 + \frac{1}{eu_n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e(v_n-1)} + \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}$$

ب. حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = 5(2^{n+1}-1) \text{ ومنه } S_n = 5 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \text{ ومنه } S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

حل التمرين -20

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1. تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4}$:

$$b = -10 \text{ و } a = 3 \text{ بالمطابقة نجد } a + \frac{b}{u_n+4} = \frac{au_n+4a+b}{u_n+4}$$

$$u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$:

$$\text{لدينا } u_0 = \frac{1}{4} \text{ و منه } -2 < u_0 < 1 \text{ محققة}$$

نفرض أن $-2 < u_n < 1$ ولنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$

لدينا $-2 < u_n < 1$ و منه $2 < u_n + 4 < 5$ و منه $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{2}$ و منه $-5 < -\frac{10}{u_n + 4} < -2$ و منه $-2 < 3 - \frac{10}{u_n + 4} < 1$ أي $-2 < u_{n+1} < 1$ ، إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

بما أن $-2 < u_n < 1$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية متزايدة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ و حدها الأول } \frac{5}{2} \text{ و منه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{5}{2} \text{ و حدها الأول } 3$$

كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$$

لدينا $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ أي أن $v_n - u_n v_n = u_n + 2$ و منه $u_n + u_n v_n = v_n - 2$ أي أن $u_n(1 + v_n) = v_n - 2$ و منه

$$u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}$$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = 1$$

حل التمرين -21-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$.

$$3 - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{3(u_n - 1) - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1} = u_{n+1}$$

(1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

$$u_0 = 3 > -2 : n = 0$$

$$(1) \quad u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2$$

اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

(ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n - 1} = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n - 1} < 0$$

(u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل اذن هي متقاربة.

(2) (أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول.

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{3u_n-4}{u_n-1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{3u_n-4-2(u_n-1)}{u_n-1}} = \frac{3u_n-4}{u_n-2} = 2 + \left(\frac{3u_n-4}{u_n-2} - 2 \right) = 2 + \frac{u_n}{u_n-2}$$

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}} = e^{2 + \frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 \times e^{\frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 v_n$$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 و حدها الأول $v_0 = e^{\frac{u_0}{u_0-2}} = e^3$.

(ب) أكتب v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = e^3 \times (e^2)^n = e^3 \times e^{2n} = e^{2n+3}$$

ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$v_n = e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \ln e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \frac{u_n}{u_n-2} \Rightarrow (u_n - 2) \ln v_n = u_n$$

$$\Rightarrow u_n \ln v_n - 2 \ln v_n = u_n \Rightarrow u_n (\ln v_n - 1) = 2 \ln v_n$$

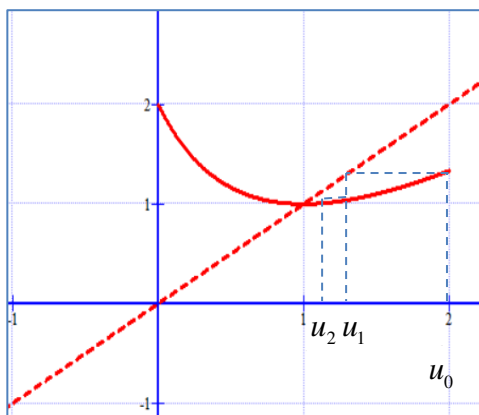
$$u_n (\ln v_n - 1) = \frac{2 \ln v_n}{\ln v_n - 1} = \frac{2 \ln e^{3n+2}}{\ln e^{3n+2} - 1} = \frac{2(3n+2)}{3n+2-1} = \frac{6n+4}{3n+1}$$

(3) احسب بدلالة n : $s_n = \ln(e^{-2} \times v_0) + \ln(e^{-1} \times v_1) + \dots + \ln(e^{-n-2} \times v_n)$.

$$\ln(e^{-n-2} \times v_n) = u_n \ln(e^{-n-2} \times e^{2n+3}) = u_n \ln(e^{3n+1}) = u_n (3n+1) = \frac{6n+4}{3n+1} (3n+1) = 6n+4$$

$$s_n = \frac{n+1}{2} (6n+4+4) = \frac{n+1}{2} (6n+10) = (n+1)(3n+5) : \text{ هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية}$$

حل التمرين -22-



(1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى:

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

نلاحظ أن المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 1 ،

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

$$n=0 : 1 < u_0 = 2 \leq 2$$

$1 < u_n \leq 2$ و f متزايدة على المجال $[1; 2]$ و منه $f(1) < f(u_n) \leq f(2)$ و منه

$1 < u_{n+1} \leq \frac{4}{3} \leq 2$ اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 < u_n \leq 2$$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n + 1}{u_n + 1} \text{ لدينا } -u_n + 1 < 0 \text{ و } u_n + 1 > 0 \text{ اذن } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ و بالتالي المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماماً .}$$

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$: $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$: $\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$ و منه $2 < u_n + 1 \leq 3$ و منه $-1 < \frac{-2}{u_n + 1} \leq \frac{-2}{3}$ و منه $0 < 1 - \frac{2}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$

ثم استنتج أن $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)}{u_n + 1} (u_n - 1) \text{ لدينا } 0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3} \text{ و منه : } 0 < \frac{(u_n - 1)}{u_n + 1} (u_n - 1) \leq \frac{1}{3}(u_n - 1) \text{ أي } 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$$

$$0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$$

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$ و منه $0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{3}(u_0 - 1)$ و $0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{3}(u_1 - 1)$ و و $0 < u_{n-1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_{n-2} - 1)$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 1)$ أي : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و منه : $1 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1$ لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 = 1$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

حل التمرين -23-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

2. برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = 3 - \frac{8}{u_n + 3}$$

• لدينا $1 \leq u_0 = 5 \leq 5$ محققة .

• نفرض أن $1 \leq u_n \leq 5$ ونبرهن أن $1 \leq u_{n+1} \leq 5$.

لدينا فرضاً $1 \leq u_n \leq 5$ ومنه $4 \leq u_n + 3 \leq 8$ ومنه $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{4}$ ومنه $-2 \leq \frac{-8}{u_n + 3} \leq -1$ ومنه $1 \leq 3 - \frac{8}{u_n + 3} \leq 2 \leq 5$ أي

$1 \leq u_{n+1} \leq 5$ إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq 5$.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 3} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 3}$$

لدينا $1 \leq u_n \leq 5$ ومنه $1 + u_n > 0$ و $u_n + 3 > 0$

و $1 \leq u_n \leq 5$ و $-5 \leq -u_n \leq -1$ و $-4 \leq 1 - u_n \leq 0$ أي $1 - u_n \leq 0$

إذن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة .

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{3; -1\}$

أ. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية ، ثم عين أساسها وحدها الأول .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - \alpha}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1 - \alpha u_n - 3\alpha}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 1 + u_n + 3}{u_n + 3}} = \frac{3u_n + 1 - \alpha u_n - 3\alpha}{4u_n + 4}$$

$$= \frac{3u_n + 1 - \alpha u_n - 3\alpha}{4u_n + 4} = \frac{(3 - \alpha)u_n + 1 - 3\alpha}{4u_n + 4} = \frac{(3 - \alpha)}{4} \times \frac{u_n + \frac{1 - 3\alpha}{3 - \alpha}}{u_n + 1}$$

(v_n) هندسية معناه $\frac{1 - 3\alpha}{3 - \alpha} = -\alpha$ معناه $1 - 3\alpha = -3\alpha + \alpha^2$ ومنه $1 = \alpha^2$ معناه $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$ مرفوض .

إذن $\alpha = 1$ حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3 - \alpha}{4} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$ و $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ب. أكتب v_n :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم استنتج u_n بدلالة n .

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ أي أن $u_n v_n + v_n = u_n - 1$ ومنه $-u_n + u_n v_n = -v_n - 1$ ومنه $u_n(1 - v_n) = v_n + 1$ ومنه

$$u_n = \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} : \text{إذن } u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{ج. أحسب المجموع} \quad S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$$

$$\frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{\frac{v_n + 1}{1 - v_n} + 1} = \frac{1}{\frac{v_n + 1 + 1 - v_n}{1 - v_n}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

$$S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - v_0) + \frac{1}{2}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

$$= \frac{1}{2}[(1 - v_0) + (1 - v_1) + \dots + (1 - v_n)] = \frac{1}{2}[1 \times (n + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 \times (n + 1) - \frac{v_0}{1 - \frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[n + 1 - \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right]$$

تمارين مقترحة

التمرين -1-

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول u_0 وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1- عين قيمة u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2- نفرض $u_0 = 6$:

أ) أحسب u_1 و u_2 .

ب) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = \alpha u_n - 2$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

عين قيمة العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية .

ت) نضع $\alpha = -1$:

• عبر بدلالة n عن كل من v_n و u_n .

• أحسب بدلالة n المجموع : S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين -2-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + 3u_n \end{cases}$$

1. احسب u_1 ، u_2

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

أبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج. احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2$ -بين أن : $S'_n = \frac{9}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right]$

4. بدلالة n الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

التمرين -3-

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن: $2 \leq u_n \leq 4$

2. بين ان المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

أبين أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

التمرين -4-

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n}$

1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون: $u_{n+1} = a + \frac{b}{4 - u_n}$

2- برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq 3$

3- ادرس رتبة المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

- اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

