

تمارين في المتاليات العددية

التمرين رقم 1

الحل موجود في الصفحة 4

(v_n) متتالية حسابية حيث : $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

1/ عتین أساس المتتالية (v_n) و حدّها الأول v_0 .

2/ أحسب v_n بدلالة n ، ثم عتین العدد الطبيعي n حتى يكون $v_n = 50$.

3/ أحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + v_8 + \dots + v_{94}$.

التمرين رقم 2

الحل موجود في الصفحة 4

(v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_1 و

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$$

1/ عتین الحدود v_1, v_2, v_3 للمتتالية و أساسها .

2/ أحسب الحد العام v_n بدلالة n .

3/ عتبر بدلالة n عن المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

4/ عتین العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = -10$.

التمرين رقم 3

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 .

1/ أحسب حدّها الثاني علما أن : $u_1 + u_3 = 12$.

2/ أحسب الحد الرابع u_4 علما أن : $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.

3/ عتین أساس المتتالية (u_n) و حدّها الأول u_1 .

4/ أكتب الحد العام u_n بدلالة n ، ثم عتین n حتى يكون $u_n = 32$.

5/ أحسب $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ بدلالة n .

التمرين رقم 4

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 2$ و $u_2 + u_5 = 25$.

1/ عتین أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

2/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3/ أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

التمرين رقم 5

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتالية حسابية حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$.

1/ عتین الحد الأول u_0 و الأساس r للمتتالية (u_n) .

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

4/ عتین العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 78$.

التمرين رقم 6

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = 3n +$

1/ أحسب u_0, u_1, u_2 .

2/ بّين أن (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها ، ثم عتین اتجاه تغيّر (u_n) .

3/ تحقق أن 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ما رتبته ؟ .

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$.

التمرين رقم 7

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ و من

أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1/ أحسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n نعرّف المتتالية

(v_n) كما يلي : $v_n = u_n + 1$.

أ) بّين أن (v_n) هندسية يطلب أساسها و حدّها الأول v_1 .

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج) نضع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n .

د) عتین n علما أن : $S_n = 1016$.

التمرين رقم 8

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$

و بالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1/ أ) أحسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

(ب) أحسب الحد العاشر .

2/ أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3/ بين أن العدد 2008 - هو حد من حدود المتتالية (u_n) محددا رتبته .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{671}$.

التمرين رقم 9

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب .

1/ عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت

أن : $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 18 \times 2^n$.

3/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، ثم استنتج قيمة n حتى يكون $S_n = 1134$.

التمرين رقم 10

الحل موجود في الصفحة 5

(I) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1/ عيّن الأساس r والحد الأول u_0 .

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ بين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

(II) (v_n) المتتالية المعرفة بـ : $v_n = 2 \times 8^n$.

1/ بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

2/ أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ بدلالة n .

التمرين رقم 11

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابية متزايدة ، أساسها r وحدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1/ أ) أحسب بدلالة r الجديين T_1 و T_2 حيث :

$$T_1 = u_1 \times u_5 \text{ و } T_2 = u_2 \times u_4$$

(ب) عيّن الأساس r بحيث : $T_2 - T_1 = 27$.

2/ نضع : $r = 3$.

أ) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

• بين أن : $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

(ج) جد العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 145$.

3/ أ) أكت الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n .

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

(ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد

$$\frac{u_{n+5}}{n} \text{ طبيعيا .}$$

التمرين رقم 12

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها $r = 5$ بحيث :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

1/ أحسب u_0 .

2/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 5n + 1$.

3/ عيّن العدد الطبيعي n بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}$.

5/ المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2u_n + 1$.

أ) أدرس اتجاه تغير (v_n) .

(ب) أحسب المجموع $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013}$.

التمرين رقم 13

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث

$$u_1 - u_3 = 5 \text{ و } u_2 = \frac{1}{2}$$

1/ أ) بين أن : $u_1 + u_3 = 1$.

(ب) عيّن الحد الأول u_1 واستنتج أن : $r = -\frac{5}{2}$.

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(ب) عيّن العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها : $S_n = \frac{657}{2}$.

4/ عدد طبيعي غير معدوم ، نضع :

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

أ) تحقق أنه لكل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

(ب) باستعمال البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم : $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين رقم 14

a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متاليتة حسابية متزايدة أساسها r حيث $a + b + c = 9$.
1/ أ) أحسب b ، ثم a ، و c بدلالة r .
ب) علما أن : $a \times c = -16$ ، أحسب r ثم استنتج a و c .
2/ (u_n) متاليتة حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ و أساسها $r = 5$.
أ) أكتب u_n بدلالة n .
ب) أحسب u_{15} ثم استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.
3/ (v_n) متاليتة معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $8v_n - u_n = 0$.
أ) أحسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

التمرين رقم 15

(U_n) متاليتة هندسية حدودها موجبة تماما ، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $U_1 = 20$ و $U_3 = 320$.
1/ بَيِّنْ أن أساس المتاليتة (U_n) هو 4 و حدها الأول هو $U_0 = 5$.
2/ أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، ثم استنتج قيمة حدها السابع .
3/ أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
ب) استنتج قيمة المجموع $S' = U_0 + U_1 + \dots + U_6$.

التمرين رقم 16

(u_n) متاليتة هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$.
1/ أحسب u_1 و u_2 .
2/ أكتب u_n بدلالة n ، ثم استنتج u_5 .
3/ عَيِّنْ إتجاه تغير (u_n) .
4/ أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
ب) استنتج قيمة المجموع $2 + 6 + 18 + \dots + 486$.
5/ أ) عَيِّنْ باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد 3 ، 3^2 ، 3^3 و 3^4 .

ب) استنتج أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$.
6/ عَيِّنْ الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5 .

التمرين رقم 17

(u_n) متاليتة عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
1/ أحسب u_2, u_3, u_4 .
2/ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، نعرف المتاليتة (v_n) حيث $v_n = u_n + 1$.
أ) أثبت أن (v_n) هندسية يَطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
ج) نضع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n .
د) عَيِّنْ n علما أن : $S_n = 1016$.

التمرين رقم 18

أ) (u_n) متاليتة هندسية أساسها 3 و حدها الأول u_0 بحيث : $u_0 + u_3 = 28$.
1. أحسب u_0 ، ثم أكتب u_n بدلالة n .
2. أحسب المجموع $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.
ب) (v_n) متاليتة معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - 5n$.
1. بَيِّنْ أن (v_n) حسابية يَطلب تعيين أساسها ، ثم استنتج إتجاه تغيرها .
2. أحسب المجموع $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.
ج) نعتبر المتاليتة (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $k_n = 1 + 3^n - 5n$.
- تحقق أن : $k_n = u_n + v_n$ ؛ ثم استنتج قيمة المجموع $S_3 = k_0 + k_1 + \dots + k_9$.

التمرين رقم 19

(u_n) متاليتة هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها 3 .
1/ أ) عبّر عن v_n بدلالة n .
ب) أحسب الفرق $v_{n+1} - v_n$ بدلالة n ، ثم استنتج إتجاه تغير (v_n) .

2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

(أ) أحسب S_n بدلالة n .

(ب) عتّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 80$.

(ج) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

حل التمرين رقم 1

للعودة إلى التمرين 1

1/ (v_n) حسابيّة ، إذن : $v_n = v_p + (n - p) \times r$

حيث r أساس المتاليّة (v_n) مع $p < n$ ، و عليه

$$v_8 = v_4 + 4r \text{ أي } 7 = 5 + 4r \text{ أي } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا } v_4 = v_0 + 4r \text{ ومنه } 5 = v_0 + 4 \times \frac{1}{2} \text{ ومنه } v_0 = 3$$

$$2/ \text{ ومنه } v_n = v_0 + nr \text{ ومنه } v_n = 3 + \frac{n}{2} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$v_n = 50 \text{ معناه } 3 + \frac{n}{2} = 50 \text{ ومنه } \frac{n}{2} = 47 \text{ ومنه } n = 94$$

$$3/ \text{ أي } S = \frac{94 - 6 + 1}{2} (v_6 + v_{94}) \text{ أي } S = \frac{89}{2} \left(3 + \frac{6}{2} + 50 \right) = 2492$$

حل التمرين رقم 2

للعودة إلى التمرين 2

1/ بتطبيق خاصيّة الوسط الحسابي $2v_2 = v_1 + v_3$ نجد

$$3v_2 = \frac{3}{2} \text{ أي } v_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} & \dots (1) \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 & \dots (2) \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف بين (1) و (2) نجد : $2v_1 + 5v_2 = \frac{17}{2}$

$$\text{وبالطرح طرفا لطرف نجد : } 2v_3 - 3v_2 = -\frac{11}{2} \text{ ومنه } v_1 = \frac{17 - 5}{2} = 3$$

$$2v_3 = \frac{-11 + 3}{2} \text{ أي } v_3 = -2$$

$$r = v_2 - v_1 = -\frac{5}{2}$$

$$2/ \text{ أي } v_n = u_1 + (n - 1) \times r \text{ أي } v_n = \frac{11}{2} - \frac{5n}{2}$$

$$S_n = \frac{17n - 5n^2}{4} \text{ أي } S_n = \frac{n}{2} (v_1 + v_n) / 3$$

$$S_n = -10 \text{ أي } \frac{17n - 5n^2}{4} = -10 \text{ أي } 5n^2 - 17n + 40 = 0$$

$$17n - 40 = 0 \text{ حلولها هي } 5, -\frac{8}{5} \text{ ومنه } n = 5$$

حل التمرين رقم 3

للعودة إلى التمرين 3

1/ نطبق خاصيّة الوسط الحسابي : $2u_2 = u_1 + u_3$

$$\text{نجد } 2u_2 = 12 \text{ أي } u_2 = 6$$

2/ حسب خاصيّة الوسط الحسابي نكتب : $2u_4 = u_3 + u_5$

$$3u_4 = 30 \text{ ومنه } u_4 = 10$$

$$3/ \text{ لدينا } u_4 = u_2 + 2r \text{ ومنه } 10 = 6 + 2r \text{ ومنه } r = 2$$

$$\text{لدينا } u_2 = u_1 + r \text{ ومنه } 6 = u_1 + 2 \text{ ومنه } u_1 = 4$$

$$4/ u_n = u_1 + (n - 1)r \text{ ومنه } u_n = 4 + (n - 1) \times 2$$

$$\text{ومنّه } u_n = 2 + 2n$$

$$u_n = 32 \text{ معناه } 2 + 2n = 32 \text{ ومنه } 2n = 30 \text{ أي } n = 15$$

$$5/ S_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) \text{ ومنه } S_n = \frac{n}{2} (4 + 2 + 2n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (6 + 2n) \text{ أي } S_n = \frac{n}{2} (3 + n)$$

حل التمرين رقم 4

للعودة إلى التمرين 4

1/ لدينا $u_2 = u_0 + 2r$ و $u_5 = u_0 + 5r$ ومنه

$$u_2 + u_5 = 2u_0 + 7r \text{ أي } u_2 + u_5 = 4 + 7r$$

$$25 = 4 + 7r \text{ ومنه } 7r = 21 \text{ أي } r = 3$$

$$2/ u_n = u_0 + nr \text{ أي } u_n = 2 + 3n$$

3/ الحد الذي رتبته 11 هو u_{10} حيث $u_{10} = 2 + 3 \times 10$

$$\text{أي } u_{10} = 32$$

$$4/ S = \frac{10}{2} (u_1 + u_{10}) \text{ و أي } S = 5(32)$$

$$S = 160$$

حل التمرين رقم 5

للعودة إلى التمرين 5

1/ لدينا $u_3 = u_0 + 3r$ و $u_5 = u_0 + 5r$

$$2u_0 + 7r = 34 \text{ و } 2u_0 + 3r = 18 \text{ إذن : } u_0 + 5r = 11$$

د) $S_n = 1016$ إذن $8 \times 2^n = 1024$ أي $2^n = 128$
ومنه $2^n = 2^7$ ومنه $n = 7$.

حل التمرين رقم 8

1/ $u_2 = u_1 + r$ و $u_5 = u_1 + 4r$ لدينا ، $u_2 - u_5 = 19$
 $2u_5 = 19$ ومنه $2(u_1 + 4r) = 19$ ومنه $u_1 + r - 2(u_1 + 4r) = 19$
 $-2 - 7r = 19$ ومنه $-7r = 21$ ومنه $r = -3$.
ب) $u_{10} = u_1 + 9r$ ومنه $u_{10} = 2 - 27$ ومنه $u_{10} = -25$.
ج) $u_n = u_1 + (n-1)r$ ومنه $u_n = 2 - 3n - 3$ ومنه $u_n = 5 - 3n$.
د) نحل المعادلة : $u_n = -2008$ ومنه $5 - 3n = -2008$
 -2008 ومنه : $n = \frac{-2013}{-3} = 671$ ومنه $n = 671$ أي
 $u_{671} = -2008$ رتبته 671 .
هـ) $S = \frac{671}{2}(u_1 + u_{671})$ /4 ومنه $S = 335.5 \times 671$
ومنه $S = -673013$ ومنه $S = -673013$.

حل التمرين رقم 9

1/ نطبق خاصية الوسط الهندسي : أي $u_5 = u_3 \times q^2$
ومنه $576 = 144 \times q^2$ ومنه $q^2 = \frac{576}{144} = 4$ أي $q^2 = 4$
ومنه $u_3 = u_0 \times q^3$ ، $u_3 = 144$ ومنه $u_0 = \frac{144}{8} = 18$ ومنه $u_0 = 18$.
2/ $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه $u_n = 18 \times 2^n$.
3/ $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ أي $S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$
ومنه $S_n = 18 \times 2^{n+1} - 18$.
4/ معناه $S_n = 1234$ ومنه $18 \times 2^{n+1} - 18 = 1234$
 $18 \times 2^{n+1} = 1252$ ومنه $2^{n+1} = 69.55$ ومنه $2^{n+1} = 64$ ومنه $2^{n+1} = 128$
ومنه $n+1 = 7$ إذن $n = 6$ ومنه $n = 5$.

حل التمرين رقم 10

1/ لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$ مع $p < n$ ومنه
 $u_{15} = u_{10} + 5r$ ومنه $46 = 31 + 5r$ ومنه $15 = 5r$ ومنه $r = 3$.
2/ $u_{10} = u_0 + 10r$ ومنه $u_{10} = 31 - 30$ ومنه $u_0 = 1$.
3/ $u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_n = 1 + 3n$.
4/ نحل المعادلة : $u_n = 6028$ أي $1 + 3n = 6028$ ومنه $3n = 6027$
ومنه $n = 2009$ ومنه $U_{2009} = 6028$ رتبته هي 2010 .

$$\begin{cases} 2u_0 + 3r = 18 \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$$

بالطرح طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $4r = 16$
أي $r = 4$.

نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد

$2u_0 + 12 = 18$ أي $2u_0 = 6$ أي $u_0 = 3$.
 $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 3 + 4n$.
 $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ /3 أي $S_n = \frac{n+1}{2}(3 + 4n)$
أي $S_n = \frac{n+1}{2}(6 + 4n)$ أي $S_n = (n+1)(3 + 2n)$.

4/ $S_n = 78$ أي $(n+1)(3 + 2n) = 78$ أي
 $2n^2 + 5n - 75 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانية حلوها
هي $5, -\frac{15}{2}$ ومنه $n = 5$.

حل التمرين رقم 6

1/ $u_2 = 7$ ، $u_1 = 4$ ، $u_0 = 1$
2/ $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$ ومنه :
 $u_{n+1} - u_n = 3$ أي $u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1$
من أجل كل عدد طبيعي n ، إذن (u_n) حسابية أساسها
 $r = 3$ ، بما أن $r > 0$ إذن فهي متزايدة تماما .
3/ نحل المعادلة : $u_n = 2008$ أي $3n + 1 = 2008$ و
منه $n = \frac{2007}{3} = 669$ إذن $n = 669$ ومنه $u_{669} = 2008$ رتبته 670 .
4/ $S = \frac{670}{2}(u_0 + u_{669})$ أي $S = 335(2009)$ أي $S = 673015$.

حل التمرين رقم 7

1/ $u_4 = 63$ ، $u_3 = 31$ ، $u_2 = 15$
2/ $v_n = u_n + 1$
3/ $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2$ أي
 $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$ ومنه $v_{n+1} = 2v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و
حدها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 8$ أي $v_1 = 8$.
4/ $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ أي $v_n = 8 \times 2^{n-1}$.
5/ $u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$.
6/ $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ ومنه $S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{-1}$ أي $S_n = -8(1 - 2^n)$
أي $S_n = 8 \times 2^n - 8$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2 \times 8^{n+1} / 1 \text{ (II) و منه } v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$$

$$\frac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = 8 \text{ و منه } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = 8$$

حدها الأول $v_0 = 2$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 8^{n+1}}{-7} \text{ و منه } S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} / 2$$

$$\text{و منه } S_n = -\frac{2}{7}(1 - 8^{n+1})$$

حل التمرين رقم 11

أ/ $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$ ، $u_3 = 7$ ، لدينا $u_2 = u_1 + 2r$ و $u_3 = u_1 + 2r$ و $u_5 = u_3 + 2r$ و $u_1 = u_3 - 2r$ و منه $u_4 = u_3 + r$ و $u_1 = u_3 - 2r$ أي $u_5 = u_3 + 2r$ و منه $T_1 = (7 - 2r)(7 + 2r)$ ، $u_2 = 7 - r$ ، $T_2 = (7 - r)(7 + r)$ و منه $u_4 = 7 + r$

ب/ لدينا $T_2 - T_1 = 27$ و منه $(7 - r)(7 + r) - (7 + 2r)(7 - 2r) = 27$ و منه $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$ و منه $3r^2 = 27$ و منه $r^2 = 9$ و منه $r = 3$ أو $r = -3$ ، بما أن (u_n) متزايدة فإن $r = 3$

أ/ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ، $u_3 = u_1 + 2r$ ، و منه $u_1 = 7 - 2 \times 3 = 1$ و منه $u_n = 1 + 3n - 3$ أي $u_n = 3n - 2$

ب/ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2)$ أي $S_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$

ج/ $S_n = 145$ و منه $3n^2 - n = 290$ أي $3n^2 - n - 290 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانية حلوها هي $n = 10$ و منه $n = 10$

أ/ $u_{n+5} = 3(n + 5) - 2 = 3n + 13$ و منه $u_{n+5} = 3n + 13$ ب/ $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$ و منه $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$ ج/ عدد طبيعي معناه n يقسم 13 أي n هو أحد قواسم 13 و منه $n = 1$ أو $n = 13$

حل التمرين رقم 12

أ/ لدينا $u_1 = u_0 + r$ و $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_0 + 3r$ و لدينا $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ و منه $u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 34$ و منه $4u_0 + 6r = 34$ و منه $4u_0 = 34 - 6r$ أي $4u_0 = 34 - 6r$

30 - 34 و منه $u_0 = 1$ ، $u_n = u_0 + nr$ و منه $u_n = 1 + 5n$ ، $u_{n+1} + u_n - 8n = 5n + 6$ و منه $u_{n+1} = 5n + 6$ ، $10n + 7 - 8n = 2n + 7$ أي $u_{n+1} + u_n - 8n = 2n + 7$ لكن $2n + 7 = 4033$ و منه $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ و منه $2n = 4026$ و منه $n = 2013$ ، $S = \frac{2014}{2}(u_0 + u_{2013})$ و منه $S = 1007(1 + 10137469)$ و منه $S = 10137469$

أ/ $v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - (2u_n + 1)$ أي $v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+1} - u_n)$ ، إذن اتجاه تغير (v_n) هو نفسه اتجاه تغير (u_n) ، لكن (u_n) متزايدة تماماً لأن $r > 0$ و منه (v_n) متزايدة تماماً

ب/ $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013}$ و منه $S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$ $S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + 1 + 1 + \dots + 1$ 2013 مرة

و منه $S' = 2S + 2013$ و منه $S' = 20276951$

حل التمرين رقم 13

أ/ بتطبيق خاصية الوسط الحسابي نجد $2u_2 = u_1 + u_3$ و منه $u_1 + u_3 = 2 \times \frac{1}{2}$ و منه $u_1 + u_3 = 1$

ب/ لدينا $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$ بالجمع طرفاً لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $2u_1 = 6$ و منه $u_1 = 3$ ،

لدينا $u_2 = u_1 + r$ و منه $u_2 = 3 + r$ و $r = u_2 - u_1$ و $r = \frac{1}{2} - 3$ و منه $r = -\frac{5}{2}$

و منه $u_n = u_1 + (n - 1)r$ و منه $u_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$ و منه $u_n = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}n$

أ/ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}(3 + \frac{11}{2} - \frac{5}{2}n)$ و منه $S_n = \frac{n(17 - 5n)}{4}$

ب/ $S_n = -\frac{657}{2}$ و منه $\frac{n(17 - 5n)}{4} = -\frac{657}{2}$ و منه $17n - 5n^2 = -657$ و منه $5n^2 - 17n - 1314 = 0$ أي $5n^2 - 17n - 1314 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانية حلوها $18, -\frac{73}{5}$ و منه $n = 18$

أ/ بالتشر نجد $(n + 2)(9 - 5n) = -5n^2 - n + 18$ ب/ نضع : $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(14 - 5n)$

و منه $S' = 27305$.

حل التمرين رقم 16

1/ $U_1 = U_0 \times q$ و منه $U_1 = 2 \times 3$ و منه $U_1 = 6$
 $U_2 = U_1 \times q$ و منه $U_2 = 6 \times 3$ و منه $U_2 = 18$
 $U_n = U_0 \times q^n$ أي $U_n = 2 \times 3^n$ و منه
 $U_5 = 2 \times 3^5$ أي $U_5 = 486$.

2/ $U_{n+1} - U_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$ أي
 $U_{n+1} - U_n = 2 \times 3^n(3 - 1)$
 $U_{n+1} - U_n = 4 \times 3^n$ و منه $U_{n+1} - U_n > 0$ من
أجل كل عدد طبيعي n و منه (U_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

3/ $S_n = U_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ أي $S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$
أي $S_n = 2 \times 3^n - 2$.

ب) $2 + 6 + \dots + 486 = U_0 + U_1 + \dots + U_5 = S_6$
و منه

$$2 + 6 + \dots + 486 = 2 \times 3^6 - 2$$

$$2 + 6 + \dots + 486 = 1456$$

5/ $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3 \equiv 3[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$

ب) $3^{4k} = (3^4)^k$ و بما أن $3^4 \equiv 1[5]$ فإن
 $(3^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي $(3^4)^k \equiv 1[5]$ و منه $3^{4k} \equiv 1[5]$
من أجل كل عدد طبيعي k .

6/ $3^n - 1$ قابل للقسمة على 3 معناه : $3^n - 1 \equiv 0[5]$
أي $3^n \equiv 1[5]$ و منه $n = 4k$ ، حيث k عدد طبيعي

و منه قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3^n - 1$ قابل
للقسمة على 5 هي $n = 4k$ ، $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين رقم 17

1/ $u_2 = 2 \times 7 + 1 = 15$ ، $u_3 = 2 \times 15 + 1 = 31$
، $u_4 = 2 \times 31 + 1 = 63$

2/ $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$ ، $v_n = u_n + 1$ و منه :
 $v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$ و منه $v_{n+1} = 2u_n + 2$
و منه $v_{n+1} = 2v_n$ و منه $v_{n+1} = 2u_n + 2$

هندسية أساسها $q = 2$ و حدّها الأول $v_1 = u_1 + 1$
أي $v_1 = 8$.

ب) $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ و منه $v_n = 8 \times 2^{n-1}$
لدينا $v_n = u_n + 1$ و منه $u_n = v_n - 1$ و منه

من أجل $n = 1$ لدينا $T_1 = u_1$ أي $T_1 = 3$ و
 $\frac{1}{6}1(1+1)(14-5) = 3$ و منه $P(1)$ صحيحة .
نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير
معدوم و نثبت صحة $P(n+1)$.

$P(n)$ صحيحة معناه $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$
لدينا $T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$

حل التمرين رقم 14

1/ أ) حسب خاصية الوسط الحسابي نكتب $2b = a + c$
و منه $3b = a + b + c$ لكن $a + b + c = 9$ و منه
 $3b = 9$ و منه $b = 3$.

و $a = b - r$ و $c = b + r$ و منه
 $c = 3 + r$ ، $a = 3 - r$.

ب) لدينا $a \times c = -16$ و منه $(3-r)(3+r) = -16$
و منه $9 - r^2 = -16$ و منه $r^2 = 25$ و منه $r = 5$ و منه
 $r = -5$ لكن (u_n) متزايدة إذن $r = 5$.

و منه $a = 3 - r$ و منه $a = -2$ و $c = 8$.

2/ أ) $u_n = u_0 + nr$ و منه $u_n = -2 + 5n$
ب) $u_{15} = -2 + 5 \times 15$ أي $u_{15} = 73$.

$S = \frac{16}{2}(u_0 + u_{15})$ و منه $S = 8 \times (-2 + 73)$
و منه $S = 8 \times 71$ و منه $S = 568$.

3/ لدينا $8v_n - u_n = 0$ و منه $v_n = \frac{1}{8}u_n$ و منه
 $S' = \frac{1}{8}S$ و منه $S' = \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \dots + \frac{1}{8}u_{15}$

إذن $S' = 71$.

حل التمرين رقم 15

1/ لدينا $U_n = U_p \times q^{n-p}$ مع $p < n$ و منه $U_3 = U_1 \times q^2$
و منه $320 = 20 \times q^2$ و منه $q^2 = 16$ و منه $q = 4$ أو $q = -4$
لكن المتتالية (U_n) حدودها موجبة إذن $q = 4$ (هو الأساس).

$U_1 = U_0 \times q$ و منه $20 = U_0 \times 4$ و منه $U_0 = 5$
2/ $U_n = U_0 \times q^n$ و منه $U_n = 5 \times 4^n$ ، الحد السابع

هو $U_6 = 5 \times 4^6$ أي $U_6 = 20480$.

3/ أ) $S = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ و منه $S = 5 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4}$

و منه : $S = -\frac{5}{3}(1 - 4^{n+1})$.

ب) $S' = -\frac{5}{3}(1 - 4^{n+1})$ أي $S' = -\frac{5}{3}(1 - 4^7)$

$P(n)$ صحيحة معناه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 أي يوجد عدد طبيعي l بحيث $3^n - 1 = 2l$ ، لدينا $3^{n+1} - 1 = 3^{n+1} - 3 + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 6l + 2$ أي $3 \times \underbrace{3^n - 1}_{=2l} + 2$ $\underbrace{=2k}$ $3^{n+1} - 1 = 2k$ و منه $3^{n+1} - 1 = 2(3l + 1)$ $\underbrace{=k}$ حيث k عدد طبيعي و منه $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 إذن $P(n+1)$ صحيحة و عليه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 من أجل كل عدد طبيعي n .

$u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$.
ج) $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ و منه $S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$ و منه $S_n = 8 \times 2^n - 8$.
د) $S_n = 1016$ و منه $8 \times 2^n = 1024$ و منه $2^n = 128$ أي $2^n = 2^7$ و منه $n = 7$.

حل التمرين رقم 18

أ) 1. لدينا $q = 3$ و $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_0 + u_3 = 28$ و منه $u_0 + u_0 \times 3^3 = 28$ و منه $u_0(1 + 3^3) = 28$ و منه $u_0 \times 28 = 28$ و منه $u_0 = 1$.
و منه $u_n = u_0 \times q^n$ و منه $u_n = 3^n$.
2. $S_1 = u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q}$ و منه $S_1 = \frac{3^{10} - 1}{2}$ أي $S_1 = 29524$.
ب) 1. $v_n = 1 - 5n$ ، $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$ و منه $v_{n+1} - v_n = -5$.
و منه (v_n) هندسية أساسها -5 و حدّها الأول $v_0 = 1$ ، بما أن $r < 0$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة تماما .
2. $S_2 = \frac{10}{2}(v_0 + v_9)$ و منه $S_2 = 5(2 - 45)$ أي $S_2 = -215$.
ج) $k_n = 3^n + 1 - 5n$ و منه $k_n = u_n + v_n$.
و $S_3 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_9 + v_9)$ و منه $S_3 = S_1 + S_2$ و منه $S_3 = 29524 - 215$ أي $S_3 = 29309$.

حل التمرين رقم 19

أ) 1/ $v_n = v_0 \times q^n$ و منه 2×3^n .
ب) $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$ و منه $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$ و منه $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
2/ أ) $S_n = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ أي $S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{-2}$ أي $S_n = 3^n - 1$.
ب) $S_n = 80$ إذن $3^n - 1 = 80$ أي $3^n = 81$ أي $3^n = 3^4$ و منه $n = 4$.
ج) نضع : $P(n) : 3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .
من أجل $n = 0$ لدينا $3^0 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2 إذن $P(0)$ صحيحة .
نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n و نبث صحة $P(n+1)$.