

مجلة الدوال العددية

سنة ثانية ثانوي

تقني رياضي
رياضيات
علوم تجريبية

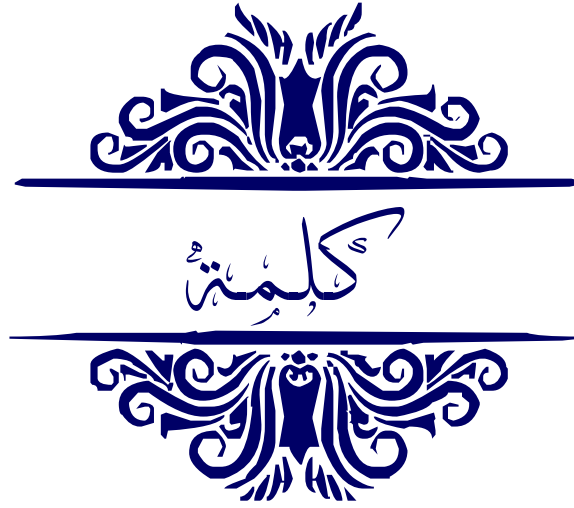
السب :

تجدون في المجلة :

- ملخص شامل حول محور الدوال العددية
- تمارين مقترحة في الدوال العددية
- حل مفصل للتمارين المقترحة

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية : 2021-2022



هذا العمل المتواضع موجه لتلاميذ سنة ثانية ثانوي شعب علمية

أقدمه لكم كصدقة على أرواح من سبقونا إلى دار الله، اللهم ارحمهم
و اوز عنهم و اجعل الفردوس نزلهم

شكرا لكل من الزملاء و الأصدقاء على الدعم المتواصل :

شكرا وليد

شكرا لمياء

و الصديقة الصديقة آية الرحمان

I مجموعة تعريف دالة

مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

مجموعة تعريف دالة معرفة بدستور

تتضمن جذر

ما بداخل الجذر موجب

لا تتضمن لا جذر ولا كسر

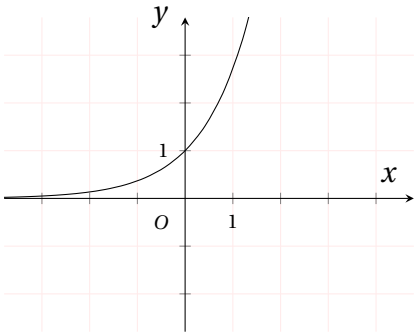
$\mathbb{R}$

تتضمن كسر

المقام لا يساوي الصفر

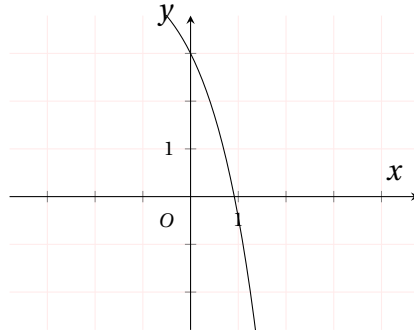
II إتجاه تغير دالة

دالة متزايدة تماما



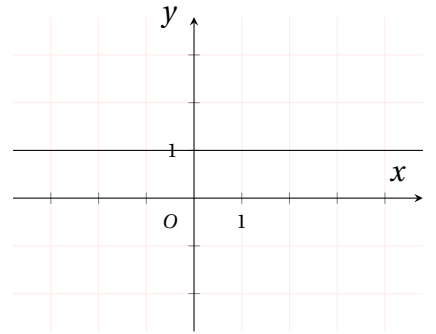
إذا كان $x_1 < x_2$ فان:
 $f(x_1) < f(x_2)$

دالة متناقصة تماما



إذا كان $x_1 < x_2$ فان:
 $f(x_1) > f(x_2)$

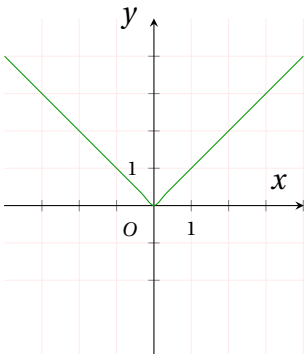
دالة ثابتة



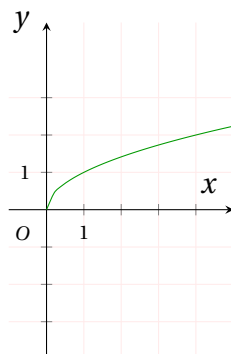
إذا كان $x_1 < x_2$ فان:
 $f(x_1) = f(x_2)$

III الدوال المربعية

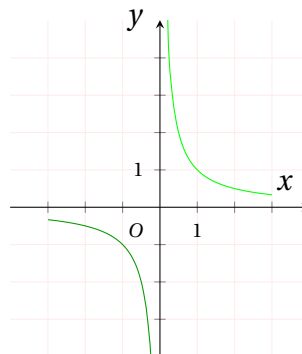
دالة قيمة مطلقة



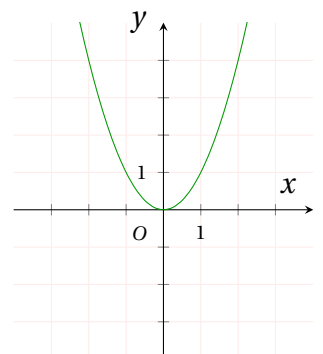
دالة جذر تربيعي



دالة مقلوب



دالة مربع



العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f + k$	$(f + k)(x) = f(x) + k$	D_f
مجموع f و g	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
قسمة f على g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$

تساوي دالتين

القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن $f(x) = g(x)$

مركب دالتين

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

- مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بـ " $g \circ f$ " والمعرفة بـ " $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ "
- حيث مجموعة تعريفها هي : $D_{g \circ f} = \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$
- مركب الدالة g متبوعة بالدالة f هي الدالة التي نرمز إليها بـ " $f \circ g$ " والمعرفة بـ " $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ "
- حيث مجموعة تعريفها هي : $D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$

إتجاه تغير الدوال $f + k$ ، λf و $f \circ g$

λ و k أعداد حقيقية، f دالة رتيبة تماماً على مجال I و g دالة رتيبة تماماً على مجال $f(I)$

الدالة	اتجاه التغير
الدالة $f + k$	للدالتين f و $f + k$ نفس إتجاه التغير على المجال I .
الدالة λf	• إذا كان $\lambda > 0$ يكون للدالتين f و λf نفس إتجاه التغير على المجال I. • إذا كان $\lambda < 0$ يكون إتجاهها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I.
الدالة $f \circ g$	• إذا كان للدالتين f و g نفس إتجاه التغير على كل من I و $f(I)$ على الترتيب تكون الدالة $g \circ f$ متزايدة تماماً على I. • إذا كان إتجاهها تغير الدالتين f و g متعاكسين على كل من I و $f(I)$ على الترتيب، تكون الدالة $g \circ f$ متناقصة تماماً على I.

الدالة	التحويل
$g(x) = f(x+a) + b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i} + b\vec{j}$
$g(x) = f(x+a)$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$g(x) = f(x) + b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$g(x) = -f(x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب
$g(x) = f(x) $	(C_g) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل
$g(x) = f(x)$	(C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $x \geq 0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب إذا كان $x \leq 0$

التقاطع مع محور الفواصل :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

التقاطع مع محور الترتيب :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ و نجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

الدالة الزوجية :

من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ حيث $f(x) = f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.

الدالة الفردية :

من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ حيث $f(-x) = -f(x)$ نقول أن الدالة f فردية و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

الدالة الدورية :

إذا كانت $f(x+p) = f(x)$ نقول أن الدالة f دورية و تمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر :

من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ إذا كانت $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha; \beta)$.

محور التناظر :

من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ إذا كانت $f(2\alpha - x) = f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$.

VII حل المعادلات و المتراجحات بيانيا

- ◀ حل المعادلة $f(x) = g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و (C_g)
- ◀ حل المتراجحة $f(x) \geq g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل نقاط (C_f) الواقعة فوق (C_g)
- ◀ حل المعادلة $f(x) = a$ هي فواصل نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع المستقيم ذو المعادلة $y = a$
- ◀ حل المتراجحة $f(x) < a$ هي فواصل نقاط منحنى الدالة الواقعة تحت المستقيم ذو المعادلة $y = a$

VIII إشارة دالة

- ◀ تكون الدالة f موجبة تماما لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل .
- ◀ تكون الدالة f سالبة تماما لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل

2 التمارين

1 نص التمرين الحل 9

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{1}{x+2} , \textcircled{2} f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} , \textcircled{3} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} , \textcircled{4} f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{|x-3|} , \textcircled{5} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} , \textcircled{6} f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$$

2 نص التمرين الحل 10

أذكر إن كانت الدالتين f و g متساويتين في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \begin{cases} f(x) = x - \frac{3}{x-2} \\ g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} f(x) = x+2 \\ g(x) = (\sqrt{x+2})^2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} f(x) = f(x) = 2x-3 \\ g(x) = \sqrt{(2x-3)^2} \end{cases} \quad (4) \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = \sqrt{x^2} \end{cases}$$

3 نص التمرين الحل 11

عين مجموعة تعريف ثم عبارة كل من الدالتين $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالة :

$$(1) \begin{cases} f(x) = 2x-1 \\ g(x) = \frac{x+1}{x+2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-3} \\ g(x) = x^2+1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x+1} \\ g(x) = -x+1 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \\ g(x) = \frac{1}{2x-1} \end{cases}$$

4 نص التمرين الحل 14

فكك الدالة f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما في كل حالة من الحالات التالية :

$$\textcircled{1} f(x) = (x-3)^2 + 1 , \textcircled{2} f(x) = \frac{3}{x+1} , \textcircled{3} f(x) = 3(x+1)^2 + 5 , \textcircled{4} f(x) = |x+1| - 1 , \textcircled{5} f(x) = \cos(x-2) , \textcircled{6} f(x) = 3\sqrt{x} + 2 , \textcircled{7} f(x) = \left| \frac{2x-1}{5} \right|$$

5 نص التمارين الحل 15

نعتبر الدالتين f و g المعرفة بـ : $f(x) = 2x-4$ و $g(x) = \frac{x}{-x-2}$
 * عين مجموعة تعريف الدوال التالين : $f+5$, $2g$, $f+g$, $f \times g$, و $\frac{g}{f}$

6 نص التمرين الحل 16

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين كمايلي : $u(x) = -x+4$ و $v(x) = \frac{1}{x}$, ولتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 4[$ بـ : $f = v \circ u$.

- (1) أكتب عبارة $f(x)$ بدلالة x .
- (2) عين صورة المجال $]-\infty; 4[$ بالدالة u .
- (3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 4[$.

7 نص التمرين الحل 16

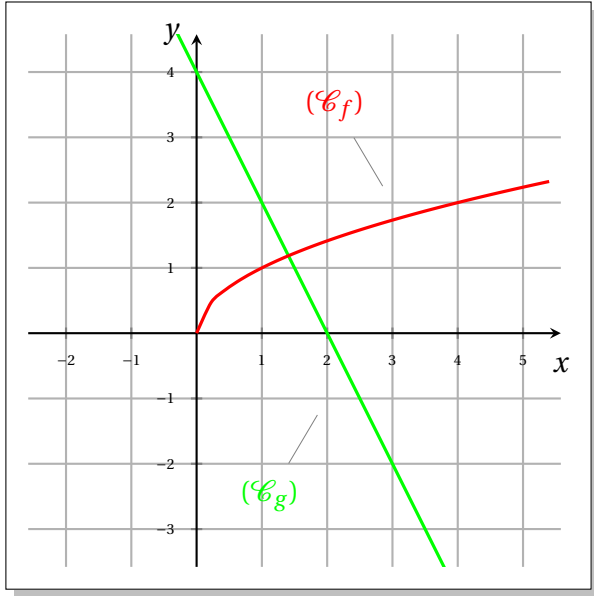
لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{1}{x-1}$

(1) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x-1$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$

(أ) يبين انه إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > 1$.

(ب) تحقق أن $(f \circ g)(x) = h(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

8 نص التمرين الحل 17



f و g دالتين معرفتين على $]0; +\infty[$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب (C_f) و (C_g) ، نمثلهما البيانيين في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، كما هو موضح في الشكل.

الجزء الأول:

★ بقراءة بيانية عين: $(g \circ f)(0)$ و $(g \circ f)(4)$

الجزء الثاني:

لتكن $g(x) = -2x + 4$ و $f(x) = \sqrt{x}$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$.

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة $g \circ f$.

(3) عين $g \circ f$.

9 نص التمرين الحل 17

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

(*) الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(\sqrt{x})$ - فكك الدالة g إلى مركب دالتين إحداهما الدالة f ، ثم استنتج اتجاه تغيرها.

10 نص التمرين الحل 17

f و g دالتان معرفتان بجدول تغيراتهما حيث:

x	-4	0	5
$g(x)$		0	2

x	-3	0	1
$f(x)$	0		5

(1) أوجد مجموعة تعريف الدالة h حيث: $h(x) = (g \circ f)(x)$

- (2) أحسب : $h(-3)$ ، $h(0)$ و $h(1)$.
 (3) أدرس إتجاه تغير الدالة h المجال $[-3; 0]$ ثم على $[0; 1]$.

11 نص التمرين الحل 18

لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = \frac{2x}{x - \frac{1}{2}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f .
 (ب) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من D_f فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x - \frac{1}{2}}$.
 (ج) باستعمال مبرهنة مركب دالتين استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; \frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2}; +\infty[$.
 (د) أرسم منحنى الدالة f .
 (2) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x - \frac{1}{2}}}$.

- (ا) عيّن D_g .
 (ب) يبين أن g هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .
 (ج) استنتج اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

12 نص التمرين الحل 20

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O, \vec{i}; \vec{j})$

- (1) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) إنطلاقاً من دالة مرجعية يطلب تعيينها ثم أرسمه
 (2) بين كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني للدوال التالية : $g(x) = f(x+2) - 1$ ،
 $h(x) = f(x-3) + 3$ ، $k(x) = -f(x)$ ، $u(x) = 2f(x)$ ، $v(x) = |f(x)|$.

13 نص التمرين الحل 21

لتكن f و g الدالتين العددية المعرفتين بـ : $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$.

- (1) عين كل من D_f و D_g
 (2) إشرح كيف يمكن رسم (C_f) و (C_g) ثم ارسمهما
 (3) أنشئ التمثيل البياني للدالة k حيث : $k(x) = |g(x)|$
 (4) لتكن F الدالة العددية المعرفة بـ : $F(x) = f(|x|)$
 • عين مجموعة تعريف الدالة F .
 • بين أن الدالة F زوجية .
 • أرسم (C_F) .

14 نص التمرين الحل 23

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ بـ : $\frac{2x+5}{x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم م م $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$

(2) بين أن الدالة f هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .

(3) عين إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; -2[$ و $] -2; +\infty[$

(4) بين أن النقطة $\omega(-2; 2)$ مركز تناظر (C_f) .

(5) استنتج طريقة رسم (C_f)

(6) لتكن g الدالة المعرفة بـ: $g(x) = f(-|x|)$

(أ) عين D_g

(ب) بين أن الدالة g دالة زوجية.

(ج) إشرح طريقة رسم (C_g) منحنى الدالة g . ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

15 نص التمرين الحل 25

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = x^2 - 2x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
الجزء الأول:

(1) عين العددين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x + a)^2 + b$.

(2) فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المنحنى البياني للدالة f هو صورة المنحنى البياني للدالة مربع بانسحاب يطلب تعيين شعاعه، ثم ارسمه.

(5) مثل في نفس المعلم السابق المنحنى البياني للدالتين h و k حيث $h(x) = -|f(x)|$ و $k(x) = f(x) + 2$.

(6) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .

الجزء الثاني:

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 2|x| - 1$.

(1) بين أن الدالة g زوجية ثم فسر ذلك بيانياً.

(2) أكتب عبارة g بدون القيمة المطلقة.

(3) استنتج طريقة لرسم منحنى الدالة g انطلاقاً من منحنى الدالة f ثم ارسمه.

16 نص التمرين الحل 27

f ، g و h ثلاث دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ و $g(x) = f(-|x|)$ و (C_f) و (C_g) منحنيات f و g على الترتيب، الممثلة في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

(2) إشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) انطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع"، ثم أرسمه

(3) أحسب $f(3 - x) - f(3 + x)$ ماذا تستنتج ؟

(4) أ) بين أن الدالة g زوجية، ثم إستنتج أن $f(x) = g(x)$ على مجال يطلب تعيينه

ب) إشرح كيف يمكنك إستنتاج رسم لـ (C_g) انطلاقاً من (C_f) ، ثم أرسمه

(5) ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(x - 3)^2 = 4 + m$

(1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 4\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ و } x \neq -2\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

مابداخل الجذر موجب تماما $x^2+2 > 0$ و المعادلة $x^2 = -2$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و منه $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{|x-3|}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0 \text{ و } |x-3| \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ و } x-3 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ و } x \neq 3\}$$

$$D_f = [1; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \geq 0 \text{ و } \sqrt{x^2-9} \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 > 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 9\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 3\}$$

$$D_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-4} \geq 0 \text{ و } x-4 \neq 0 \right\}$$

دراسة إشارة $\frac{x+2}{x-4}$:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$
$x-4$		$-$	$-$	0
$\frac{x+2}{x-4}$		$+$	0	$+$

و منه $D_f =]-\infty; -2] \cup]4; +\infty[$

✓ حل التمرين رقم 2 :

$$(1) \begin{cases} f(x) = x - \frac{3}{x-2} \\ g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} \end{cases}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ و منه $D_f = D_g$
و لدينا من جهة أخرى

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{3}{x-2} \\ f(x) &= \frac{x(x-2) - 3}{x-2} \\ f(x) &= \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} \\ f(x) &= g(x) \end{aligned}$$

و منه نستنتج أن $f = g$

$$(2) \begin{cases} f(x) = x+2 \\ g(x) = (\sqrt{x+2})^2 \end{cases}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-2; +\infty[$ و منه $D_f \neq D_g$

$$(3) \begin{cases} f(x) = 2x-3 \\ g(x) = \sqrt{(2x-3)^2} \end{cases}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$
و منه $D_f = D_g$
و لدينا من جهة أخرى

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{(2x-3)^2} \\ g(x) &= |2x-3| \\ g(x) &\neq f(x) \end{aligned}$$

و منه نستنتج أن $f \neq g$

$$(4) \begin{cases} f(x) &= |x| \\ g(x) &= \sqrt{x^2} \end{cases}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ و منه $D_f = D_g$ ولدينا من جهة أخرى

$$g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$g(x) = |x|$$

$$g(x) = f(x)$$

و منه نستنتج أن $f = g$

✓ حل التمرين رقم 3 :

$$(1) \begin{cases} g(x) &= \frac{x+1}{x+2} \\ D_g &= \mathbb{R} - \{-2\} \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} f(x) &= 2x-1 \\ D_f &= \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

تعيين $D_f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x/x \in \mathbb{R} - \{-2\} \text{ و } \frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathbb{R} - \{-2\} \text{ و } x+2 \neq 0\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathbb{R} - \{-2\} \text{ و } x \neq -2\}$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

تعيين عبارة $f \circ g$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - 1 \\ &= \frac{2x+2-x-2}{x+2} \\ (f \circ g)(x) &= \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

تعيين $D_g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } 2x-1 \in \mathbb{R} - \{-2\}\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } 2x-1 \neq -2\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

تعيين عبارة $g \circ f$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \frac{(2x-1)+1}{(2x-1)+2} \\ (g \circ f)(x) &= \frac{2x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} g(x) &= x^2 + 1 \\ D_g &= \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f(x) &= \frac{1}{x-3} \\ D_f &= \mathbb{R} - \{3\} \end{cases} \quad (2)$$

تعين $D_f \circ g$

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 + 1 \in \mathbb{R} - \{3\}\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 + 1 \neq 3\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 \neq 2\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq \sqrt{2} \text{ و } x \neq -\sqrt{2}\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

تعين عبارة $f \circ g$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1 - 3} \\ (f \circ g)(x) &= \frac{1}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

تعين $D_g \circ f$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x/x \in \mathbb{R} - \{3\} \text{ و } \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x-3 \neq 0\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq 3\}$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{3\}$$

تعين عبارة $g \circ f$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 + 1 \\ (g \circ f)(x) &= \frac{1}{(x-3)^2} + 1 \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} g(x) &= -x + 1 \\ D_g &= \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} f(x) &= \sqrt{2x+1} \\ D_f &= \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{cases} \quad (3)$$

تعيين $D_f \circ g$:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } -x+1 \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\right\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } -x+1 \geq -\frac{1}{2} \right\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } -x \geq -\frac{3}{2} \right\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \leq \frac{3}{2} \right\} \\ D_{f \circ g} &= \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

تعيين عبارة $f \circ g$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \sqrt{2(-x+1)+1} \\ (f \circ g)(x) &= \sqrt{-2x+3} \end{aligned}$$

تعيين $D_g \circ f$:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{x/x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ و } \sqrt{2x+1} \in \mathbb{R} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{x/x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ و } 2x+1 \geq 0 \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{x/x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ و } x \geq -\frac{1}{2} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{x/x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ و } x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\right\} \\ D_{g \circ f} &= \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{aligned}$$

تعيين عبارة $g \circ f$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ (g \circ f)(x) &= -\sqrt{2x+1}+1 \end{aligned}$$

$$(4) \begin{cases} g(x) &= \frac{1}{2x-1} \\ D_g &= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} f(x) &= \sqrt{x-1} \\ D_f &= [1; +\infty[\end{cases} \quad (4)$$

تعيين $D_f \circ g$:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ و } \frac{1}{2x-1} \in [1; +\infty[\right\} \\ D_{f \circ g} &= \left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ و } \frac{-2x}{2x-1} \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

دراسة إشارة $\frac{-2x}{2x-1}$

ومنه $\frac{-2x}{2x-1} \geq 0$ و $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x$	+	0	-	-
$2x-1$	-	-	0	+
$\frac{-2x}{2x-1}$	-	0	+	-

و عليه

$$D_{f \circ g} = \left\{ x/x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\} \quad \text{و} \quad x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$$

$$D_{f \circ g} = \left[0; \frac{1}{2}\right[$$

تعيين عبارة $f \circ g$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2x-1}} - 1 \\ (f \circ g)(x) &= \sqrt{\frac{-2x}{2x-1}} \end{aligned}$$

تعيين $D_{g \circ f}$:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{ x/x \in [1; +\infty[\text{ و } \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{ x/x \in [1; +\infty[\text{ و } \sqrt{x-1} \neq \frac{1}{2} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{ x/x \in [1; +\infty[\text{ و } x-1 \neq \frac{1}{4} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left\{ x/x \in [1; +\infty[\text{ و } x \neq \frac{5}{4} \right\} \\ D_{g \circ f} &= \left[1; \frac{5}{4}\right[\cup \left] \frac{5}{4}; +\infty \right[\end{aligned}$$

تعيين عبارة $g \circ f$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ (g \circ f)(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}-1} \end{aligned}$$

✓ حل التمرين رقم 4

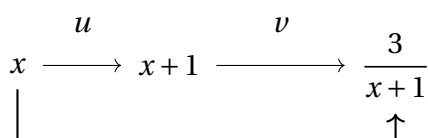
(*) تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين يُطلب تعيينهما

نفرض f مركب دالتين u و v حيث $f = v \circ u$

$$\begin{array}{c} u \qquad \qquad v \\ x \longrightarrow x-3 \longrightarrow (x-3)^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad f = v \circ u \end{array}$$

$$\textcircled{1} f(x) = (x-3)^2 + 1$$

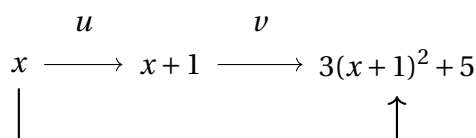
و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x - 3$ و $v(x) = x^2 + 1$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{3}{x+1}$$

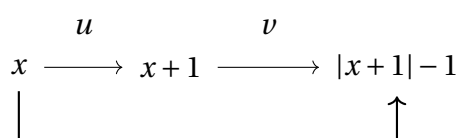
و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x + 1$ و $v(x) = \frac{3}{x}$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{3} f(x) = 3(x+1)^2 + 5$$

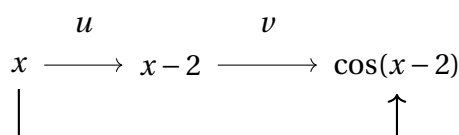
و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x + 1$ و $v(x) = 3x^2 + 5$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{4} f(x) = |x+1| - 1$$

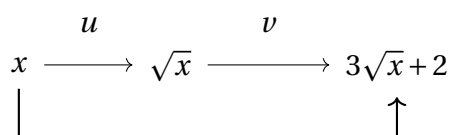
و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x + 1$ و $v(x) = |x| - 1$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{5} f(x) = \cos(x-2)$$

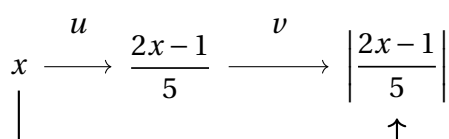
و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x - 2$ و $v(x) = \cos(x)$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{6} f(x) = 3\sqrt{x} + 2$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = 3x + 2$



$$f = v \circ u$$

$$\textcircled{7} f(x) = \left| \frac{2x-1}{5} \right|$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = \frac{2x-1}{5}$ و $v(x) = |x|$

✓ حل التمرين رقم 5 :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{-x-2} \\ D_g = \mathbb{R} - \{-2\} \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = 2x - 4 \\ D_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

تعيين مجموعة تعريف الدوال

$$D_{f \times g} = D_g \cap D_f$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{f+g} = D_g \cap D_f$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{2g} = D_g$$

$$D_{2g} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{f+5} = D_f$$

$$D_{f+5} = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x / D_g \cap D_f \text{ و } f(x) \neq 0\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x / \mathbb{R} - \{-2\} \text{ و } 2x - 4 \neq 0\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x / \mathbb{R} - \{-2\} \text{ و } x \neq 2\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

✓ حل التمرين رقم 6 :

$$D_f =]-\infty; 4[\text{ حيث } f = v \circ u \text{ و } v(x) = \frac{1}{x}, u(x) = -x + 4$$

(1) كتابة عبارة $f(x)$ بدلالة x

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = \frac{1}{-x + 4}$$

(2) تعيين صورة المجال $]-\infty; 4[$ بالدالة u

من أجل كل $x \in]-\infty; 4[$ معناه $x < 4$ و عليه $-x > -4$ و منه $-x + 4 > 0$ إذن $u(x) > 0$ و منه $u(x) \in]0; +\infty[$ أي صورة المجال $]-\infty; 4[$ بالدالة u هي المجال $]0; +\infty[$

(3) اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 4[$

$f = v \circ u$ باستخدام اتجاه تغير مركب دالتين :

لدينا u متناقصة تماما على $]-\infty; 4[$ (دالة الآفية حيث $a < 0$) و مما سبق لدينا $u(x) \in]0; +\infty[$ حيث الدالة v متناقصة تماما على $]0; +\infty[$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 4[$

✓ حل التمرين رقم 7 :

$$D_h =]1; +\infty[\text{ ، } h(x) = \frac{1}{x-1} \quad (1)$$

$$D_f = D_g =]1; +\infty[\text{ ، } g(x) = \frac{x}{x-1} \text{ و } f(x) = x-1$$

(ا) إثبات انه إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > 1$

$$\begin{array}{r|l} x & x-1 \\ -x+1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

إذن من أجل كل $x > 1$ لدينا $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

و منه من أجل كل $x > 1$ أي $x-1 > 0$ أي $\frac{1}{x-1} > 0$ و عليه $1 + \frac{1}{x-1} > 1$ فإن $g(x) > 1$

(ب) التحقق أن $(f \circ g)(x) = h(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

إتجاه تغير الدالة h

باستعمال مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين :
الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و من أجل كل $x > 1$ فإن $g(x) > 1$ أي $g(x) \in]1; +\infty[$ حيث
الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و منه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

✓ حل التمرين رقم 8 :

الجزء الأول:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(4) &= g(f(4)) = g(2) = 0 \text{ و } f(4) = 2 \text{ حيث } (g \circ f)(4) = g(f(4)) \quad (*) \\ (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(0) = 4 \text{ و } f(0) = 2 \text{ حيث } (g \circ f)(0) = g(f(0)) \quad (*) \\ f(x) &= \sqrt{x} \text{ و } g(x) = -2x + 4 \end{aligned}$$

الجزء الثاني:

(1) تعيين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} \\ D_{g \circ f} &= \{x/x \in [0; +\infty[\text{ و } \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ D_{g \circ f} &= \{x/x \in [0; +\infty[\text{ و } x \in [0; +\infty[\} \\ D_{g \circ f} &= [0; +\infty[\end{aligned}$$

(2) اتجاه تغير الدالة $g \circ f$:

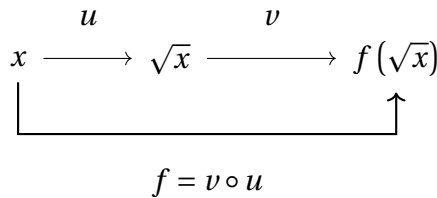
الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و لدينا من أجل $x \in [0; +\infty[$ فإن $\sqrt{x} \in [0; +\infty[$ أي $f(x) \in [0; +\infty[$ حيث
الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و منه الدالة $g \circ f$ متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(3) عبارة الدالة $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2\sqrt{x} + 4$$

✓ حل التمرين رقم 9 :

تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين :



$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ : $u(x) = \sqrt{x}$ و الدالة $v(x) = f(x)$
الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ فإن $\sqrt{x} \in [0; +\infty[$ و من جدول
التغيرات نجد أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$

✓ حل التمرين رقم 10 :

(1) إيجاد مجموعة تعريف الدالة h حيث :

$$\begin{aligned} D_h &= \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} \\ D_h &= \{x/x \in [-3; 1] \text{ و } f(x) \in [-4; 5]\} \\ D_h &= \{x/x \in [-3; 1] \text{ و } -4 \leq f(x) \leq 5\} \\ D_h &= \{x/x \in [-3; 1] \text{ و } -3 \leq x \leq 1\} \\ D_h &= \{x/x \in [-3; 1] \text{ و } x \in [-3; 1]\} \\ D_h &= [-3; 1] \end{aligned}$$

(2) حساب كل من : $h(-3)$ ، $h(0)$ و $h(1)$:

من جدول التغيرات نجد

$$h(1) = g(f(1)) = g(5) = 2 \quad , \quad h(0) = g(f(0)) = g(-4) = -5 \quad , \quad h(-3) = g(f(-3)) = g(0) = 0$$

(3) دراسة إتجاه تغير الدالة h :

على المجال $[-3; 0]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3; 0]$ حيث من أجل كل $x \in [-3; 0]$ فإن $f(x) \in [-4; 0]$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-4; 0]$ و منه الدالة h متناقصة تماما على المجال $[-3; 0]$

على المجال $[0; 1]$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$ حيث من أجل كل $x \in [0; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 5]$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-4; 5]$ و منه الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$

✓ حل التمرين رقم 11 :

$$f(x) = \frac{2x}{x - \frac{1}{2}} : \text{دالة معرفة بـ}$$

(1) (أ) تعيين D_f :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x - \frac{1}{2} \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

(ب) تعيين العددين الحقيقيين a و b

$$\frac{2x}{-2x+1} \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} \\ 2 \end{array} \right. \frac{1}{1}$$

و منه من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ فإن $f(x) = 2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$ حيث $a = 2$ و $b = 1$

(ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

نلاحظ أن f هي مركب دالتين حيث

$$\begin{array}{c} u \qquad \qquad v \\ x \longrightarrow x - \frac{1}{2} \longrightarrow 2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \\ \uparrow \\ f = v \circ u \end{array}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ : $u(x) = x - \frac{1}{2}$ و $v(x) = 2 + \frac{1}{x}$

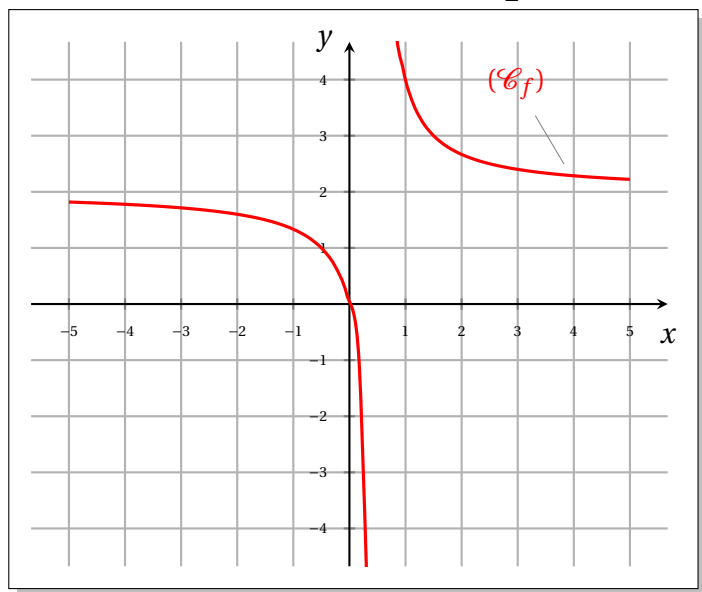
على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$

الدالة $u: x \mapsto x - \frac{1}{2}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ولدينا من أجل كل $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$ أي $x < \frac{1}{2}$ و عليه $0 < x - \frac{1}{2}$ و عليه الدالة $u(x) \in]-\infty; 0[$ حيث الدالة $v(x) \mapsto 2 + \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0; -\infty[$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$

الدالة $u: x \mapsto x - \frac{1}{2}$ متزايدة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ ولدينا من أجل كل $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$ أي $x > \frac{1}{2}$ و عليه $x - \frac{1}{2} > 0$ و عليه الدالة $u(x) \in]0; +\infty[$ حيث الدالة $v(x) \mapsto 2 + \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$

رسم منحنى الدالة f

$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ شعاعه (C_f) صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه



(2) نعتبر الدالة g حيث: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x - \frac{1}{2}}}$

(۱) تعیین D_g :

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ x / \frac{2x}{x - \frac{1}{2}} > 0 \quad \text{و} \quad x - \frac{1}{2} \neq 0 \right\} \\ D_g &= \left\{ x / x \in]-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[\quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2} \right\} \\ D_f &=]-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[\end{aligned}$$

(ب) إثبات أن g أن هي مركب دالتين :

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{f} & \frac{2x}{x-\frac{1}{2}} & \xrightarrow{v} & \sqrt{\frac{2x}{x-\frac{1}{2}}} \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & g = v \circ f
 \end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x - \frac{1}{2}}}$$

و منه f مرکب دالتین معرفتین ب: $f(x) = \frac{2x}{x-\frac{1}{2}}$ و $v(x) = \sqrt{x}$

(ج) إستنتاج اتجاه تغير الدالة g :

* على المجال $]-\infty; 0]$

مما سبق لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ فهي متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

و من أجل كل $x \in]-\infty; 0]$ أي $x \leq 0$

$$\text{فإن } x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \text{ بالمرور إلى المقلوب نجد } \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \geq -2 \text{ بإضافة العدد 2 نجد } 2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \geq 0$$

و عليه $f(x) \in [0; 2[$ أي $f(x) \geq 0$

و الدالة v متزايدة تماما على المجال $x \in [0; 2[$

و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $x \in]-\infty; 0]$

* على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$

مما سبق لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$

و من أجل كل $]\frac{1}{2}; +\infty[$ أي $x > \frac{1}{2}$ فإن $x - \frac{1}{2} > 0$ أي $\frac{1}{x - \frac{1}{2}} > 0$ بإضافة العدد 2 نجد $2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} > 2$ و عليه

$$f(x) \in]2; +\infty[\text{ أي } f(x) > 2$$

و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ أي متزايدة تماما على المجال $]2; +\infty[$ و منه الدالة g متناقصة

تماما على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$

✓ حل التمرين رقم 12 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + 4x + 3$
شرح كيف يمكن إنشاء (C_f) :

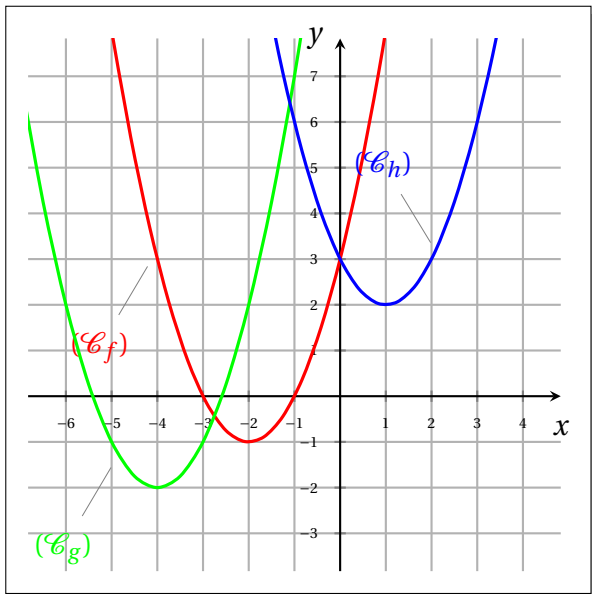
$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(x) = x^2 + 2(2)x + 3 + 2^2 - 2^2$$

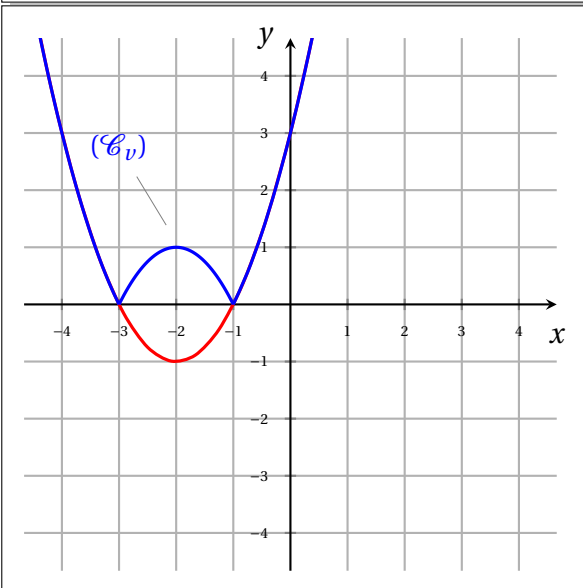
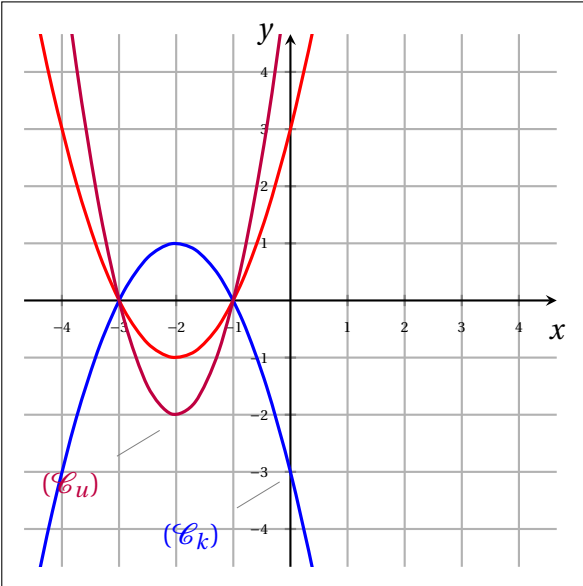
$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

و منه نستنتج أن صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = -2\vec{i} - 1\vec{j}$

* صورة (C_g) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j}$



(*) صورة (C_h) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$



(* (C_k) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل
 (*) من أجل كل نقطة $M(x; y)$ من (C_f) نتحصل على
 (C_u) بضرب ترتيب M في العدد 2

$$v(x) = |f(x)| \begin{cases} f(x); f(x) \geq 0 \\ -f(x); f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} f(x); x \in]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[\\ -f(x); x \in [-3; -1] \end{cases} \quad \text{أي}$$

و منه (C_v) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يقع فوق محور الفواصل
 أي من أجل قيم x حيث : $x \in]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[$
 (C_v) نظير جزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة
 لمحور الفواصل أي من أجل قيم x حيث : $[-3; -1]$

✓ حل التمرين رقم 13 :

f و g دالتين عدديتين معرفتين بـ : $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$.

(1) تعيين D_f و D_g :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$$

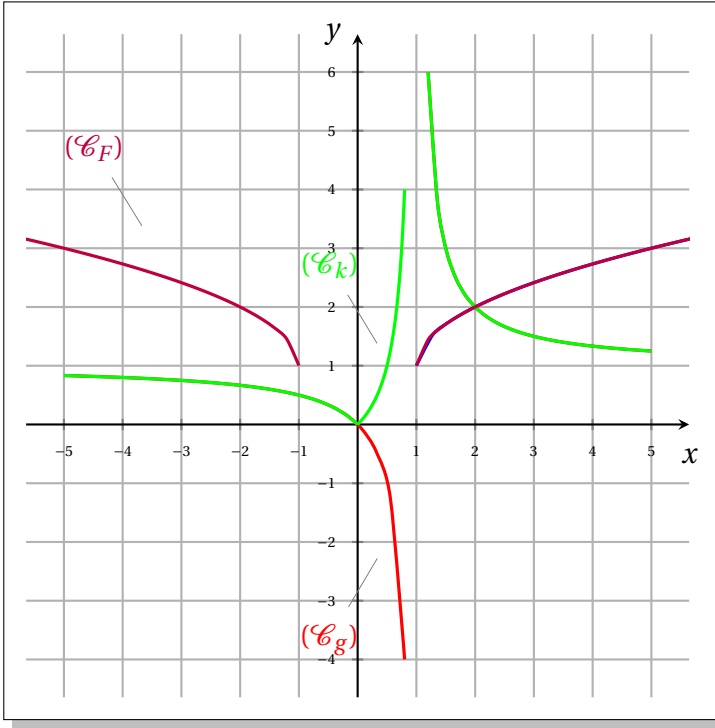
$$D_f = [1; +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) كيفية رسم (C_f) و (C_g) :



(C_F) صورة منحنى الدالة جذر تربيعي
بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$
(C_g) صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب
الذي شعاعه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

(3) كيفية رسم (C_k):

$$k(x) = |g(x)| \begin{cases} g(x); f(x) \geq 0 \\ -g(x); f(x) \leq 0 \end{cases}$$

و منه (C_k) ينطبق على (C_g) لما (C_g) يقع فوق محور الفواصل
(C_k) نظير جزء (C_g) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

$$k(x) = \begin{cases} g(x); x \in]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[\\ -g(x); x \in [0; 1[\end{cases} \quad \text{أي}$$

(4) الدالة العددية المعرفة بـ: $F(x) = f(|x|)$

(أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة F:

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} / |x| - 1 \geq 0\}$$

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 1\}$$

$$D_F = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$D_F =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

(ب) إثبات أن الدالة F زوجية:

من أجل كل $x \in D_F$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ معناه $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه $-x \neq -1$ و $-x \neq 1$

أي $-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ أي $-x \in D_F$ و منه D_F متناظرة بالنسبة للصفر

$$\text{و لدينا } F(-x) = \sqrt{|-x| + 1} - 1 = \sqrt{|x| + 1} - 1 = F(x)$$

و منه الدالة F دالة زوجية أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

(ج) رسم (C_F):

$$F(x) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ f(-x); x \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي من أجل } x \geq 0 \text{ فإن } (C_F) \text{ يتطبق على } (C_f)$$

من أجل $x \leq 0$ نرسم نظير جزء (C_F) بالنسبة لمحور الترتيب لأنها دالة زوجية

f دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ بـ $\frac{2x+5}{x+2}$

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$\begin{array}{r|l} 2x+5 & x+2 \\ -2x-4 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

و منه من أجل كل x من $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ فإن $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$ حيث $a = 2$ و $b = 1$

(2) إثبات أن الدالة f هي مركب دالتين يطلب تعيينهما :

نفرض f مركب دالتين u و v حيث $f = v \circ u$

$$\begin{array}{c} u \quad \quad v \\ x \longrightarrow x+2 \longrightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x+2} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ f = v \circ u \end{array}$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ : $u(x) = x+2$ و $v(x) = 2 + \frac{1}{x}$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

على المجال $] -\infty; -2[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $] -\infty; -2[$ حيث من أجل كل $x \in] -\infty; -2[$ فإن $x < -2$ و منه $x+2 < 0$ أي $u(x) < 0$ و عليه $U(x) \in] -\infty; 0[$ و الدالة V متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 0[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $] -\infty; -2[$

على المجال $] -2; +\infty[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $] -2; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in] -2; +\infty[$ فإن $x > -2$ و منه $x+2 > 0$ أي $u(x) > 0$ و عليه $U(x) \in] 0; +\infty[$ و الدالة v متناقصة تماما على المجال $] 0; +\infty[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $] -2; +\infty[$

(4) إثبات أن النقطة $\omega(-2; 2)$ مركز تناظر (C_f) :

$M(x, y)$ نقطة من (C_f) حيث $y = 2 + \frac{1}{x+2}$ هي معادلة (C_f) بالنسبة للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (X, Y) إحداثياتها بالنسبة للمعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$

باستخدام دساتير تغيير معلم يكون لدينا $\begin{cases} x = X-2 \\ y = Y+2 \end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة f نجد

$$Y = \frac{1}{X} \quad \text{أي} \quad Y+2 = 2 + \frac{1}{X-2+2} \quad \text{نجد} \quad (\omega, \vec{i}, \vec{j}) \quad \text{عبارة الدالة } f \text{ في المعلم}$$

لتكن الدالة F حيث $F(X) = \frac{1}{X}$

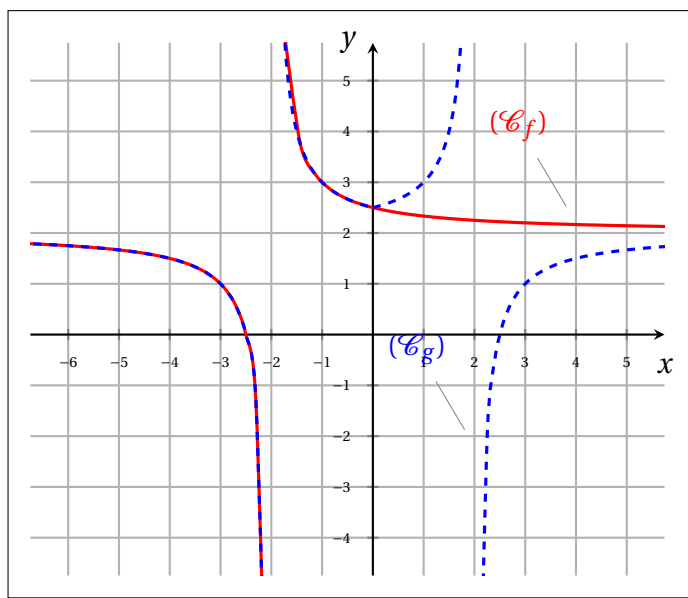
إثبات أن الدالة $F(X)$ فردية :

من أجل كل $X \in \mathbb{R}^*$ فإن $-X \in \mathbb{R}^*$ ولدينا : $F(X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -F(X)$

و منه الدالة فردية و عليه النقطة $\omega(-2;2)$ مركز تناظر (C_f)

(5) طريقة رسم (C_f) :

$\vec{u} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ شعاعه الذي بالإسحاب بالإنسحاب الذي شعاعه



(6) $g(x) = f(-|x|)$ دالة معرفة بـ :

(أ) تعيين D_g :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / -|x| + 2 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 2\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ و } x \neq -2\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

(ب) إثبات أن الدالة g دالة زوجية :

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ فإن $-x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ولدينا

$$g(-x) = f(-|-x|)$$

$$g(-x) = f(-|x|)$$

$$g(-x) = g(x)$$

و منه g دالة زوجية

طريقة رسم (C_g) :

$$g(x) = f(-|x|) \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

إذن

من أجل $x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \geq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب لأنها دالة زوجية

(1) تعيين العددين a و b

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

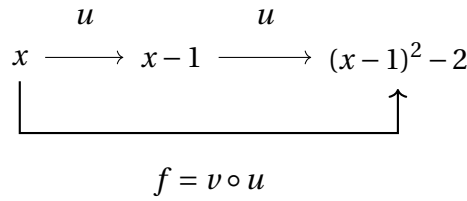
$$f(x) = x^2 - 2(1)x - 1 + 1 - 1$$

$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$

من أجل كل عدد حقيقي فإن $f(x) = (x-1)^2 - 2$ حيث $a = -1$ و $b = -2$

(2) تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v

نفرض f مركب دالتين u و v حيث $f = v \circ u$



و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x-1$ و $v(x) = x^2 - 2$

(3) اتجاه تغير الدالة f

على المجال $]-\infty; 1]$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ حيث من أجل كل $x \in]-\infty; 1]$ فإن $x \leq 1$ و منه $x-1 \leq 0$ أي $u(x) < 0$ و عليه $u(x) \in]-\infty; 0]$ و الدالة v متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1]$

على المجال $[1; +\infty[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in [1; +\infty[$ فإن $x \geq 1$ و منه $x-1 \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ و عليه $u(x) \in [0; +\infty[$ و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

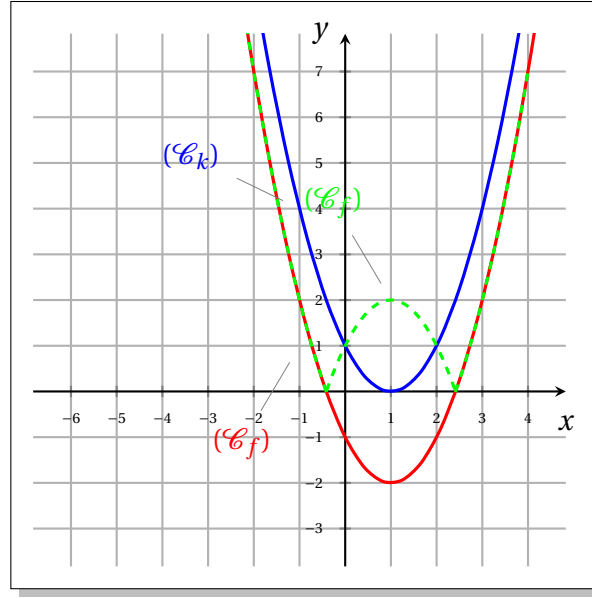
(4) إثبات أن (C_f) هو صورة المنحنى البياني للدالة مربع بانسحاب يطلب تعيين شعاعه

من أجل كل نقطة $M(x, y)$ من منحنى الدالة f فإن معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي $y = (x-1)^2 - 2$ و منه

بوضع $y+2 = (x-1)^2$ المعادلة تصبح $\begin{cases} Y = y+2 \\ X = x-1 \end{cases}$ حيث من أجل كل نقطة $M(x, y)$ من منحنى

الدالة f فإن النقطة $M'(x-1, y+2)$ نقطة من منحنى الدالة مربع حيث $\overrightarrow{M'M} \begin{pmatrix} x-x+1 \\ y-y-2 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{M'M} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

و منه (C_f) صورة منحنى الدالة مربع بالانسحاب الذي شعاعة $\vec{i} - 2\vec{j}$
رسم (C_f)



(5) تمثيل (C_k) و (C_h)

$$h(x) = -|f(x)| = \begin{cases} -f(x); & f(x) \geq 0 \\ f(x); & f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \text{لما } f(x) \leq 0 \text{ ينطبق على } (C_f)$$

لما $f(x) \geq 0$ و (C_h) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل

(* (C_k) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعة $2\vec{j}$

(6) إثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر (C_f)

حيث $M(x, y)$ نقطة من (C_f) $y = (x - 1)^2 - 2$ هي معادلة (C_f) بالنسبة للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و إحداثياتها بالنسبة للمعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$

باستخدام دساتير تغيير معلم يكون لدينا $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة f نجد

عبارة الدالة f في المعلم $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ نجد $Y - 2 = (X - 1 + 1)^2 - 2$ أي $Y = X^2$

لتكن الدالة F حيث $F(X) = X^2$

إثبات أن الدالة $F(X)$ زوجية :

من أجل كل $X \in \mathbb{R}$ فإن $-X \in \mathbb{R}$ ولدينا : $F(X) = (-X)^2 = X^2$ و منه الدالة زوجية إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر (C_f)

الجزء الثاني

$$g(x) = x^2 - 2|x| - 1$$

(1) إثبات أن الدالة g زوجية ثم فسر ذلك بيانيا :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا

$$g(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 1$$

$$g(-x) = x^2 - 2|x| - 1$$

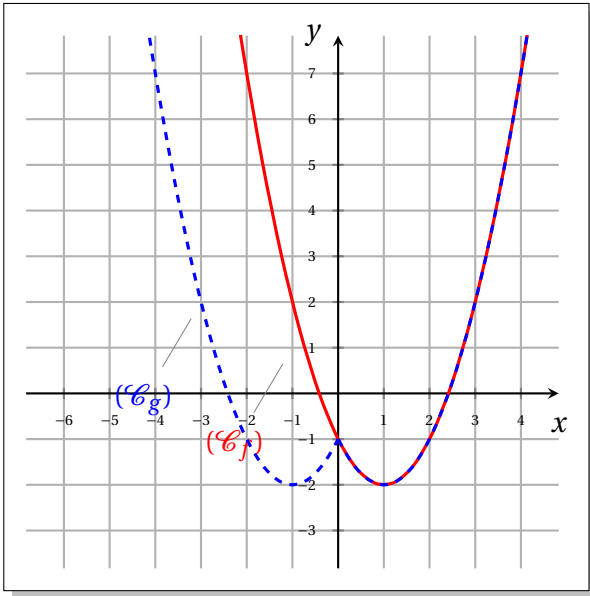
$$g(-x) = g(x)$$

أي أن التمثيل البياني للدالة g متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

(2) كتابة عبارة g بدون القيمة المطلقة :

$$g(x) = \begin{cases} g(x); x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 1; x \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1; x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 1; x \leq 0 \end{cases}$$

(3) طريقة لرسم منحنى الدالة g انطلاقا من منحنى الدالة :



من أجل $x \geq 0$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)
من أجل $x \leq 0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب

✓ حل التمرين رقم 16 :

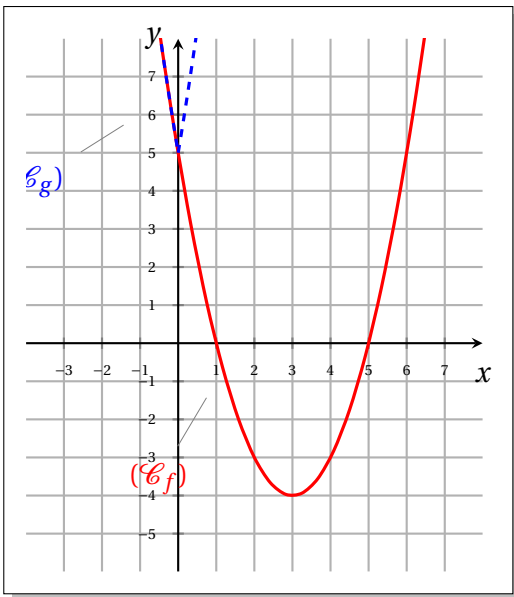
(1) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x-3)^2 - 4$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f(x) = x^2 - 2(3)x + 5 + 3^2 - 3^2$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 4$$

(2) شرح طريقة رسم (C_f) :



(C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي
شعاعه $3\vec{i} - 4\vec{j}$

(3) حساب $f(3-x) - f(3+x)$:

$$\begin{aligned} f(3-x) - f(3+x) &= (3-x-3)^2 - 4 - (3-x-3)^2 + 4 \\ &= x^2 - 4 - x^2 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ محور تناظر للمنحنى (C_f)
(4) إثبات أن الدالة g زوجية
• من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-|-x|) \\ g(-x) &= f(-|x|) \\ g(-x) &= g(x) \end{aligned}$$

ومنه g دالة زوجية

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) ; x \geq 0 \\ f(x) ; x \leq 0 \end{cases} \quad \bullet \text{ من أجل كل عدد حقيقي فإن}$$

و منه $g(x) = f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in]-\infty; 0]$

(ب) طريقة رسم (C_g)

من أجل $x \geq 0$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \leq 0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب لأنها دالة زوجية

(ج) مناقشة حسب قيم m حلول المعادلة : $(x-3)^2 = 4 + m$

$(x-3)^2 = 4 + m$ أي $(x-3)^2 - 4 = m$ معناه $f(x) = m$ (مناقشة أفقية)

• من أجل $m \in]-\infty; -4]$ لا يوجد حلول

• من أجل $m = -4$ يوجد حل واحد موجب

• من أجل $m \in]-4; 5]$ يوجد حلين موجبين

• من أجل $m = 5$ يوجد حلين أحدهما موجب و الآخر معدوم

• من أجل $m \in]5; +\infty[$ يوجد حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم



للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات merouaninardjiss@gmail.com
profmerouani 0770349020