

نص التمرين:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) تحقق من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ أن: $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$.

(3) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب، اشرح كيفية رسم المنحنى (C_f) ثم ارسمه.

(4) برهن أن النقطة $\Omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أرسم -في نفس المعلم السابق- المنحنى (C_g) الممثل للدالة g حيث: $g(x) = |f(x)|$.

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[\cup]-\infty; \frac{1}{2}]$ بـ: $h(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$

أ- تحقق أن الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية يطلب تعيينها.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; \frac{1}{2}]$.

الحل المفصل:

(1) **النحقيق من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ أن: $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$**

الطريقة 1:

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1) + 1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$$

الطريقة 2:

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

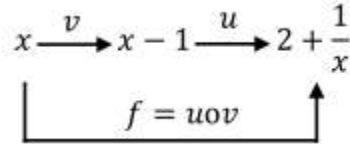
ومنه:

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

(2) **دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$:**

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

لاحظ المخطط التالي:



فنكتب: $f = uov = u[v(x)]$ حيث $u(x) = 2 + \frac{1}{x}$ و $v(x) = x - 1$.

بما أن:

- الدالة v متزايدة تماما على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$.

لأن: v دالة تآلفية معاملها موجب من الشكل $x \mapsto ax + b$ حيث $a > 0$.

- والدالة u متناقصة تماما على المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.

لأن: u دالة مقلوب زائد عدد حقيقي من الشكل $x \mapsto k + \frac{1}{x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مع: $u(]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[) \subset]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

فإن: الدالة $f = uov$ متناقصة تماما على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$.

مبرهنة:

v دالة رتيبة تماما على مجال I .

u دالة رتيبة تماما على مجال J حيث: $v[I] \subset J$.

- إذا كان للدالتين v و u نفس اتجاه التغير، تكون الدالة uov متزايدة تماما على I .

- إذا كان اتجاهها تغير الدالتين v و u متعاكسين، تكون الدالة uov متناقصة تماما على I .

(3) شرح كيفية رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب:

لتكن F الدالة مقلوب المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $X \mapsto F(X) = Y = \frac{1}{X}$

و (C_F) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $x \mapsto f(x) - 2 = y - 2 = \frac{1}{x-1}$

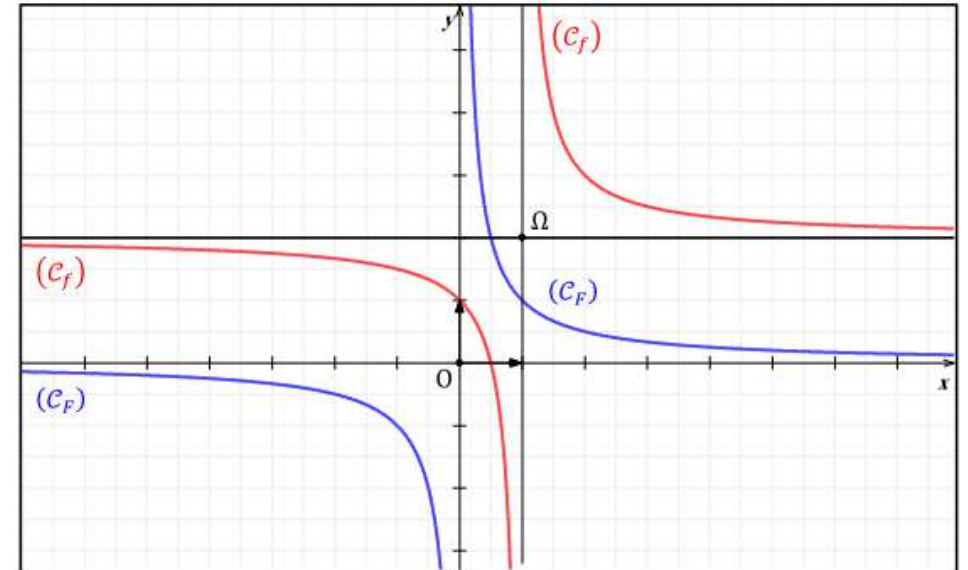
$$\text{بوضع: } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \text{ أي: } X \in \mathbb{R}^* \text{ حيث: } x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

ينتج: $Y = \frac{1}{X}$ و $X \in \mathbb{R}^*$

ومنه:

المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f هو صورة المنحنى البياني (C_F) الممثل للدالة مقلوب $X \mapsto \frac{1}{X}$

بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

رسم المنحنى (C_f) :(4) نبهن أن النقطة $\Omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

نعلم أن:

الدالة مقلوب $X \mapsto F(X) = Y = \frac{1}{X}$ هي دالة فردية من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

لأن: من أجل X من $\mathbb{R}^*$ ومن أجل $(-X)$ من $\mathbb{R}^*$: $F(-X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -F(X)$

وبالتالي:

مبدأ المعلم $O(0; 0)$ مركز تناظر للمنحنى البياني (C_F) الممثل للدالة مقلوب في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

وبما أن:

المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f هو صورة المنحنى البياني (C_F) الممثل للدالة مقلوب $X \mapsto \frac{1}{X}$

بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}$ (نتيجة السؤال 3).

فإن:

النقطة $\Omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ملاحظة:

يمكن أن نتحقق أيضا من أجل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ ومن أجل $(2 - x)$ من $\mathbb{R} - \{1\}$ أن:

$$f(2 - x) + f(x) = 4$$

$$f(2 - x) + f(x) = 2 + \frac{1}{2 - x - 1} + 2 + \frac{1}{x - 1} = 4 - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = 4$$

ومنه:

النقطة $\Omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نذكير:

$\omega(a; b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f إذا كان:

من أجل x من D_f و $(x - 2a) \in D_f$:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

(5) رسم -في نفس الملعق السابق- المنحنى (C_g) الممثل للدالة $g(x) = |f(x)|$:

نكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة حيث:

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & ; f(x) \leq 0 \\ +f(x) & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$$

نبحث عن إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$	+	0	-	+

من جدول الإشارة أعلاه ينتج:

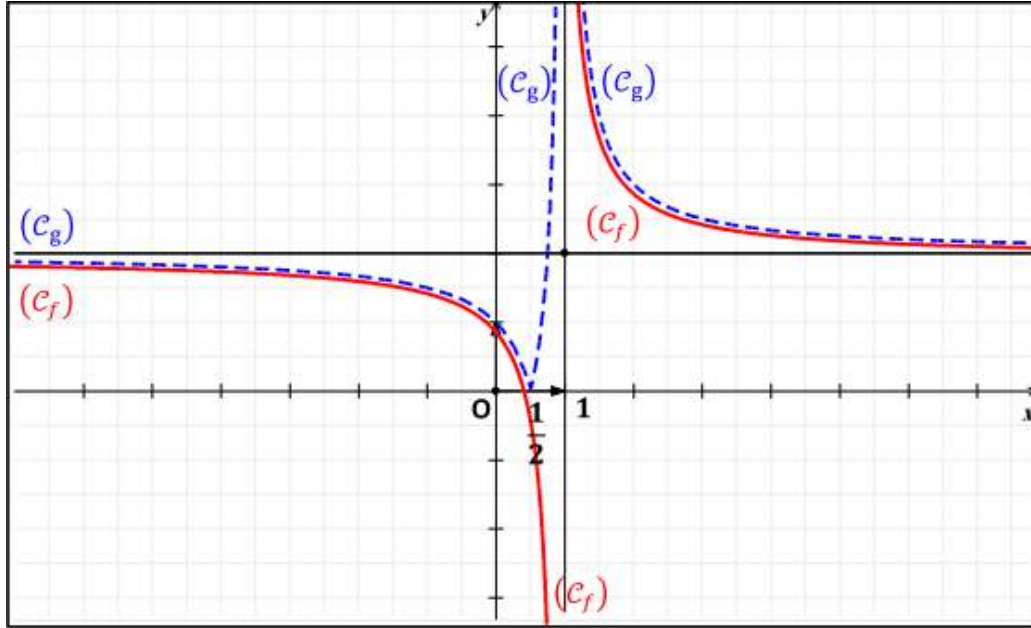
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & ; x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[\\ +f(x) & ; x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[\end{cases}$$

ومنه:

- يكون المنحنى البياني (C_g) الممثل للدالة g منطبقا على المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f على المجال

$$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[\text{ (لأن: } g(x) = f(x) \text{)}$$

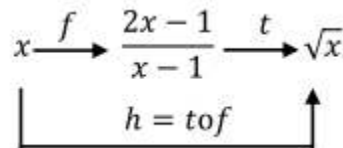
- يكون المنحنى البياني (C_g) الممثل للدالة g نظيرا للمنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f بالنسبة إلى حامل محاور الفواصل على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (لأن: $g(x) = -f(x)$).



(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$ بـ:

أ- نتحقق أن الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية نعيينها:

لاحظ المخطط التالي:



ومنه:

الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية t هي الدالة الجذر التربيعي $x \mapsto \sqrt{x}$.

ب- نسننح اتجاه نغير الدالة h على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}]$ و $]1; +\infty[$:

بما أن:

- الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}]$ و $]1; +\infty[$.
أنظر نتيجة السؤال 2).

- والدالة الجذر التربيعي $\sqrt{x} : x \mapsto t$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

مع: $f\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[\subset]0; +\infty[$

فإن: الدالة $h = tof$ متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}]$ و $]1; +\infty[$.
أنظر المبرهنة في الصفحة رقم 1.

- جميع حقوق النشر محفوظة -

2020/2019

عبد الحميد