

## الدالة الأسية واللوغارتمية

### الأساقام النهائية العلمية

الأستاذ : بوخلال محمد

الكفاءات المستهدفة

♦ توظيف خواص الدالة الأسية النبرية .

♦ حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية ، الدوال اللوغارتمية .

#### حل النشاط 1 ص 76 :

- (2) \* نبن أن  $h$  دالة ثابتة على  $\mathbb{R}$  . ثم استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x)f(-x)=1$  .
- الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  :  $h'(x)=f'(x) \times f(-x) - f'(-x) \times f(x)$  .
- بما أن  $f'=f$  فإن  $h'(x)=f(x) \times f(-x) - f(-x) \times f(x)=0$  .
- وبالتالي الدالة  $h$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  .
- بما أن الدالة  $h$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  فإنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x)=\alpha$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .
- لدينا :  $h(0)=\alpha$  ومن جهة أخرى نجد  $h(0)=f(0) \times f(0)=1$  وعليه :  $\alpha=1$  .
- اذن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x)=\alpha=1$  أي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x)f(-x)=1$  .
- (4) \* نبرهن بالخلف أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) \neq 0$  .
- نفرض أنه يوجد عدد حقيقي  $x_0$  ،  $f(x_0)=0$  .
- لكن لدينا :  $h(x_0)=f(x_0) \times f(-x_0)=0$  . تناقض حسب الإجابة الأولى
- وبالتالي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) \neq 0$  .
- (3) \* نبن أن  $k$  دالة ثابتة على  $\mathbb{R}$  .
- الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  :  $k'(x)=\frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)]^2}$  .
- بما أن  $f'=f$  و  $g'=g$  فإن  $k'(x)=\frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{[f(x)]^2}=0$  .
- وبالتالي الدالة  $k$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  .
- (\*) استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g(x)=f(x)$  .
- بما أن الدالة  $k$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  فإنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $k(x)=\beta$  حيث  $\beta$  ثابت حقيقي .
- لدينا :  $k(0)=\beta$  ومن جهة أخرى نجد  $k(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=1$  وعليه :  $\beta=1$  .
- اذن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x)=\alpha=1$  أي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $\frac{g(x)}{f(x)}=1$  .
- أي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g(x)=f(x)$  .

(4) \* بين أن  $i$  دالة ثابتة على  $\mathbb{R}$  و أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $i(x) = f(y)$  .  
 الدالة  $i$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  :  $i'(x) = \frac{f'(x+y) \times f(x) - f'(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2}$  .

بما ان  $f' = f$  فان  $i'(x) = \frac{f(x+y) \times f(x) - f(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$  .

وبالتالي الدالة  $i$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  .

بما ان الدالة  $i$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  فانه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = \theta$  حيث  $\theta$  ثابت حقيقي .

لدينا :  $i(0) = \theta$  ومن جهة أخرى نجد  $i(0) = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$  وعليه :  $\theta = 1$  .

اذن من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = \theta = f(y)$  .

(5) \* استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x+y) = f(x)f(y)$  .

لدينا من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = \theta = f(y)$  .

أي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$  .

(5) أي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x+y) = f(x)f(y)$  .

(6) \* استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$  .

لدينا :  $f(-y) = \frac{1}{f(y)}$  : (3) باستعمال ( )  $f(x-y) = f(x+(-y)) = \frac{f(x)}{f(-y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$  .

(5) \* تعين الدالة المشتقة للدالة  $f$  .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{nf'(nx) \times [f(x)]^n - f(nx) \times nf'(x) \times [f(x)]^{n-1}}{[f(x)]^2}$  .

بما ان  $f' = f$  فان  $f'(x) = \frac{nf(nx) \times [f(x)]^n - f(nx) \times nf(x) \times [f(x)]^{n-1}}{[f(x)]^2} = 0$  .

وبالتالي الدالة  $f$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  .

بما ان الدالة  $f$  ثابتة على  $\mathbb{R}$  فانه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = \mu$  حيث  $\mu$  ثابت حقيقي .

(7) \* استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(nx) = [f(x)]^n$  .

لدينا من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = \mu$  حيث  $\mu$  ثابت حقيقي .

اذن :  $i(0) = \mu = \frac{f(0)}{[f(0)]^n} = 1$  .

وعليه : من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $i(x) = 1$  .

أي : من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $\frac{f(nx)}{[f(x)]^n} = 1$  .

(7) أي : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(nx) = [f(x)]^n$  .

**تعريف:** تسمى الدالة الوحيدة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = f$  و  $f(0) = 1$  الدالة الأسية (النيبيرية). و نرمز إليها بالرمز "exp".

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = \exp(x)$

(6) كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ...، (7)

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$ ،  $y$  و من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  لدينا:

$$\exp'(x) = \exp(x) \dots (1) \text{ و } \exp(0) = 1 \dots (2) \text{ و } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \dots (3) \text{ و } \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \dots (4) \text{ و } \exp(x) \neq 0 \dots (5)$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \dots (5) \text{ و } \exp(x) \neq 0 \dots (4)$$

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \dots (7) \text{ و } \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \dots (6)$$

### الدالة الأسية

#### 1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

**مبرهنة و تعريف:** توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = f$  و  $f(0) = 1$ . نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

**ملاحظة:** الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية  $y' = y$  التي تحقق  $y(0) = 1$ .

**نتائج:**  $\exp(0) = 1$  \*

\* من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $\exp'(x) = \exp(x)$

#### 2. خواص جبرية :

**خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين  $x$ ،  $y$  و من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  لدينا:

$$\exp(x) \neq 0 \quad (1) \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (2) \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (3)$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4) \quad \exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (5)$$

**البرهان:** أنظر النشاط الأول.

#### 3. العدد $e$ و الترميز $e^x$ :

(\*) العدد  $e$  هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي  $e = \exp(1)$ . تعطينا الحاسبة  $e \approx 2,718281828$ .

(\*) من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  ،  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  ،  $\exp(n) = e^n$

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ، إلى  $\exp(x)$  بـ  $e^x$ .

$$\exp(x) = e^x \text{ ، من أجل كل عدد حقيقي } x$$

تقرأ  $e^x$ : "أسية  $x$ ".

**ملاحظة:** الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

**قواعد الحساب:** من أجل كل عددين حقيقيين  $x, y$  و من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  لدينا:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \quad (*) & \exp'(x) &= e^x \quad (*) & e^0 &= 1 \quad (*) \\ e^{nx} &= (e^x)^n \quad (*) & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \quad (*) & e^{x+y} &= e^x e^y \quad (*) \end{aligned}$$

**تمرين:**

بسط العبارات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} \quad (2) \quad \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} \quad (3) \quad e^{-10x} \times (e^{-x+1}) \times (e^{3x})^3 \\ (4) \quad & \left( \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} \right) \left( \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \right) \end{aligned}$$

**الحل:**

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}} \\ (2) \quad & \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}} \\ (3) \quad & e^{-10x} \times (e^{-x+1}) \times (e^{3x})^3 = e^{-3x+2} \\ (4) \quad & \left( \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} \right) \left( \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \right) = \frac{e^{16x} - 1}{4e^{8x}} \end{aligned}$$

**تمرين 2:**

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  و  $(Cf)$  تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

بين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(-x) + f(x) = 1$  .  
فسر بيانها هذه النتيجة .

**الحل:**

$$\text{من اجل كل عدد حقيقي } x : f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x} + e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} = 1$$

**تذكير:**  $f$  دالة معرفة على  $D$  و  $(Cf)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
(1) لإثبات أن المستقيم  $(d)$  ذو معادلة  $x = a$  هو محور تناظر  $(Cf)$  يمكن اتباع احدى الطرق التالية :

$$(*) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ يكون } 2a - x \text{ من } D \text{ و } f(2a - x) = f(x)$$

$$(*) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ يكون } a - x \text{ من } D \text{ و } a + x \text{ من } D \text{ و } f(2a - x) = f(x)$$

(\*) نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع :  $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$  .

تصبح  $y = f(x)$  تعني  $Y = f(X + a)$  هذه الاخيرة تعرف دالة  $g$  .  
نبرهن أن  $g$  دالة زوجية .

(2) لإثبات أن النقطة  $A(a; b)$  هي مركز تناظر  $(Cf)$  يمكن اتباع إحدى الطرق التالية :

(\*) لكل  $x$  من  $D$  يكون  $2a - x$  من  $D$  و  $f(2a - x) + f(x) = 2b$  .

(\*) لكل  $x$  من  $D$  يكون  $a - x$  من  $D$  و  $a + x$  من  $D$  و  $f(a - x) + f(a + x) = 2b$  .

(\*) نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع :  $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$  .

تصبح  $y = f(x)$  تعني  $Y = f(X + a) - b$  هذه الاخيرة تعرف دالة  $g$  .  
نبرهن أن  $g$  دالة فردية.

تفسير النتيجة بياناً : لدينا  $f(-x) + f(x) = 1$  يعني  $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2}$  .

اذن النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر المنحنى  $(Cf)$  .

الدوال الأسية:  $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة  $f' = kf$

**مبرهنة:** ليكن  $k$  عدداً حقيقياً.

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = kf$  و  $f(0) = 1$  هي الدالة  $x \mapsto e^{kx}$  .

**البرهان:**

**الوجود:** لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{kx}$  .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$  ، كما أن  $f(0) = e^0 = 1$  .

و بالتالي الدالة  $f$  تحقق  $f' = kf$  و  $f(0) = 1$  .

**الوحدانية:** نفرض وجود دالة ثانية  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $g' = kg$  و  $g(0) = 1$  . نعتبر الدالة  $h$  المعرفة

على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$  . الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - kf(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0$$

و  $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$  . و منه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) = 1$  . إذن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g(x) = f(x)$  .

2. دوال تحول المجموع إلى جداء :

**مبرهنة:** الدوال غير المعدومة  $f$  و القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث:

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  ،  $f(x+y) = f(x)f(y)$  ،

هي الدوال  $x \mapsto e^{kx}$  حيث  $k$  عدد حقيقي .

### البرهان:

لتكن  $f$  دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث: من أجل كل  $x, y$  من  $\mathbb{R}$ ،

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

بأخذ  $x=0$  و  $y=0$  نحصل على  $f(0) = [f(0)]^2$  أي  $f(0)[1-f(0)] = 0$  أي  $f(0)=0$  أو  $f(0)=1$ .  
إذا كان  $f(0)=0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0$ ، مما يعني أن  $f$  معدومة وهذا مرفوض و بالتالي  $f(0)=1$ .

من أجل كل  $y$  ثابت، لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x+y) = f(x)f(y)$ . باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى  $x$  نحصل على: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ . من أجل  $x=0$  لدينا:

$$f'(y) = f'(0)f(y)$$

بوضع  $k = f'(0)$  يكون لدينا من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(y) = kf(y)$ . إذن  $f' = kf$  و  $f(0)=1$

و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) = e^{kx}$ .

عكسيا: لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{kx}$ . باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:

$$f(x+y) = e^{k(x+y)} = e^{kx+ky} = e^{kx} \times e^{ky} = f(x)f(y), \quad x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين}$$

### تمارين رقم 15 ص 102:

$$1. \text{ أ- نبين أن } f(0)=1.$$

لدينا: من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$ :  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

بوضع  $x=0$  و  $y=0$  نجد:  $f(0) = f(0)f(0)$  يعني  $f(0)^2 - f(0) = 0$  يعني  $f(0)[f(0)-1] = 0$  يعني

$$f(0)=0 \text{ أو } f(0)=1 \text{ وبما أن } f \text{ غير معدومة فإن } f(0)=1.$$

ب- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

بوضع  $y = -x$  نجد:  $f(x-x) = f(x)f(-x)$ .

$$\text{لكن: } f(x-x) = f(0) = 1$$

$$\text{وبالتالي نجد: } f(x) \times f(-x) = 1$$

$$2. \text{ أ- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

$$\text{بوضع } x = \frac{z}{2} \text{ و } y = \frac{z}{2} \text{ نجد: } f\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\text{أي: } f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\text{اذن من أجل كل عدد حقيقي } x, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

ب- استنتاج إشارة الدالة  $f$ .

$$\text{لدينا: من أجل كل عدد حقيقي } x, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) = \left[ f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 > 0$  .  
اذن  $f$  موجبة تماما على  $\mathbb{R}$ .

### دراسة الدالة الأسية

#### 1. اتجاه تغير الدالة الأسية

**خاصية 1:** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $e^x > 0$ .

**البرهان:** من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left( e^{\frac{x}{2}} \right)^2$  ، وبما أن  $e^x \neq 0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $e^x > 0$ .

**خاصية 2:** الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

**البرهان:** من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $\exp'(x) = e^x$  و منه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $\exp'(x) > 0$ .

**نتائج:** • من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  لدينا:  $e^a < e^b$  يعني  $a < b$  و  $e^a = e^b$  يعني  $a = b$ .

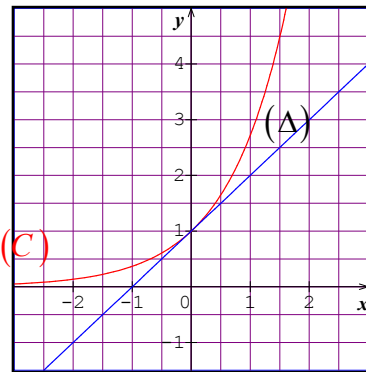
• من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $0 < e^x < 1$  يعني  $x < 0$  و  $e^x > 1$  يعني  $x > 0$ .

#### 2. النهايات

**خواص:** (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

**البرهان:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = e^x - x$  . من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $f'(x) = e^x - 1$  ،  
و بما أن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $e^x \geq 1$  فإن  $f'(x) \geq 0$  و منه  $f$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$  و  $f(0) = 1$  .  
إذن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $f(x) \geq 0$  أي  $e^x \geq x$  . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و منه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  .  
من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  .



#### 3. جدول تغيرات- التمثيل البياني

| $x$        | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|-----|-----------|
| $\exp'(x)$ |           | +   |           |
| $e^x$      |           | 0   | $+\infty$ |

• المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  .

• لدينا  $\exp'(0) = 1$  و  $e^0 = 1$  . إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا  $y = x + 1$  : (Δ).

• من تعريف العدد المشتق لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**نتيجة:** الدالة  $x \mapsto 1+x$  هي أحسن تقريب تكافئي للدالة  $x \mapsto e^x$  بجوار 0.

أي من أجل  $x$  قريب من 0 لدينا:  $e^x \approx 1+x$ .

### تمرين :

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات والمتراجحات :

$$(1) \quad e^{4x} + 1 = 0$$

$$(2) \quad e^{x^2} - e = 0$$

$$(3) \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x}$$

$$(4) \quad e^{x^2} \times e^x < (e^2)^3$$

### الحل :

**طريقة:** المعادلة  $e^{u(x)} = e^{v(x)}$  تعني  $u(x) = v(x)$

المتراجحة  $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$  تعني  $u(x) \geq v(x)$

$$(1) \quad e^{4x} + 1 = 0 \text{ يعني } e^{4x} = -1 \text{ وبالتالي المعادلة لا تقبل حل في } \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad e^{x^2} - e = 0 \text{ يعني } e^{x^2} = e^1 \text{ يعني } x^2 = 1 \text{ يعني } x = -1 \text{ أو } x = 1.$$

$$(3) \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x} \text{ يعني } 1+x^2 \leq 2x \text{ يعني } 1+x^2-2x \leq 0 \text{ يعني } (1-x)^2 \leq 0 \text{ يعني } x = 0.$$

$$(4) \quad e^{x^2} \times e^x < (e^2)^3 \text{ يعني } e^{x^2+x} < e^6 \text{ يعني } x^2+x < 6 \text{ يعني } x^2+x-6 < 0 \text{ يعني } x \in ]-3; 2[.$$

### دراسة الدالة $\exp \circ u$

#### 1. النهايات

لدراسة نهاية دالة  $\exp \circ u$  نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

#### مثال:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x-2}$ .

- لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x-2)} = 0$  أي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
- لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-2)} = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

#### 2. اتجاه التغيرات

**خاصية:** إذا كانت  $u$  دالة معرفة على مجال  $I$  فإن للدالتين  $u$  و  $\exp \circ u$  نفس اتجاه التغيرات على المجال  $I$ .

#### البرهان:

نعلم أن الدالة "  $\exp$  " متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ . إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين  $u$  و  $\exp \circ u$  نفس اتجاه التغيرات على المجال  $I$ .

#### مثال:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{5x^2-2}$ .

نلاحظ أن  $f = \exp \circ u$  حيث  $u$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $u(x) = 5x^2 - 2$ .

بما أن الدالة  $u$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$ .

وبما ان الدالة  $u$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .

### 3. المشتقة

**خاصية:** إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $\exp \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$ .

#### البرهان:

إذا كانت الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  وعلما ان الدالة "  $\exp$  " قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  فإن الدالة المركبة  $\exp \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp)'[u(x)] = u'(x) \times (\exp)[u(x)]$$

$$\text{أي من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

#### مثال:

- مشتقة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x^3}$  هي  $f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$ .
- مشتقة الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $g(x) = e^{x^3 - \frac{1}{x}}$  هي  $g'(x) = \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^3 - \frac{1}{x}}$ .

#### تمرين رقم 49 ص 105 :

(1) أ) دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \text{و } \mathbb{R} \quad \text{الدالة قابلة للاشتقاق على}$$

الدالة متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

(ب) احسب نهايات الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ . فسر النتائج هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

يوجد مستقيمين مقارين معادلتهما  $y=1$  و  $y=0$ .

جدول التغيرات :

|         |           |                        |           |
|---------|-----------|------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0                      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +                      |           |
| $f(x)$  | 0         | $\nearrow \frac{1}{2}$ | 1         |

(2) نبين أن النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  مركز تناظر للمنحنى (C).

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و  $-x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$. f(-x) + f(x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} + \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1 = \frac{1}{2}(1)$$

اذن النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  مركز تناظر للمنحني (C).

(3) تعين معادلة المماس  $T$  للمنحني (C) عند النقطة  $A$ .

$$. T: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

(4) أ) نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$

الدالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و:

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$. g'(x) = \frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$$

ب) جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$$. g'(x) = 0 \text{ يعني } (e^x - 1)^2 = 0 \text{ يعني } x = 0$$

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | + |           |
| $g(x)$  | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

ج) استنتاج إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0 | +         |

(د) استنتاج الوضعية النسبية للمنحني  $(C)$  و المستقيم  $T$  .

ندرس اشارة الفرق :  $f(x) - y = -g(x)$  .

$(C)$  فوق  $T$  على المجال  $]-\infty; 0[$  .

$(C)$  تحت  $T$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

$(C)$  يقطع  $T$  في النقطة  $O$  .

(5) رسم  $T$  و  $(C)$  .

