

سلسلة الرياضيات السهلة

# حواشي الرياضيات

■ شعبة : علوم تجريبية

من 2008 إلى 2019

إعداد : خالد بخاوشة ©

## مقدمة

المقدمات لا يقرأها أحد ..

إقلب الصفحة

# الفهرس

|          |                                                |
|----------|------------------------------------------------|
| 3.....   | تصحیح مقترح لباكالوريا 2008                    |
| 16.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2009                    |
| 29.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2010                    |
| 43.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2011                    |
| 54.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2012                    |
| 69.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2013                    |
| 84.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2014                    |
| 98.....  | تصحیح مقترح لباكالوريا 2015                    |
| 113..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2016 المسرّب            |
| 131..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2016                    |
| 148..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2017 الدورة العادية     |
| 161..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية |
| 177..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2018                    |
| 192..... | تصحیح مقترح لباكالوريا 2019                    |

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة:  $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$ .

نرمز للحلين بـ  $z_1$  و  $z_2$  حيث  $|z_1| < |z_2|$ . بين أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

لتكن  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:  $1$ ،  $z_1$  و  $z_2$ .

ليكن  $z$  العدد المركب حيث:  $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ .

أ. إنطلاقاً من التعريف  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ومن الخاصية  $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ .

برهن أن:  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  وأن:  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  بحيث  $\theta$ ،  $\theta_1$  و  $\theta_2$  أعداد حقيقية.

بـ. أكتب  $z$  على الشكل الأسّي.

جـ. أكتب  $z$  على الشكل المثلثي واستنتج أن  $C$  هي صورة  $B$  بتشابه مباشر مركزه  $A$ ، يطلب تعيين نسبته وزاويته.

التمرين الثاني (4 ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته:  $x + 2y - z + 7 = 0$ .

والنقط:  $A(2; 0; 1)$ ،  $B(3; 2; 0)$ ،  $C(-1; -2; 2)$ .

(1) تحقق أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست على استقامية، ثم بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي  $(ABC)$  هي:  $y + 2z - 2 = 0$ .

(2) أتحقق أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان، ثم عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع  $(P)$  و  $(ABC)$ .

بـ. أحسب المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

(3) لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; \alpha), (C; \beta)\}$  حيث  $\alpha, \beta$  عدنان حقيقيان يحققان  $\alpha + \beta + 1 \neq 0$ .

(4) عين  $\alpha$  حتى تنتمي النقطة  $G$  إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

التمرين الثالث (4 ن)

(1) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $I = [1; 2]$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$ .

أبين أن الدالة  $f$  متزايدة على  $I$ .

بـ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$ ،  $f(x)$  ينتمي إلى  $I$ .

(2)  $(u_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يأتي:  $u_0 = \frac{3}{2}$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n$  ينتمي إلى  $I$ .

بـ. أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ .

بـ. عين النهاية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### التمرين الرابع (5,7 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  .  
 تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $1 \text{ cm}$  .

عين قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1; 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  ومعامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$  .

(II) نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  .  
 تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  وفسر النتيجة بيانيا . (نذكر أن  $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$ )

(2) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(3) بين أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة إنعطاف  $I$  يطلب تعيين إحداثيها .

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$  .

(5) أرسم  $(C_g)$  .

(6)  $H$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان .

- عين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  . استنتج الدالة الأصلية للدالة  $g$  والتي تنعدم عند  $0$  .

(III) لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي :  $k(x) = g(x^2)$  .  
 باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة  $k$  ثم شكل جدول تغيراتها .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (3 ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح ، عين الجواب الصحيح معللا اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(1; 3; -1)$  ،  $B(4; 1; 0)$  ،  $C(-2; 0; -2)$  و  $D(3; 2; 1)$  .  
 والمستوي  $(P)$  الذي معادلته  $0 = x - 3z - 4$  .

- (1) المستوي  $(P)$  هو :  
 (1)  $(BCD)$  (2)  $(ABC)$  (3)  $(ABD)$   
 (2) شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  هو :  
 (1)  $\vec{n}_1(1; 2; 1)$  (2)  $\vec{n}_2(-2; 0; 6)$  (3)  $\vec{n}_3(2; 0; -1)$   
 (3) المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(P)$  هي :  
 (1)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  (2)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (3)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

### التمرين الثاني (5 ن)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{5}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  والمنحنى  $(d)$  الممثل للدالة  $f$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

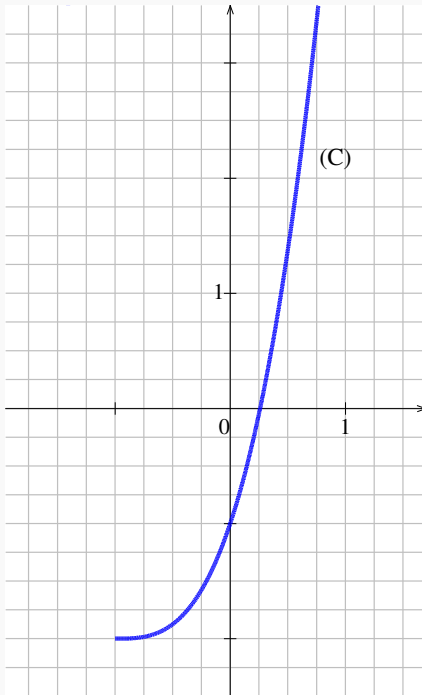
- بـ باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود :  $u_4$  و  $u_3, u_2, u_1, u_0$  .
- جـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها .
- (2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 6$  .
- بـ تحقق أن  $(u_n)$  متزايدة .
- جـ هل  $(u_n)$  متقاربة ؟ برر إجابتك .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = u_n - 6$  .
- أـ أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- بـ أكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

### التمرين الثالث (5ن)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$
- (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقتاهما  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب حيث :  $z_A = 2 + i$  و  $z_B = -2 - 2i$  .
- عين  $z_\omega$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$  ذات القطر  $[AB]$  .
- (3) لتكن  $C$  النقطة ذات الاحقة  $z_C$  حيث :  $z_C = \frac{4-i}{1+i}$  .
- أكتب  $z_C$  على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  .
- (4) أـ برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه  $M_0(z_0)$  ونسبته  $k$  ( $k > 0$ ) وزاويته  $\theta$  والذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  هي :  $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$  .
- بـ تطبيق : عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل  $S$  المعرف بـ :  $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$  .

### التمرين الرابع (7ن)

- المنحنى  $(C)$  المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
- (1) أـ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  وحدد  $g(0)$  وإشارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  .
- بـ علل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]\frac{1}{2}; 0[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$  .
- جـ استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1; +\infty[$  .
- (2)  $f$  هي الدالة العددية المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$  .
- وليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد  $(O, \vec{i}; \vec{j})$
- أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$  .
- بـ عين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسر النتيجة بيانيا .
- جـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$  وفسر النتيجة بيانيا .
- دـ شكل جدول تغيرات  $f$  .
- (3) نأخذ  $\alpha \approx 0.26$  ،
- أـ عين مدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$  .



بـ. أرسم المنحنى  $(\Gamma)$ .

4) أ. أكتب  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$  حيث  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان.

بـ. عين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تحقق  $F(1) = 2$ .

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

1) حل في  $\mathbb{C}$ ، المعادلة:  $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$ .

لدينا:  $\Delta = (1+2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1+i) = 1$  ومنه للمعادلة حلين هما:

$$z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

• تبيان أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  حقيقي:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{2i}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{i}{2}\right)^{1004} = \frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}} = \frac{1}{2^{1004}}$$

2) أ. إعتمادا على التعريف  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ومن الخاصية  $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ .

• لبرهان أن:  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  يكفي إثبات أن:  $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = 1$ .

لدينا:  $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = e^{(-i\theta+i\theta)} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

• إثبات:  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ .

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i\theta_1-i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

بـ. كتابة  $z$  على الشكل الأسّي.

$$z = \frac{z_2-1}{z_1-1} = \frac{1+i-1}{i-1} = \frac{i}{i-1} = \frac{i(-i-1)}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{ومنه} \quad z = \frac{z_2-1}{z_1-1}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ومنه} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{وبفرض } \theta \text{ عمدة للعدد المركب } z, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه } \arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

جـ. كتابة  $z$  على الشكل المثلثي:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

- استنتاج أن  $C$  هي صورة  $B$  بتشابه مباشر مركزه  $A$ ، مع تعيين نسبته وزاوية له :  
لدينا :  $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$  يكافئ  $z_2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_1 - 1)$  ومنه  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  وزاوية له  $-\frac{\pi}{4}$ .

### حل مقترح التمرين الثاني

- (1) التحقق من أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست على استقامية :
- لدينا :  $A(2;0;1)$ ،  $B(3;2;0)$ ،  $C(-1;-2;2)$ ، ومنه  $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$  و  $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$ .
- لدينا  $\frac{-3}{1} \neq \frac{-2}{2}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية وتعين مستويا وحيدا وهو المستوي  $(ABC)$ .
- تبين أن المعادلة الديكارية للمستوي  $(ABC)$  هي :  $y + 2z - 2 = 0$ .
  - علما أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية، يكفي إثبات أن إحداثياتها تحقق المعادلة.
    - $A \in (ABC)$  لأن :  $y_A + 2z_A - 2 = 0 + 2 \times 1 - 2 = 0$
    - $B \in (ABC)$  لأن :  $y_B + 2z_B - 2 = 2 + 2 \times 0 - 2 = 0$
    - $C \in (ABC)$  لأن :  $y_C + 2z_C - 2 = -2 + 2 \times 2 - 2 = 0$
- (2) أ. التحقق أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان :
- لدينا :  $(P): x + 2y - z + 7 = 0$  و  $(ABC): y + 2z - 2 = 0$ .
- ومنه :  $\vec{n}_1(1;2;-1)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\vec{n}_2(0;1;2)$  شعاع ناظمي لـ  $(ABC)$ .
- لدينا  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 0 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$  وبالتالي  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  متعامدان أي أن  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان.
- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  :
- لدينا : تمثيل ديكارتي للمستقيم  $(\Delta)$  من الشكل :  $\begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$  ، بوضع مثلا :  $z = t$
- نجد :  $\begin{cases} x = -2y + t - 7 \\ y = -2t + 2 \end{cases}$  ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  من الشكل :  $\begin{cases} x = 5t - 11 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
- ب. حساب المسافة بين النقطة  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$  :
- المستويان  $(P)$  و  $(ABC)$  متقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  و  $A \in (ABC)$  ومنه :
- $$d(A;(\Delta)) = d(A;(P)) = \frac{|2 + 2 \times 0 - 1 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$
- (3)  $G$  مرجع الجملة  $\{(A;1), (B;\alpha), (C;\beta)\}$  حيث  $\alpha, \beta$  عدنان حقيقيان يحققان  $\alpha + \beta + 1 \neq 0$
- تعيين  $\alpha$  حتى تنتمي النقطة  $G$  إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

$$\begin{cases} x_G = \frac{3\alpha - \beta + 2}{1 + \alpha + \beta} \\ y_G = \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta} \\ z_G = \frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta} \end{cases} \text{ لدينا إحداثيات } G \text{ هي :}$$

$$. \alpha = -\frac{4}{7} \text{ نجد : } x_G + 2y_G - z_G + 7 = 0 \text{ وبالتالي } G \in (ABC) \text{ لأن } G \in (P) \text{ معناه } G \in (\Delta)$$

### حل مقترح التمرين الثالث

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}, \quad I = [1; 2] \quad (1)$$

أ- تبيان أن الدالة  $f$  متزايدة على  $I$ .

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } I \text{ و } f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$$

ومنه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .

ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$ ،  $f(x)$  ينتمي إلى  $I$ .

الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $I$  ومنه من أجل كل  $x \in [1; 2]$ ،  $f(x) \in [f(1); f(2)]$

ولدينا :  $f(1) = 1$  و  $f(2) = 2$ ، إذن من أجل كل  $x \in I$ ،  $f(x) \in I$

$$(2) \quad (u_n) \text{ هي المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يأتي : } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n$  ينتمي إلى  $I$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 2$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$ ، لدينا  $u_0 = \frac{3}{2}$  ومنه  $1 \leq u_0 \leq 2$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $1 \leq u_n \leq 2$ ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ .

لدينا حسب الفرض  $1 \leq u_n \leq 2$  ومنه حسب السؤال (أ)  $1 \leq f(u_n) \leq 2$  أي :  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $1 \leq u_n \leq 2$ .

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $1 \leq u_n \leq 2$  فإن  $u_n - 1 \geq 0$  و  $u_n - 2 \leq 0$  و  $-u_n + 4 > 0$

وبالتالي  $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

⊖ المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$(3) \quad \text{أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

$$\text{من أجل } n = 0, \text{ لدينا } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ وبالتالي } P(0) \text{ صحيحة.}$$

$$\text{• نفرض صحة } P(n) \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ أي : } u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} \text{، ونبرهن صحة } P(n+1)$$

$$. u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \text{ أي}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{4 - u_n} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \text{ لدينا}$$

ومنه  $P(n+1)$  صحيحة.

$$. u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}, n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}\right) = 1 \text{ بـ}$$

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على  $[-2; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  :  
 تعيين قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1; 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  ومعامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$ .  
 $A \in (C_f)$  معناه:  $f(-1) = 1$  أي:  $(-a + b)e + 1 = 1$  ومنه:  $a = b$ .

معامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$  معناه:  $f'(-1) = -e$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[-2; +\infty[$  و:  $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (-ax - b + a)e^{-x}$ .  
 ومنه  $f'(-1) = (2a - b)e$  ومما سبق  $f'(-1) = -e$ .  
 بالمطابقة لدينا  $2a - b = -1$  و  $a = b$  ومنه نجد:  $a = b = -1$ .

(II) الدالة  $g$  معرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  بـ:  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ .  
 (1) تبيان أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

$$. \lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_g)$  عند  $+\infty$ .

(2) دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$ ، و  $g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x - 1) = xe^{-x}$ .  
 - اتجاه تغير الدالة  $g$ :

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $x$ ، ومنه الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[-2; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ :

| $x$     | -2        | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $g(x)$  | $e^2 + 1$ | 1 | 1         |

(3) تبيان أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة إنعطاف  $I$  مع تعيين إحداثيها.

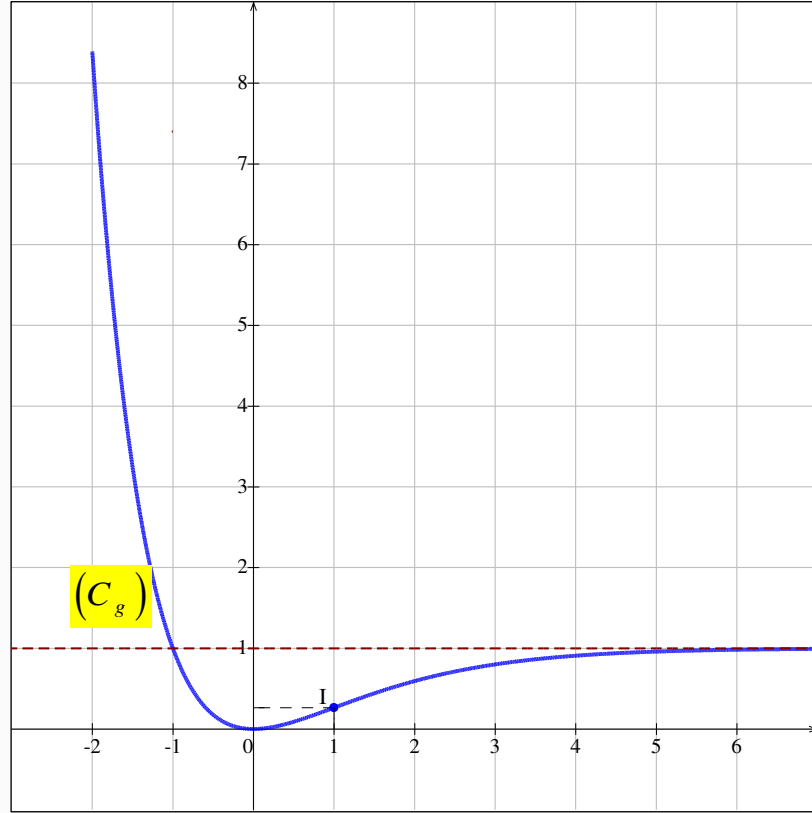
الدالة  $g'$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$ ، و  $g''(x) = (1 - x)e^{-x}$ .

إشارة  $g''(x)$  من إشارة  $1-x$  وبالتالي  $g''(x)$  ينعدم عند 1 مغيرا إشارته ، ومنه  $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$  هي نقطة إنعطاف لـ  $(C_g)$

(4) كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$ .

لدينا :  $(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$  ومنه  $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$

(5) الرسم :



(6) الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان .

- تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$

الدالة  $H$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  ، و  $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$

$H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  معناه :  $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$  ومنه نجد :  $\alpha = 1$  و  $\beta = 2$

لدينا :  $G(x) = H(x) + x + c$  : من الشكل :  $G(x) = H(x) + x + c$  ومنه الدالة الأصلية للدالة  $g$

الدالة الأصلية للدالة  $g$  والتي تنعدم عند 0 هي :  $G(x) = (x+2)e^{-x} + x + 2$

(III) لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي :  $k(x) = g(x^2)$

الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ،

و  $k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2e^{-x^2}) = 2x^3e^{-x^2}$

إتجاه تغير الدالة  $k$  :

إشارة  $k'(x)$  من إشارة  $x$  ، ومنه الدالة  $k$  متناقصة على المجال  $[-2; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $k$  :

|         |             |   |           |
|---------|-------------|---|-----------|
| $x$     | -2          | 0 | $+\infty$ |
| $k'(x)$ | -           | 0 | +         |
| $k(x)$  | $1-5e^{-4}$ | 0 | 1         |

حل مقترح التمرين الأول

تعيين الجواب الصحيح مع التعليل :

لدينا :  $A(1;3;-1)$  ،  $B(4;1;0)$  ،  $C(-2;0;-2)$  ،  $D(3;2;1)$  و  $(P): x - 3z - 4 = 0$  .

(1) المستوي  $(P)$  هو : ج2 (  $ABC$  )

التبرير :

يكفي إثبات أن النقط ليست في إستقامية وأن إحداثياتها تحقق معادلة  $(P)$  .

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$  و  $\overrightarrow{AC}(-3;-3;-1)$  و  $\frac{-3}{3} \neq \frac{-2}{-3}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي أن

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في إستقامية .

$$x_A - 3z_A - 4 = 1 - 3 \times (-1) - 4 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$x_B - 3z_B - 4 = 4 - 3 \times 0 - 4 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$x_C - 3z_C - 4 = -2 - 3 \times (-2) - 4 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

(2) شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  هو : ج2  $\vec{n}_2(-2;0;6)$

التبرير :

لدينا : شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  و  $\vec{n}_2 = -2\vec{n}$  ومنه شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  .

(لاحظ أن : كلا من  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_3$  ليسا مرتبطين خطيا مع  $\vec{n}$  )

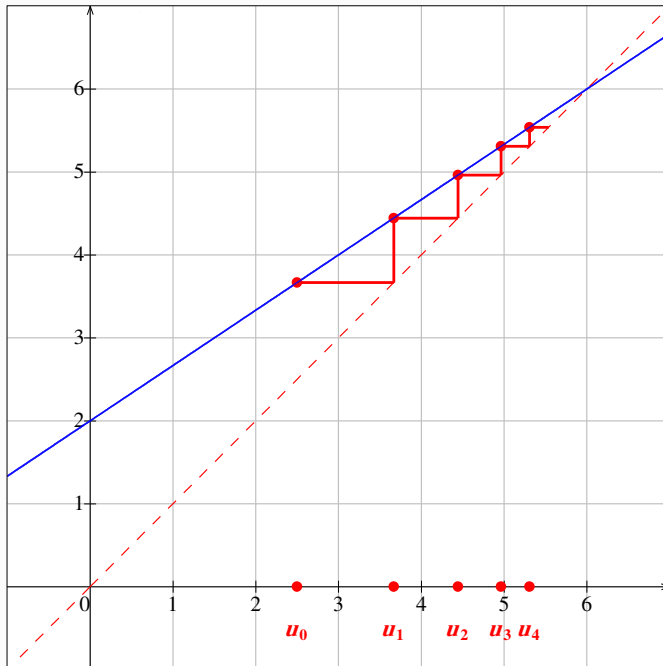
(3) المسافة بين النقطة  $D$  و المستوي  $(P)$  هي : ج3  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$  .

$$d = (D; (P)) = \frac{|1 \times 3 - 0 \times 2 - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ التبرير :}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{5}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ- ب- الرسم وتمثيل الحدود :



جـ- التخمين :

نلاحظ من الرسم أن :  $u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_0$  : الحدود تتراكم حول العدد 6 .

وضع تخمين : المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومتقاربة نحو 6 .

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 6$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 6$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = \frac{5}{2}$  ومنه  $u_0 \leq 6$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_n \leq 6$  ، و نبهرن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} \leq 6$  .

لدينا حسب الفرض  $u_n \leq 6$  ومنه  $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \times 6$  ومنه  $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq \frac{2}{3} \times 6 + 2$  أي  $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$  أي  $u_{n+1} \leq 6$  .

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \leq 6$  .

ب- التحقق أن  $(u_n)$  متزايدة :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2 = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$  ،

و لدينا مما سبق أن :  $u_n \leq 6$  ومنه  $u_n - 6 \leq 0$  . إذن  $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \geq 0$  .

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ، وعليه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

جـ- المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = u_n - 6$

أ- إثبات أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2 \times 6}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$  . الحد الأول :  $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$  .

ب- كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$  .

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :  $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$  .

جـ-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6 \right) = 6$  . (لاحظ أن  $0 < \frac{2}{3} < 1$  )  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  : لأن :

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

لدينا :  $\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times (-2 - 6i) = 7 + 24i = 7 + 2 \times 4 \times 3i = 16 - 9 + 2 \times 4 \times 3i = (4 + 3i)^2$  .

(يمكن استخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ  $\Delta$ )

ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :  $z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$  و  $z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$  .

(2) تعيين  $z_\omega$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$  ذات القطر  $[AB]$  :

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

(3) كتابة  $z_C$  على الشكل الجبري :

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3-5i}{2}$$

• إثبات أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  :

$$\text{يكفي أن نثبت أن : } \omega C = \frac{1}{2} AB \text{ أي : } |z_C - z_\omega| = \frac{1}{2} |z_B - z_A|$$

$$|z_C - z_\omega| = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i - \left(-\frac{1}{2}i\right) \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} |z_B - z_A| \text{ و } |z_B - z_A| = |-2 - 2i - 2 - i| = |-4 - 3i| = 5$$

ومنه  $C \in (\Gamma)$ .

(4) أ- التشابه المباشر الذي مركزه  $M_0(z_0)$  نسبته  $k$  ( $k > 0$ ) وزاويته  $\theta$  معناه :

$$S \quad M_0 = M_0$$

• من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي تختلف عن  $M_0$  ،  $M' = M$  معناه :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| = k \\ \arg \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) = \theta + 2k\pi \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} |z' - z_0| = k |z - z_0| \\ \arg \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) = \theta + 2k\pi \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} M_0 M' = k M_0 M \\ \overrightarrow{M_0 M}, \overrightarrow{M_0 M'} = \theta \end{array} \right.$$

ومنه  $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = k e^{i\theta}$  أي :  $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$  هي عبارة التشابه  $S$ .

ب- تطبيق : تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل  $S$  المعرف بـ :  $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left( z + \frac{1}{2}i \right)$

التحويل  $S$  هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة  $-\frac{1}{2}i$  أي  $\omega$  ونسبته 2 وزاوية له  $\frac{\pi}{3}$ .

#### حل مقترح التمرين الرابع

(1) أ- بقراءة بيانية :

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|        |    |           |
|--------|----|-----------|
| $x$    | -1 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -2 | $+\infty$ |

$$g(0) = -1 \text{ و } g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب- الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على المجال  $[-1; +\infty[$  و  $[-1; +\infty[ \subset ]0; \frac{1}{2}]$  و  $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]0; \frac{1}{2}]$  يحقق  $g(\alpha) = 0$ .

|        |    |          |           |
|--------|----|----------|-----------|
| $x$    | -1 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -  | ○        | +         |

ج- إشارة  $g(x)$  :

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} : \text{بـ} ]-1; +\infty[ \text{الدالة العددية المعرفة على}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} : \text{بـ} ]-1; +\infty[ \text{أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من}$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3) \times (x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2 + 6x + 3) \times (x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0 \text{ ومنه } f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \text{ بـ}$$

التفسير :  $(\Gamma)$  يقبل عند النقطة  $A(\alpha; f(\alpha))$  مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \right] = +\infty \text{ جـ}$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(\Gamma)$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{(x+1)^2} \right) = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(\Gamma)$  .

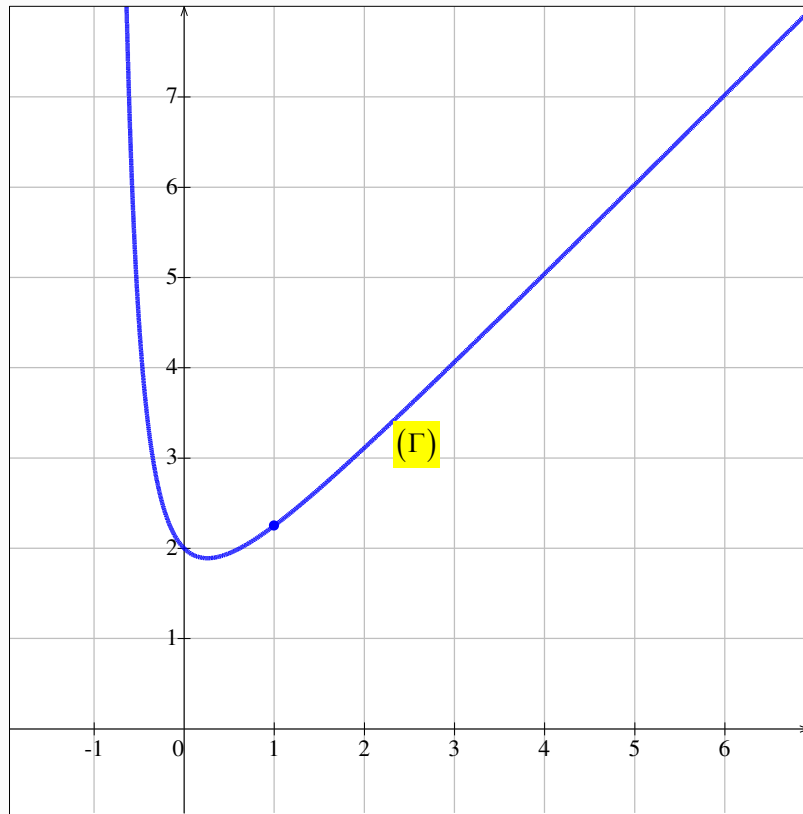
|         |           |                   |           |
|---------|-----------|-------------------|-----------|
| $x$     | $-1$      | $\alpha$          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$<br>$0$<br>$+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$       | $+\infty$ |

د- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

(3) بأخذ  $\alpha \approx 0.26$  ،

أ-  $f(\alpha) \approx 1.89$  .

ب- الرسم :



(4) أ- كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^3 + 1}{(x+1)^2} = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- تعيين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تحقق  $F(1) = 2$  .

الدالة  $f$  مستمرة على  $]-1; +\infty[$  وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق  $F(1) = 2$  هي الدالة  $F$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ:

$$F(x) = \int_1^x \left( t + 1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{t+1} \right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1 : \text{ومنه } F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (3,5 ن)

- ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$  و  $u_1 = 2$  و  $u_0 = 1$ .
- المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .
- (1) أحسب  $v_0$  و  $v_1$ .
- (2) برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
- (3) أـ أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ .
- بـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$ .
- جـ بين أن ( $u_n$ ) متقاربة.

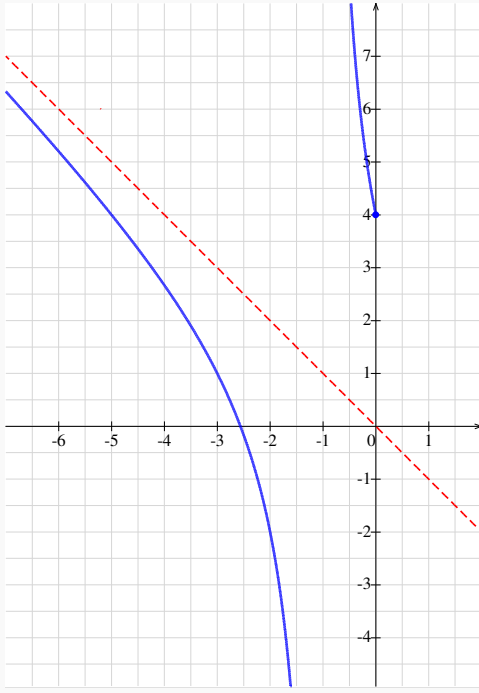
التمرين الثاني (5 ن)

- ( $P(z)$ ) كثير حدود حيث:  $P(z) = (z^2 - 2z + 4)(z - 1 - i)$  و  $z$  عدد مركب.
- (1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $P(z) = 0$ .
- (2) نضع:  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .
- أـ أكتب  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.
- بـ أكتب  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.
- جـ استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .
- (3) أـ  $n$  عدد طبيعي، عيّن قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  حقيقياً.
- بـ أحسب قيمة العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$ .

التمرين الثالث (4 ن)

- الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر النقط:  $A(1; 0; 2)$ ،  $B(0; 2; 1)$ ،  $C(2; 1; 3)$ .
- (1) ( $P$ ) مستو معادلة له من الشكل:  $x - z + 1 = 0$ .
- أـ بين أن المستوي ( $P$ ) هو المستوي ( $ABC$ ).
- بـ ما طبيعة المثلث  $ABC$ ؟
- (2) أـ تحقق من أن النقطة  $D(2; 3; 4)$  لا تنتمي إلى المستوي ( $ABC$ ).
- بـ ما طبيعة  $ABCD$ ؟
- (3) أـ أحسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي ( $ABC$ ).
- بـ أحسب حجم  $ABCD$ .

### التمرين الرابع (5,7 ن)



I  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  بـ :  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$  (تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الشكل  $(C_f)$ )

1) أ- أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$ .

ب- بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغير  $f$  شكل جدول تغيراتها.

2)  $g$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ- أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$ .

ب- تحقق من أن  $(C_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  عند  $+\infty$  يطلب تعيين

معادلته.

ج- أدرس تغيرات  $g$ .

II  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي :  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1) أ- أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ، ماذا تستنتج ؟

ب- أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتى المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$ .

3) أرسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$ .

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  و المستقيمتين التي معادلتهما :  $x = -\frac{1}{2}$  ،  $x = \frac{1}{2}$  ،  $y = 0$ .

### الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4 ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقط :

$$D(1; -1; -2) , C(3; 0; -2) , B(1; -2; 4) , A(2; 3; -1)$$

وليكن  $(\pi)$  المستوي المعرف بمعادلته الديكارتيّة :  $2x - y + 2z + 1 = 0$ .

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1) النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  في إستقاميّة.

2)  $(ABD)$  مستو معادلة ديكراتيّة له :  $25x - 6y - z - 33 = 0$ .

3) المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ .

4) المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(\pi)$  هو النقطة  $H(1; 1; -1)$ .

### التمرين الثاني (4 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

2) نسمي  $z_1$  و  $z_2$  حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.

- بـ.  $A$  ،  $B$  و  $C$  هي النقاط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب:  $z_A = 1 - i\sqrt{3}$  ،  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  ، و  $z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$
- أحسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$  ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .
- جـ. جد الطويلة وعمدة للعدد المركب  $z$  حيث:  $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ .
- دـ. أحسب  $z^3$  ،  $z^6$  ، ثم استنتج أن  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي  $k$ .

### التمرين الثالث (5ن)

- ( $u_n$ ) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q$  حيث:
- $$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$
- 1) أـ. أحسب  $u_2$  والأساس  $q$  لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول  $u_1$   
 بـ. أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- جـ. أحسب  $S_n$  حيث:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  ثم عين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $S_n = 728$ .
- ( $v_n$ ) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:  $v_1 = 2$  و  $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$
- 2) أـ. أحسب  $v_2$  ،  $v_3$ .  
 بـ. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$  ، بين أن ( $w_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .  
 جـ. أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ .

### التمرين الرابع (7ن)

- (I)  $h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$
- 1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .
- 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$   
 واستنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أنجز جدول تغيراتها.
- 3) أحسب  $h(0)$  واستنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .
- (II) لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$
- نرمز بـ ( $C_f$ ) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1) أـ. أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.  
 بـ. باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  ، برهن أن  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .  
 جـ. استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- دـ. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .  
 هـ. أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.
- 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- 3) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.
- 4) أرسم  $(C_f)$ .
- 5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها:  $y = x - 1$  ،  $x = 0$  ، و  $x = 1$ .

حل مقترح التمرين الأول

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$  و  $u_1 = 2$  و  $u_0 = 1$  .

المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .

(1) حساب  $v_1$  و  $v_0$  :

$$\text{لدينا : } v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} , \quad v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$$

(2) برهان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  .

(3) أ- حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  بحيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  .

$$\text{بما أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية فإن : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left[ \frac{1-q^n}{1-q} \right] = \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right] = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$\text{ب- برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n$$

$$\text{ومنه } u_n = S_n + u_0 = S_n + 1 = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 \text{ أي : } u_n = S_n + 1$$

( يمكن إستخدام البرهان بالتراجع )

ج- تبين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 \right) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

( لأن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  ) ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

حل مقترح التمرين الثاني

$P(z)$  كثير حدود حيث :  $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$  و  $z$  عدد مركب .

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $P(z) = 0$  .

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \text{ أو } z = 1 + i \text{ أو } z^2 - 2z + 4 = 0$$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 2z + 4 = 0$  :

$$\text{لدينا : } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$z_2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $P(z) = 0$  هي:  $S = \{1+i; 1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$ .

(2) نضع:  $z_1 = 1+i$ ،  $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ .

أ- كتابة  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي:

لدينا:  $z_1 = 1+i$  ومنه:  $|z_1| = \sqrt{2}$ .

$$\text{وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1 \text{، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{، ومنه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{، حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

إذن:  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

لدينا:  $z_2 = 1-i\sqrt{3}$  ومنه:  $|z_2| = 2$ .

$$\text{وبفرض } \theta_2 \text{ عمدة للعدد المركب } z_2 \text{، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{، ومنه } \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{، حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

إذن:  $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

ب- كتابة  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

ج- إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ :

لدينا:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  وبالمطابقة مع الشكل الجبري نجد:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

(3) أ- عدد طبيعي، تعيين قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  حقيقياً.

$$\text{لدينا: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = k\pi \text{ يكافئ } \frac{7n\pi}{12} = k\pi \text{، مع } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{ب- حساب قيمة العدد } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} e^{i\frac{7 \times 456 \pi}{12}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456} e^{266i\pi} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228} = \frac{1}{2^{228}} : \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

$A$  ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(1;0;2)$  ،  $B(0;2;1)$  ،  $C(2;1;3)$ .

(1)  $(P)$  مستو معادلة له من الشكل :  $x - z + 1 = 0$

أ- تبين أن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$ .

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$  و  $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$  و  $\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$

ليست في استقامية وتعين مستويا وحيدا وهو المستوي  $(ABC)$ . ولدينا من جهة :

$$x_A - z_A + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$x_B - z_B + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$x_C - z_C + 1 = 2 - 3 + 1 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

إذن : المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$ .

ب- طبيعة المثلث  $ABC$  :

لدينا :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$  ومنه المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ .

(2) أ- التحقق من أن النقطة  $D(2;3;4)$  لا تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

لدينا :  $x_D - z_D + 1 = 2 - 4 + 1 \neq 0$  ومنه  $D \notin (ABC)$ .

ب- طبيعة  $ABCD$  :

بما أن  $D \notin (ABC)$  فإن  $ABCD$  رباعي وجوه.

(3) أ- حساب المسافة بين  $D$  والمستوي  $(ABC)$ .

$$d(D; (ABC)) = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب- حساب حجم  $ABCD$ .

$$V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times h \text{ حيث : } h = d(D; (ABC))$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه : } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

### حل مقترح التمرين الرابع

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  بـ :  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ |
|---------|-----------|------|-----|
| $f'(x)$ |           | -    | -   |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $4$ |

(2)  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$  : كما يلي :  $[0; +\infty[$  المجال

أ-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$

ب- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x+1} \right) = 0$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_g)$  عند  $+\infty$ .  
ج- دراسة تغيرات الدالة  $g$ .

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  ، و  $g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $x+3 > 0$  ، وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $x-1$ .

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0 | +         |

الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[0; 1]$  و متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0 | +         |
| $g(x)$  | 4 | 3 | $+\infty$ |

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي :  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ-  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{h-3}{h+1} \right) = -3$

ب-  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left( \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left( \frac{-h-5}{h+1} \right) = -5$

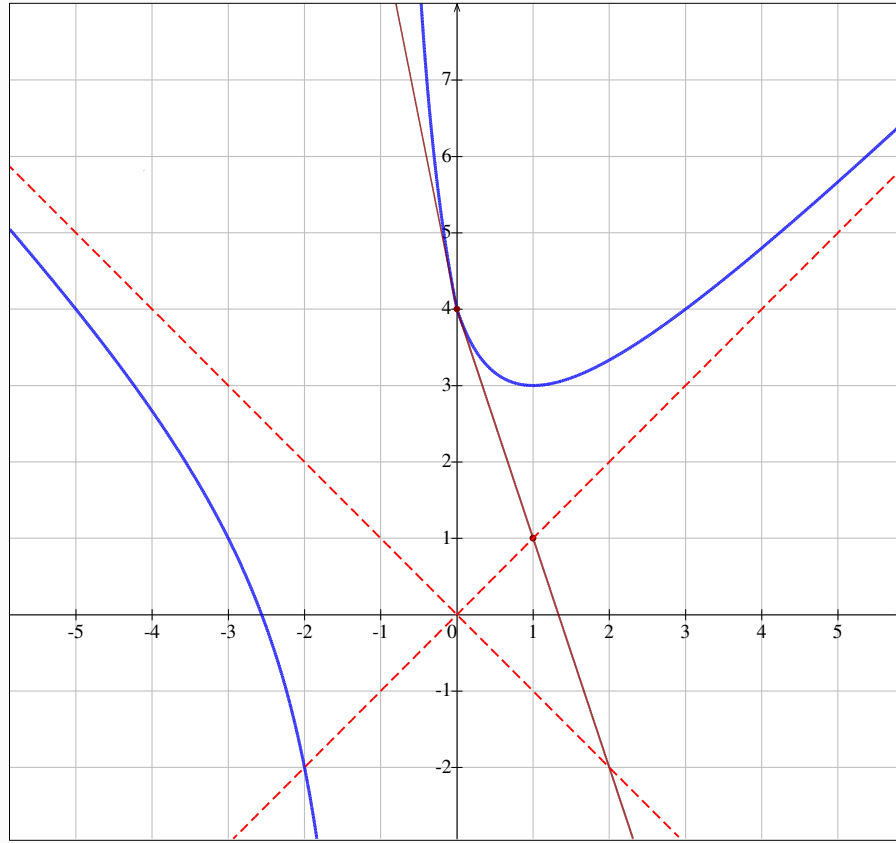
نستنتج أن الدالة  $k$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ب- النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية والمنحنى  $(C_k)$  يقبل نصفي مماسين.

(2) كتابة معادلتَي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  :

$(\Delta_1): y = -3x + 4$  و  $(\Delta_2): y = -5x + 4$

(3) الرسم :



(4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  والمستقيمات التي معادلاتها :  $x = -\frac{1}{2}$  ،  $x = \frac{1}{2}$  ،  $y = 0$  .

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \left[ -\frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[ \frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4\ln 3$$

## تصحيح مقترح للموضوع الثاني

### حل مقترح التمرين الأول

لدينا :  $A(2;3;-1)$  ،  $B(1;-2;4)$  ،  $C(3;0;-2)$  ،  $D(1;-1;-2)$  و  $(\pi): 2x - y + 2z + 1 = 0$  .  
الإجابة بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة :  
(1) النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  في إستقامة . ← خطأ  
التبرير :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$  و  $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$  و  $\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-5}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا .

(2)  $(ABD)$  مستو معادلة ديكارتية له :  $25x - 6y - z - 33 = 0$  . ← صحيح  
التبرير :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$  و  $\overrightarrow{AD}(-1;-4;-1)$  و  $\frac{-1}{-1} \neq \frac{-4}{-5}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AD}$  ليسا مرتبطين خطيا ، و  
لأن  $A \in (ABD)$  :  $25 \times 2 - 6 \times 3 + 1 - 33 = 0$  .

$$25 \times 1 - 6 \times (-2) - 4 - 33 = 0 : \text{لأن } B \in (ABD)$$

$$25 \times 1 - 6 \times (-1) + 2 - 33 = 0 : \text{لأن } D \in (ABD)$$

(3) المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ . — خطأ  
التبرير:

لدينا:  $\vec{n}(2; -1; 2)$  شعاع ناظمي لـ  $(\pi)$  و  $\overrightarrow{CD}(-2; -1; 0)$  و  $\frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$  وبالتالي  $\vec{n}$  و  $\overrightarrow{CD}$  ليسا مرتبطين خطياً.  
إذن المستقيم  $(CD)$  لا يعامد المستوي  $(\pi)$ .

(4) المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(\pi)$  هو النقطة  $H(1; 1; -1)$ . — خطأ  
التبرير:

لدينا:  $\vec{n}(2; -1; 2)$  شعاع ناظمي لـ  $(\pi)$  و  $\overrightarrow{BH}(0; 3; -5)$  و  $\frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$  وبالتالي  $\vec{n}$  و  $\overrightarrow{BH}$  ليسا مرتبطين خطياً.  
إذن  $H$  ليست المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(\pi)$ .

### حل مقترح التمرين الثاني

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

لدينا:  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2i\sqrt{3})^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$$z_2 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

(2) أ. كتابة العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي:

لدينا:  $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$  ومنه:  $|z_1| = 2$ .

$$\text{وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا:  $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه:

بـ.  $A, B, C$  هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب:  $z_A = 1 - i\sqrt{3}, z_B = 1 + i\sqrt{3}$  و

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$$

حساب الأطوال:

$$BC = |z_C - z_B| = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3} \text{ و } AC = |z_C - z_A| = \left| \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \right| = 3, \quad AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

طبيعة المثلث  $ABC$ :

لدينا:  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  ومنه المثلث  $ABC$  قائم في  $C$  حسب النظرية العكسية لفيتاغورس.

جـ. إيجاد الطويلة وعمدة للعدد المركب  $z$  حيث:  $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ .

$$\text{لدينا: } |z| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

و  $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  ،  $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ومنه  $z^{3k} = \left(\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})\right)^{3k}$  ثم استنتاج أن  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي  $k$ .

د- حساب  $z^3$  ،  $z^6$  ،  $z^{3k}$  : لدينا  $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $z^3 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \frac{1}{2^3}e^{i\pi} = -\frac{1}{8}$  ومنه  $z^6 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{2^6}e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$  ولدينا :  $z^{3k} = (z^3)^k = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$  ومنه  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي  $k$ .

### حل مقترح التمرين الثالث

( $u_n$ ) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q$  حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- حساب  $u_2$  والأساس  $q$  لهذه المتتالية :

لدينا :  $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$  وحسب خاصية الوسط الهندسي  $(u_2)^2 = u_1 \times u_3$  ومنه نجد :  $(u_2)^3 = 216$  أي  $u_2 = 6$ .

• حساب الأساس  $q$  :

لدينا :  $u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$  وكون المتتالية ( $u_n$ ) هندسية فإن  $u_3 = q \times u_2$  و  $u_1 = \frac{u_2}{q}$

إذن :  $u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$  تكافئ  $\frac{6}{q} + 12 + 6q = 32$  أي :  $3q^2 - 10q + 3 = 0$

لنحل المعادلة :  $3q^2 - 10q + 3 = 0$

لدينا :  $\Delta = 64$  ومنه للمعادلة حلان هما :  $q_1 = 3$  و  $q_2 = \frac{1}{3}$ .

وبما أنها المتتالية متزايدة تماما فإن أساسها  $q$  أكبر تماما من الواحد ومنه  $q = 3$ .

• حساب الحد الأول  $u_1$  :

لدينا  $u_1 = \frac{u_2}{q}$  ومنه  $u_1 = \frac{6}{3} = 2$ .

ب- كتابة عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$  ، ومنه :  $u_n = 2 \times 3^{n-1}$ .

ج- حساب  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right) = 2 \left( \frac{1-3^n}{1-3} \right) = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

• تعيين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $S_n = 728$  :

لدينا :  $S_n = 728$  يكافئ  $3^n - 1 = 728$  أي  $3^n = 729$  أي  $3^n = 3^6$  ومنه  $n = 6$ . (يمكن استخدام اللوغاريتم)

(2) ( $v_n$ ) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي :  $v_1 = 2$  و  $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- حساب  $v_2$  و  $v_3$  :

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5 \quad , \quad v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

ب- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

• تبيان أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3}{2 \times 3} \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} w_n$$

ومنه المتتالية  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

جـ- كتابة  $w_n$  بدلالة  $n$  :

$$. w_n = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ : ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, w_n = w_1 \times q^{n-1}, \text{ ومنه :}$$

• إستنتاج  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$. v_n = \left( w_n + \frac{2}{3} \right) u_n \text{ أي } \frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3} \text{ ومنه } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ : ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم :}$$

$$. v_n = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1} \text{ أي } v_n = \left[ \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right] \times 2 \times 3^{n-1} \text{ إذن :}$$

### حل مقترح التمرين الرابع

(I)  $h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ .

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = -\infty$$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ .

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة  $h$  :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :  $x+1 > 0$  و  $1+2(x+1)^2 > 0$  ومنه  $h'(x) > 0$

وبالتالي الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $h$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | -1        | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | +         |
| $h(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

حساب  $h(0)$  وإستنتاج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$  :

$$h(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = 0$$

• إشارة  $h(x)$  :

|        |    |   |           |
|--------|----|---|-----------|
| $x$    | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $h(x)$ | -  | 0 | +         |

$$(II) \quad f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{بـ} : ]-1; +\infty[ \text{ الدالة العددية المعرفة على}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ حساب}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left( -\frac{1}{x+1} \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\text{بـ باستخدام النتيجة} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \text{ نبرهن أن} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

$$\text{نضع} \quad t = \ln u \text{ فيكون} \quad u = e^t \text{ ومنه} : \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( \frac{e^t}{t} \right)} = 0$$

$$\text{جـ استنتاج} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0 : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\text{دـ حساب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

هـ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق  $f(x) - (x-1)$ .

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ وبالتالي إشارة} \quad f(x) - (x-1) \text{ من إشارة} \quad -\ln(x+1) \text{ لأن} \quad x+1 > 0.$$

| $x$          | -1                     | 0                                               | $+\infty$              |
|--------------|------------------------|-------------------------------------------------|------------------------|
| $f(x) - y$   |                        | +                                               | -                      |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$<br>في النقطة $A(0; -1)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

$$(2) \quad \text{أثبت أن أنه من أجل كل} \quad x \text{ من} \quad ]-1; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}, \quad \text{الدالة}$$

$f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :

$$f'(x) = 1 - \left[ \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \left( \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right)$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{ومن هنا : من أجل كل عدد حقيقي} \quad x \text{ من} \quad ]-1; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2} :$$

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| $x$     | -1        | 0  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0  | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ |

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

(3) تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

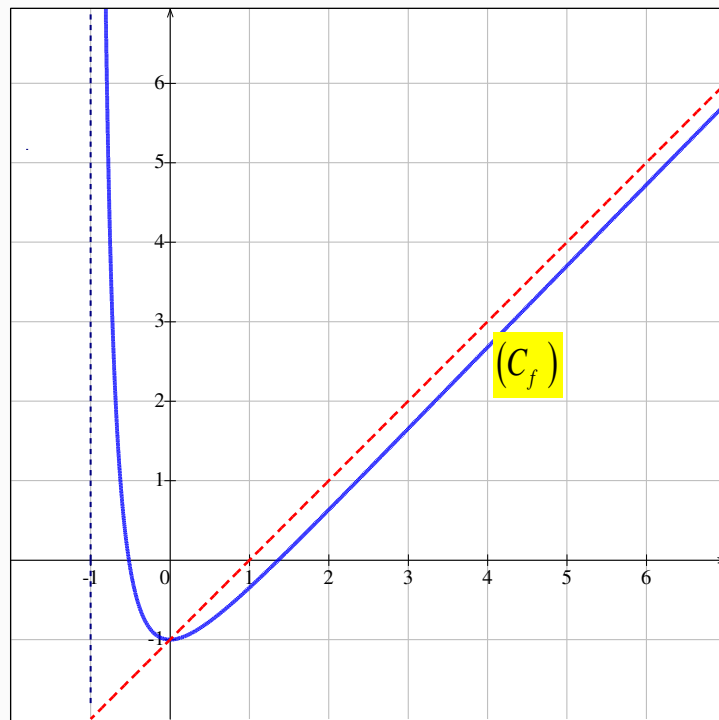
معناه لنثبت أن المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلا محصورا بين 3,3 و 3,4 .

الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $]-1; +\infty[$  وبالتالي فهي مستمرة على  $[3,3;3,4]$  كون  $]-1; +\infty[ \supset [3,3;3,4]$  .

ولدينا  $\begin{cases} f(3,3) \approx 1,96 \\ f(3,4) \approx 2,06 \end{cases}$  وبالتالي  $f(3,3) < 2 < f(3,4)$  ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 2$

تقبل حلا في المجال  $[3,3;3,4]$  .

(4) الرسم :



(5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين التي معادلاتها :  $y = x - 1$  و  $x = 1$  .

$$S = \int_0^1 [(x-1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقطتين  $A$  و  $B$  لاحقتيهما على الترتيب :

$$z_B = 3i \quad \text{و} \quad z_A = 1+i$$

- (1) أكتب كلا من  $z_B$  و  $z_A$  على الشكل الأسّي .
- (2) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $z'$  بحيث :  $z' = 2iz + 6 + 3i$   
أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  .  
ب- عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$  .  
ج- استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .
- (3) لتكن النقطة  $D$  مرجح الجملة  $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$  .  
أ- عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  .  
ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي  $ABCD$  .
- (4) لتكن  $M$  نقطة من المستوي تختلف عن  $B$  وعن  $D$  لاحقتها  $z$  ولتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي يكون من أجلها  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما .

- أ- تحقق أن النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $z_E = 6 + 3i$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  .
- ب- أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  . عين حينئذ المجموعة  $(\Delta)$  .

التمرين الثاني (5ن)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط  $A(1; 1; 0)$  ،  $B(2; 1; 1)$  و  $C(-1; 2; -1)$  .
- (1) أ- بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة .  
ب- بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي  $(ABC)$  هي :  $x + y - z - 2 = 0$
  - (2) نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  اللذين معادلتيهما على الترتيب :  $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$  ،  $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$  ،  
والمستقيم  $(D)$  الذي يشمل النقطة  $F(0; 4; 3)$  و  $\vec{u}(-1; 5; 3)$  شعاع توجيه له .  
أ- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(D)$  .  
ب- تحقق أن تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هو المستقيم  $(D)$  .
  - (3) عين تقاطع المستويات الثلاث  $(ABC)$  ،  $(P)$  و  $(Q)$  .

التمرين الثالث (10ن)

- (I) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  بـ :  $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$
- وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  .

- (2) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$  ثم شكل جدول تغيراتها .  
 (3) عين فاصلة النقطة من  $(C_f)$  التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم  $(d)$  ذي المعادلة  $y = x$  .  
 (4) أ- أثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $I$  يمكن كتابة  $f(x) = \ln(x+a)+b$  على الشكل : حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب- استنتج أنه يمكن رسم  $(C_f)$  إنطلاقا من  $(C)$  منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" ثم أرسم  $(C)$  و  $(C_f)$  .

(II) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $I$  بـ :  $g(x) = f(x) - x$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ثم بين أن  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $I$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- أحسب  $g(1)$  ثم بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  حلا وحيدا  $\alpha$  . تحقق أن  $2 < \alpha < 3$  .

ب- أرسم  $(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  على المجال  $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$  في المعلم السابق .

(4) إستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $I$  ثم حدد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(d)$  .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال  $]\alpha; 1]$  فإن :  $f(x)$  ينتمي إلى المجال  $]\alpha; 1]$  .

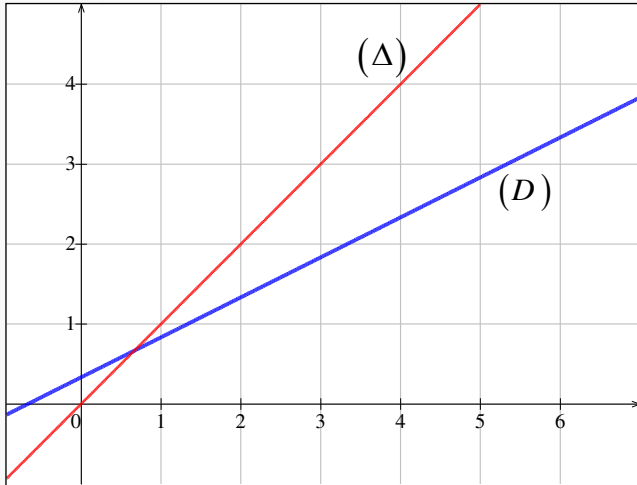
(III) نسمي  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يأتي :  $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$  .

(1) عين قيمة العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون :  $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$  .

(2) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (5ن)



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  معادلتيهما على الترتيب :  $y = x$  و  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

(1) لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$

بـ :  $u_0 = 6$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$u_0, u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  .

ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq \frac{2}{3}$  .

ب- إستنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة :  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $v_n$  ، واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  ، إستنتج المجموع  $S'_n$  حيث :  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

#### التمرين الثاني (4ن)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 6z + 18 = 0$  ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي .
- (2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  لواحقتها على الترتيب :
- $$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = 3 + 3i$$
- أ- بين أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز  $O$  .
- ب- عين زاوية الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  و يحول النقطة  $A$  إلى  $B$  .
- ج- بين أن النقط  $A$  ،  $O$  و  $C$  في استقامة وكذلك النقط  $B$  ،  $O$  و  $D$  .
- د- استنتج طبيعة الرباعي  $ABCD$  .

#### التمرين الثالث (4ن)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته:  $x - 2y + z + 3 = 0$  .
- (1) نذكر أن حامل محور الفواصل  $(O; \vec{i})$  يعرف بالجملة  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  .
- عين إحداثيات  $A$  نقطة تقاطع حامل  $(O; \vec{i})$  مع المستوي  $(P)$  .
- (2)  $B(0; 0; -3)$  و  $C(-1; -4; 2)$  .
- أ- تحقق أن النقطة  $B$  تنتمي إلى المستوي  $(P)$  .
- ب- أحسب الطول  $AB$  .
- ج- أحسب المسافة بين النقطة  $C$  و المستوي  $(P)$  .
- (3) أ- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  المار بالنقطة  $C$  و العمودي على المستوي  $(P)$  .
- ب- تحقق أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  .
- ج- أحسب مساحة المثلث  $ABC$  .

#### التمرين الرابع (7ن)

- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$
- نرمز بـ  $(C_f)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- (1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
- ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  وفسر هندسيا النتيجة .
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أ- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  معادلتيهما على الترتيب:  $y = x + 1$  و  $y = x$  .
- ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .
- (4) أثبت أن النقطة  $\omega(0; \frac{1}{2})$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .
- (5) أ- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $\ln 2 < \alpha < 1$  و  $-1.4 < \beta < -1.3$  .
- ب- هل توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  ؟
- ج- أرسم  $(\Delta)$  ،  $(\Delta')$  ثم المنحنى  $(C_f)$  .
- د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $(m-1)e^{-x} = m$  .

حل مقترح التمرين الأول

(1) كتابة  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي :

لدينا :  $z_A = 1 + i$  ومنه :  $|z_A| = \sqrt{2}$  .

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

إذن :  $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  .

لدينا :  $z_B = 3i$  ومنه :  $|z_B| = 3$  .

$$\text{وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin \theta_B = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

إذن :  $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$  .

(2) التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $z'$  بحيث :  $z' = 2iz + 6 + 3i$  .

الكتابة المركبة للتشابه المباشر  $S$  من الشكل :  $z' = \alpha z + \beta$  بحيث :  $\alpha = 2i$  و  $\beta = 6 + 3i$  .

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  :

نسبة التشابه المباشر  $S$  هي :  $k = |\alpha| = 2$  .

زاوية التشابه المباشر  $S$  هي :  $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  .

مركز التشابه المباشر  $S$  هو النقطة ذات اللاحقة  $\frac{\beta}{1-\alpha}$  .

لدينا :  $z_B = 3i$  ومنه النقطة  $B$  هي مركز التشابه المباشر  $S$  .  $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i$  .

ب- تعيين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$  .

لدينا  $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$  ومنه  $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$  ، إذن :  $z_C = 4 + 5i$  .

ج- طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\text{لدينا : النقطة } C \text{ صورة النقطة } A \text{ بالتشابه المباشر } S \text{ الذي مركزه } B \text{ ونسبته } 2 \text{ وهذا يعني : } \begin{cases} BC = 2BA \\ \overrightarrow{(BA, BC)} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ومنه المثلث  $ABC$  مثلث قائم في النقطة  $B$  .

(3) النقطة  $D$  مرجح الجملة  $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$  :

أ- تعيين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  :

لدينا :  $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2}$  ومنه  $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$  ، إذن :  $z_D = 5 + 3i$  .

ب- تعيين طبيعة الرباعي  $ABCD$  مع التبرير :

لدينا :  $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i$  و  $z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5 + 3i) = -1 + 2i$  .

ومنه الرباعي  $ABCD$  متوازي الأضلاع .

ولدينا مما سبق:  $ABC$  مثلث قائم و  $BC = 2BA$  وبالتالي الرباعي  $ABCD$  مستطيل.  
 (4) لتكن  $M$  نقطة من المستوي تختلف عن  $B$  وعن  $D$  لاحقتها  $z$  ولتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي يكون من أجلها  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $z_E = 6 + 3i$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ .  
 لدينا:  $6 = \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6 + 3i)}{5 + 3i - (6 + 3i)} = \frac{-6}{-1}$  ومنه العدد  $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$  حقيقي موجب تماما وبالتالي  $E \in (\Delta)$ .  
 ب-  $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB})$ .  
 العدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  حقيقي موجب تماما يكافئ  $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 0 + 2k\pi$  أي  $(\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$   
 وبالتالي المجموعة  $(\Delta)$  هي:  $(BD) - [BD]$  (المستقيم  $(BD)$  باستثناء القطعة  $[BD]$ )

### حل مقترح التمرين الثاني

$A$ ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث:  $A(1;1;0)$ ،  $B(2;1;1)$  و  $C(-1;2;-1)$ .  
 (1) أ- تبين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية:

لدينا:  $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$   
 ولدينا:  $\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$  وبالتالي  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية.

ب- تبين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي  $(ABC)$  هي:  $x + y - z - 2 = 0$

لدينا  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين، وبالتالي يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة المعطاة.

$$x_A + y_A - z_A - 2 = 1 + 1 - 0 - 2 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B + y_B - z_B - 2 = 2 + 1 - 1 - 2 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C + y_C - z_C - 2 = -1 + 2 - (-1) - 2 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  اللذين معادلتيهما على الترتيب:  $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ ،  $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$

والمستقيم  $(D)$  الذي يشمل النقطة  $F(0;4;3)$  و  $\vec{u}(-1;5;3)$  شعاع توجيه له.  
 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$ :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل: } (D) \text{ من الشكل: } (D) \text{ يشمل } F \text{ و } \vec{u}(-1;5;3) \text{ شعاع توجيه له، ومنه تمثيل وسيطي لـ } (D) \text{ من الشكل: } (D)$$

ب- التحقق أن تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هو المستقيم  $(D)$ :

$$\text{لدينا: } (D) \subset (P) \text{ لأن: } -t + 2(5t + 4) - 3(3t + 3) + 1 = 0$$

$$\text{و } (D) \subset (Q) \text{ لأن: } 2(-t) + (5t + 4) - (3t + 3) - 1 = 0$$

وبالتالي تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هو المستقيم  $(D)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right. \text{ كطريقة ثانية يمكن حل الجملة للحصول على التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع وهو } (D)$$

(3) تعيين تقاطع المستويات الثلاث  $(ABC)$ ،  $(P)$  و  $(Q)$ :

لدينا: المستويان  $(P)$  و  $(Q)$  متقاطعان وفق المستقيم  $(D)$  وبالتالي لدراسة تقاطع المستويات الثلاث  $(ABC)$ ،  $(P)$  و

$(Q)$  يكفي دراسة تقاطع المستقيم  $(D)$  مع المستوي  $(ABC)$ .

نحل الجملة : 
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$
 فنجد :  $t = 1$  وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيط نجد  $(-1; 9; 6)$  .  
ومنه المستويات الثلاث  $(ABC)$  ،  $(P)$  و  $(Q)$  تتقاطع في النقطة  $\Omega(-1; 9; 6)$  .

### حل مقترح التمرين الثالث

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $I = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right]$  بـ :  $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$  .

(1) حساب النهايات :

•  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (1 + \ln(2x - 1)) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(2x - 1)) = +\infty$

(2) تبين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ، ومن أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $f'(x) = \frac{2}{2x - 1}$  ،

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ،  $2x - 1 > 0$  أي  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |               |           |
|---------|---------------|-----------|
| $x$     | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |               | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$     | $+\infty$ |

(3) تعيين فاصلة النقطة من  $(C_f)$  التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم  $(d)$  ذي المعادلة  $y = x$  .

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة  $f'(x) = 1$  في  $I$  .

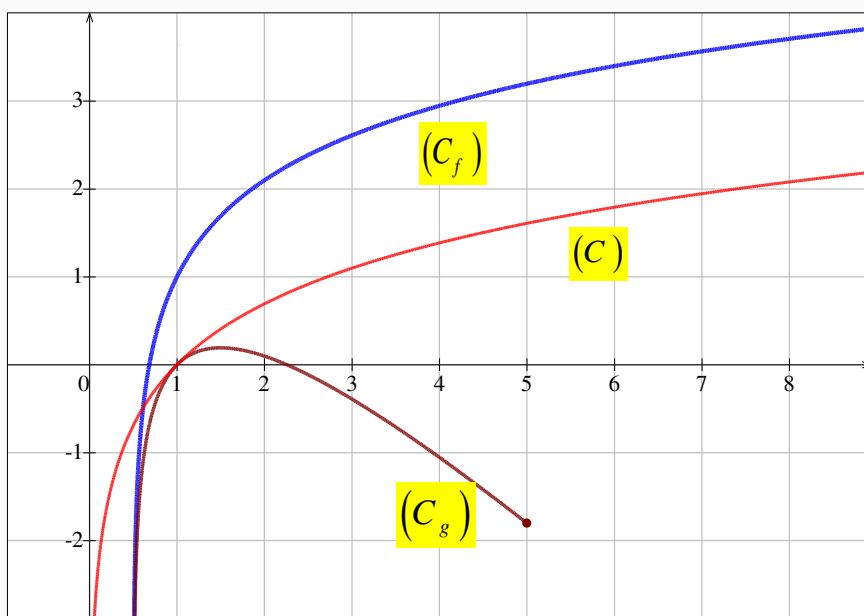
•  $f'(x) = 1$  تكافئ  $\frac{2}{2x - 1} = 1$  تكافئ  $2 = 2x - 1$  أي  $x = \frac{3}{2}$  .

(4) أ- من أجل كل  $x$  من  $I$  :  $f(x) = 1 + \ln(2x - 1) = 1 + \ln\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$  ، ومنه :  $a = -\frac{1}{2}$

و  $b = 1 + \ln 2$  .

ب- لدينا :  $f(x) = h(x + a) + b$  حيث :  $h(x) = \ln x$  ومنه  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  أي  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \ln 2 \end{smallmatrix}\right)$  .



(II) الدالة العددية المعرفة على المجال  $I$  بـ :  $g(x) = f(x) - x$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (1 - x + \ln(2x - 1)) = -\infty$$

$$\left( \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 : \text{تذكر أن} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) \left[ \frac{1-x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right] = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $I$  :

$$g'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1} = \frac{-2x+3}{2x-1} \quad \text{و} \quad \text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على } I,$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ،  $2x-1 > 0$  ، وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-2x+3$  .

إشارة  $g'(x)$  :

|         |               |               |           |
|---------|---------------|---------------|-----------|
| $x$     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |               | +             | 0 -       |

الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  ومتناقصة على المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |               |                        |           |
|---------|---------------|------------------------|-----------|
| $x$     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$          | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |               | +                      | 0 -       |
| $g(x)$  |               | $-\frac{1}{2} + \ln 2$ | $-\infty$ |

(3) أ- لدينا :  $g(1) = 0$  .

الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  و  $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19$  ، ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

التحقق أن  $2 < \alpha < 3$  :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} g(2) \approx 0,09 \\ g(3) \approx -0,39 \end{cases} \text{ أي : } g(2) \times g(3) < 0 \text{ ومنه } 2 < \alpha < 3.$$

ب- رسم المنحنى  $(C_g)$  : أنظر الشكل السابق.

|        |               |   |          |   |           |
|--------|---------------|---|----------|---|-----------|
| $x$    | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\alpha$ |   | $+\infty$ |
| $g(x)$ |               | - | 0        | + | 0         |

(4) إشارة  $g(x)$  :

وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(d)$  :

لدينا :  $f(x) - y = f(x) - x = g(x)$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $g(x)$  .

إذن : من أجل  $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[ \cup ]\alpha; +\infty[$  ، يكون  $(C_f)$  واقعا أسفل  $(d)$  .

من أجل  $x \in ]1; \alpha[$  ، يكون  $(C_f)$  واقعا أعلى من  $(d)$  .

$(C_f)$  يقطع  $(d)$  في النقطتين  $A(1;1)$  و  $B(\alpha; \alpha)$  .

(5) الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]1; \alpha[$  ومنه : من أجل كل  $x \in ]1; \alpha[$  فإن :  $f(x) \in ]f(1); f(\alpha)[$  .

ولدينا :  $f(1) = 1$  و  $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$  .

إذن : من أجل كل  $x \in ]1; \alpha[$  فإن :  $f(x) \in ]1; \alpha[$  .

(III) نسمي  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يأتي :  $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$  .

(1) تعيين قيمة العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون :  $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$  .

$$\text{لدينا : } u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \ln\left[2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right] = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\text{ومنه : } u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2 \text{ يعني } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 3^2 - \ln 2^3 = \ln 9 - \ln 8 = \ln \frac{9}{8} \text{ أي : } n = 8 .$$

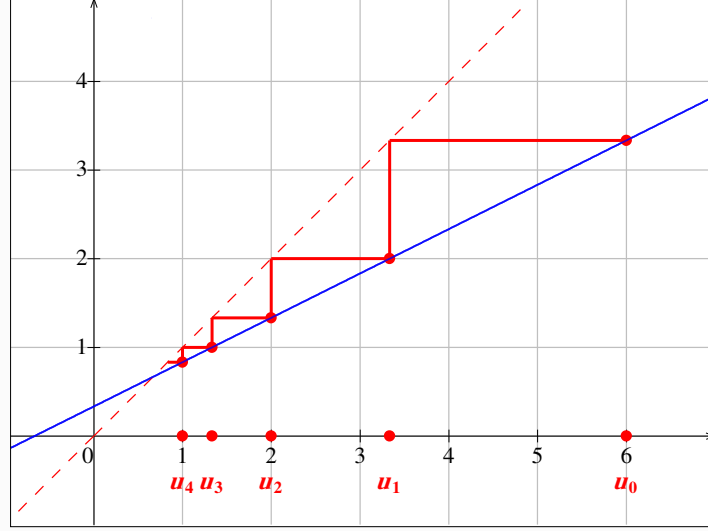
(2) حساب ، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  بحيث :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

$$\text{لدينا : من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* , u_n = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\text{ومنه : } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\text{أي : } S_n = (1 + 1 + \dots + 1) + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n + \ln\left(\frac{2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times \dots \times n}\right) = n + \ln(n+1)$$

(1) أ- الرسم :  
 $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$  ،  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :



ب- تعيين إحداثيي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(D)$  :

نحل المعادلة :  $f(x) = x$

$$f(x) = x \text{ تكافئ } \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = x \text{ تكافئ } \frac{1}{2}x - x = -\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3} \text{ تكافئ } -\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3} \text{ تكافئ } x = \frac{2}{3}$$

وبالتالي المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(D)$  يتقاطعان في النقطة  $A\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

ج- التخمين :

نلاحظ من الرسم أن :  $u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < u_0$

المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq \frac{2}{3}$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq \frac{2}{3}$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$ ، لدينا  $u_0 = 6$  ومنه  $u_0 \geq \frac{2}{3}$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_n \geq \frac{2}{3}$ ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$ .

لدينا حسب الفرض  $u_n \geq \frac{2}{3}$  ومنه  $\frac{1}{2}u_n \geq \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  ومنه  $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  أي  $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq \frac{2}{3}$ .

ب- اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right), n \text{ عدد طبيعي}$$

و لدينا مما سبق أن:  $u_n \geq \frac{2}{3}$  ومنه  $u_n - \frac{2}{3} \geq 0$  . إذن  $-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) \leq 0$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ، وعليه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ- إثبات أن  $(v_n)$  متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$

ومن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  . وحدها الأول:  $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

ب- كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :  $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

ج- المجاميع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{32}{3} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + \dots + v_n + \frac{2}{3} = S_n + \frac{2}{3}(n+1)$$

### حل مقترح التمرين الثاني

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 6z + 18 = 0$

لدينا:  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$$

كتابة العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي :

لدينا:  $z_1 = 3+3i$  ومنه:  $|z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\text{وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

إذن:  $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا:  $z_2 = \overline{z_1} = 3-3i$  ومنه:  $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 3+3i$$

أ- تبين أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز  $O$  :

لدينا:  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$  أي:  $OA = OB = OC = OD$  ومنه النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى

الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $3\sqrt{2}$ .

بـ. تعيين زاوية الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  ويحول النقطة  $A$  إلى  $B$  :

$$k \in \mathbb{Z}, \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z_A}}{z_A}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

جـ. إثبات أن النقط  $A$  ،  $O$  و  $C$  في استقامة وكذلك النقط  $B$  ،  $O$  و  $D$  .

$$\text{يكفي إثبات أن كلا من } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} \text{ و } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} \text{ حقيقي .}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} = \frac{z_B}{z_D} = -1 \text{ و } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \frac{z_A}{z_C} = -1$$

( يمكن استخدام كون  $z_A + z_C = 0$  و  $z_B + z_D = 0$  وبالتالي  $O$  منتصف كل من  $[AC]$  و  $[BD]$  )

دـ. طبيعة الرباعي  $ABCD$  :

الرباعي  $ABCD$  قطراه متناصفان ومتقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، ولدينا  $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$  ومنه  $ABCD$  مربع .

### حل مقترح التمرين الثالث

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته :  $x - 2y + z + 3 = 0$

$$(1) \text{ نذكر أن حامل محور الفواصل } (O; \vec{i}) \text{ يعرف بالجملة } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{إحداثيات } A \text{ نقطة تقاطع حامل } (O; \vec{i}) \text{ مع المستوي } (P) \text{ هي حل الجملة : } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \text{ أي : } A(-3; 0; 0)$$

(2)  $B(0; 0; -3)$  و  $C(-1; -4; 2)$  .

أ. التحقق أن النقطة  $B$  تنتمي إلى المستوي  $(P)$  :

$$\text{لدينا : } B \in (P) \text{ ومنه } x_B - 2y_B + z_B + 3 = 0 + 0 - 3 + 3 = 0$$

بـ. حساب الطول  $AB$  :

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (0-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

جـ. حساب المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي  $(P)$  :

$$d(C; (P)) = \frac{|-1+8+2+3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(3) أ. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  المار بالنقطة  $C$  والعمودي على المستوي  $(P)$  :

لدينا  $(\Delta)$  يعامد  $(P)$  و  $\vec{n}(1; -2; 1)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  ومنه شعاع  $\vec{n}$  توجيه لـ  $(\Delta)$  وبالتالي تمثيل

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل :}$$

بـ. التحقق أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

بتعويض إحداثيات النقطة  $A$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(\Delta)$  نجد :  $t = -2$  ، ومنه  $A \in (\Delta)$  .

جـ. حساب مساحة المثلث  $ABC$  :

المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  لأن :  $A \in (\Delta)$  ،  $C \in (\Delta)$  ،  $B \in (P)$  و  $(\Delta) \perp (P)$  ،

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3} \text{ ua}$$

الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

(1) أـ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

بـ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم :  $f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | 0         | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

(3) أـ لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

بـ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $1 - e^x$ .

| $x$          | $-\infty$                  | 0 | $+\infty$                  |
|--------------|----------------------------|---|----------------------------|
| $f(x) - y$   | +                          |   | -                          |
| الوضع النسبي | ( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ ) |   | ( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ ) |

• دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta')$  :

لدينا :  $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $1 - e^x$ .

| $x$          | $-\infty$                   | 0 | $+\infty$                   |
|--------------|-----------------------------|---|-----------------------------|
| $f(x) - y$   | +                           |   | -                           |
| الوضع النسبي | ( $C_f$ ) فوق ( $\Delta'$ ) |   | ( $C_f$ ) تحت ( $\Delta'$ ) |

(4) إثبات أن النقطة  $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  :

لدينا : من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  ،  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{-x} - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$$

ومنه النقطة  $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .

(5) أـ تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $\ln 2 < \alpha < 1$  و  $-1.4 < \beta < -1.3$  .

• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$  و  $]\ln 2; 1[$  و  $f(1) \approx 0,41$   
 $f(\ln 2) \approx -0,31$

أي  $f(1) \times f(\ln 2) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  ، حيث  $\ln 2 < \alpha < 1$  .

• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 0[$  و  $]-1,4; -1,3[$  و  $f(-1,3) \approx 0,07$   
 $f(-1,4) \approx -0,07$

أي  $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-\infty; 0[$  حلا وحيدا  $\beta$  ، حيث  $-1.4 < \beta < -1.3$  .

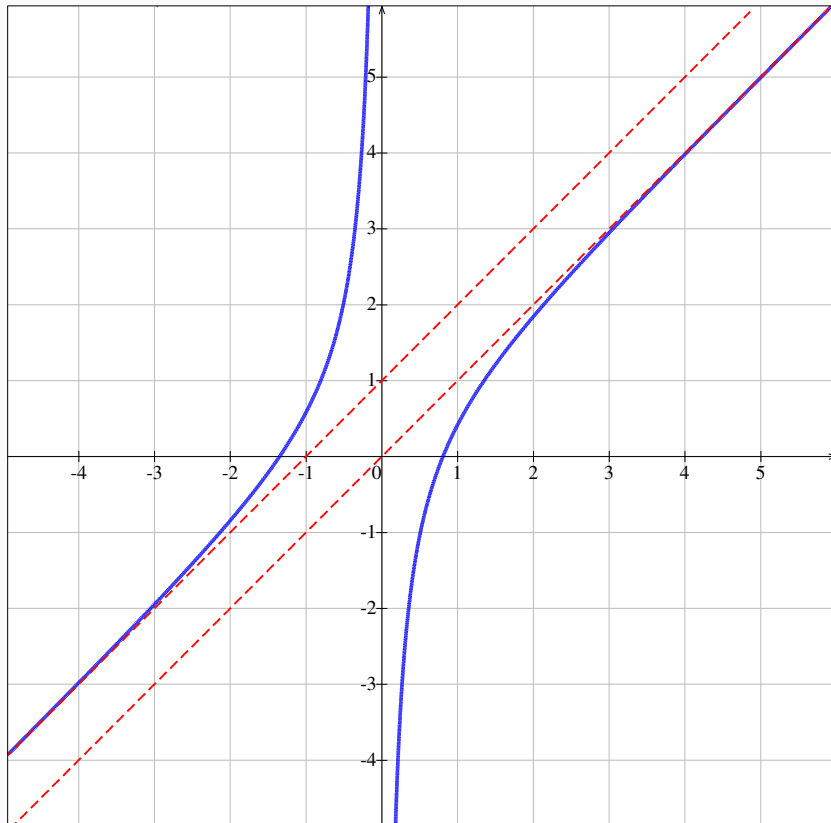
بـ دراسة وجود مماسات للمنحنى  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  .

لنحل في  $\mathbb{R}^*$  المعادلة :  $f'(x) = 1$  .

لدينا :  $f'(x) = 1$  تكافئ  $1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$  تكافئ  $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$  أي  $e^x = 0$  وهذا مستحيل و بالتالي المعادلة

ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  .

جـ- الرسم :



لدينا :  $(m-1)e^{-x} = m$  تكافئ  $m-1 = me^x$  تكافئ  $m = -\frac{1}{e^x - 1}$  تكافئ  $m + x = x - \frac{1}{e^x - 1}$

تكافئ  $f(x) = x + m$  ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = x + m$

إذا كان  $m \in ]-\infty; 0[$  فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان  $m \in [0; 1]$  فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان  $m \in ]1; +\infty[$  فإن للمعادلة حل واحد سالب .

الموضوع الأول

التمرين الأول (3ن)

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n + 1$ .

و ( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ .

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.  
(1) المتتالية ( $v_n$ ) : أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.

(2) نهاية المتتالية ( $u_n$ ) هي : أ-  $+\infty$  . ب-  $-\frac{1}{2}$  . ج-  $-\infty$  .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$ .

أ-  $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$  . ب-  $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$  . ج-  $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$  .

التمرين الثاني (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ )، المستوى ( $P$ ) الذي يشمل النقطة  $A(1; -2; 1)$ .

و ( $\vec{n}(-2; 1; 5)$  شعاع ناظمي له، وليكن ( $Q$ ) المستوى ذو المعادلة  $x + 2y - 7 = 0$ .

(1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي ( $P$ ).

(2) أتحقق أن النقطة  $B(-1; 4; -1)$  مشتركة بين المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ).

ب- بين أن المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ) متقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

(3) لتكن النقطة  $C(5; -2; -1)$ .

أ- أحسب المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي ( $P$ ) ثم المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي ( $Q$ ).

ب- أثبت أن المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ) متعامدان.

ج- استنتج المسافة بين النقطة  $C$  والمستقيم ( $\Delta$ ).

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{u}, \vec{v}$ )، النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  لواقعها على الترتيب :

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i \quad , \quad z_A = -i$$

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

ب- عين طوليلة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(2) نعتبر التحويل النقطي  $T$  في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات الاحقة  $z'$  بحيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل  $T$  محددا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$ .

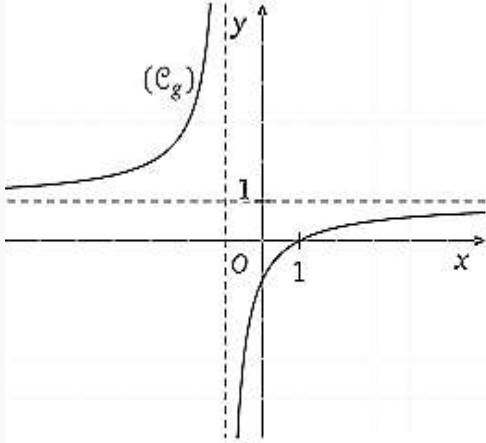
(3) لتكن  $D$  ذات اللاحقة  $z_D = -6 + 2i$

أبين أن النقط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامية.

بـ عين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  و يحول النقطة  $C$  إلى  $D$  .

جـ عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $D$  .

### التمرين الرابع (7ن)



(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ :  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الشكل المقابل)

بقراءة بيانية :

أـ شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  .

بـ حل بيانيا المتراجحة  $g(x) > 0$  .

جـ عين بيانيا قيم  $x$  التي يكون من أجلها  $0 < g(x) < 1$

(II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$  .

بـ أحسب  $f'(x)$  و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(3) أـ باستعمال الجزء (I) السؤال جـ ، عين إشارة العبارة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجال  $]1; +\infty[$  .

بـ  $\alpha$  عدد حقيقي . بين أن الدالة  $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  على المجال  $]\alpha; +\infty[$  .

جـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$  ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4ن)

$\alpha$  عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$  .

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$  .

(1) أـ بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\alpha$  .

بـ أكتب بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ، عبارة  $v_n$  ثم استنتج بدلالة  $n$  و  $\alpha$  ، عبارة  $u_n$  .

جـ عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  التي تكون من أجلها المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(2) نضع :  $\alpha = \frac{3}{2}$  .

أحسب بدلالة  $n$  ، المجموعين  $S_n$  و  $T_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

### التمرين الثاني (4ن)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقها على الترتيب :

$$z_C = 4i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i \quad , \quad z_A = 3 - 2i$$

(1) أـ علم النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

بـ ما هي طبيعة الرباعي  $OABC$  ؟ علل إجابتك .

جـ عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$  .

(2) عين ثم أنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق :  $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

(3) أـ حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 6z + 13 = 0$  .

نسمي  $z_1$  ،  $z_0$  حلي هذه المعادلة .

بـ لتكن  $M$  نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب  $z$  .

ـ عين مجموعة النقطة  $M$  من المستوى التي تحقق :  $|z - z_0| = |z - z_1|$

### التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط  $A(0; 1; 5)$  ،  $B(2; 1; 7)$  و  $C(3; -3; 6)$  .

(1) أـ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $B$  و  $\vec{u}(1; -4; -1)$  شعاع توجيه له .

بـ تحقق أن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

جـ بين أن الشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  متعامدان .

د ـ استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

(2) نعتبر النقطة  $M(2+t; 1-4t; 7-t)$  حيث  $t$  عدد حقيقي ، ولتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(t) = AM$  .

أـ أكتب عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$  .

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$  ،  $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$  .

جـ استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي من أجلها تكون المسافة  $AM$  أصغرها يمكن .

ـ قارن بين القيمة الصغرى للدالة  $h$  ، والمسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

### التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = e^x - ex - 1$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

بـ أحسب  $f'(x)$  ، ثم أدرس إشارتها .

جـ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(2) أـ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $(-\infty)$  .

بـ أكتب معادلة للمستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  ، تقبل في المجال  $]1, 75; 1, 76[$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

دـ أرسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; 2]$  .

(3) أ- أحسب بدلالة  $\alpha$  ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما:  $x = \alpha$  ؛  $x = 0$  .

ب- أثبت أن:  $A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$  (حيث  $ua$  هي وحدة المساحات)

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  .

و  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n + \frac{1}{2}$  .

إختيار الإجابة مع التبرير:

(1) المتتالية  $(v_n)$  : ————— بـ هندسية .  
التبرير:

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$  ،

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  .

(2) نهاية المتتالية  $(u_n)$  هي : ————— جـ -  $-\infty$  .  
التبرير:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = v_n - \frac{1}{2}$  ، ومنه  $u_n = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  لأن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}] = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$  ،

التبرير:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}] = -\frac{1}{2} [3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n] = -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

### حل مقترح التمرين الثاني

(1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  :

لدينا:  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  ومنه معادلة  $(P)$  من الشكل  $-2x + y + 5z + d = 0$  .

و  $A \in (P)$  يعني  $-2 - 2 + 5 + d = 0$  أي:  $d = -1$  وعليه معادلة للمستوي  $(P)$  من الشكل  $-2x + y + 5z - 1 = 0$  .

(2) أ. التحقق أن النقطة  $B(-1; 4; -1)$  مشتركة بين المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  :

لدينا :  $-2x_B + y_B + 5z_B - 1 = -2 \times (-1) + 4 + 5 \times (-1) - 1 = 0$  ومنه  $B \in (P)$

ولدينا :  $x_B + 2y_B - 7 = -1 + 2 \times 4 - 7 = 0$  ومنه  $B \in (Q)$

إذن :  $B \in (P) \cap (Q)$  .

بـ. تبين أن المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  متقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا :  $\vec{n}(-2;1;5)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\vec{n}'(1;2;0)$  شعاع ناظمي لـ  $(Q)$  .

$\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  .

$$\text{وهذه } \begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{و منه بوضع } z = t \text{ نجد } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بـ :}$$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  .

(3) لتكن النقطة  $C(5; -2; -1)$  .

أ- المسافة بين  $C$  و  $(P)$  :

$$d_1 = d(C, (P)) = \frac{|-2x_C + y_C + 5z_C - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{|-2 \times 5 - 2 + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{30}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d_2 = d(C, (Q)) = \frac{|x_C + 2y_C - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 2 \times (-2) - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} : (Q) \text{ و } C \text{ المسافة بين}$$

بـ. إثبات أن المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  متعامدان :

لدينا :  $\vec{n}(-2;1;5)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\vec{n}'(1;2;0)$  شعاع ناظمي لـ  $(Q)$  .

و  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = 0$  و منه  $\vec{n}$  يعامد  $\vec{n}'$  وبالتالي المستويان  $(P)$  و  $(Q)$  متعامدان .

جـ. استنتاج المسافة بين النقطة  $C$  والمستقيم  $(\Delta)$  :

$$d(C, (\Delta)) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i \quad , \quad z_A = -i$$

(1) أ- كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + i - (-i)}{2 + 3i - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{20i}{20} = i$$

ب- طولية العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعمدة له :

$$\begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ و منه}$$

طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{أي : أي} \quad \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ \left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

ومنه المثلث  $ABC$  متساوي الساقين وقائم في  $A$  .

(2)  $T$  التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  بحيث:  $z' = iz - 1 - i$  .  
أ- تعيين طبيعة التحويل  $T$  مع تحديد عناصره المميزة :  
الكتابة المركبة للتحويل النقطي  $T$  من الشكل:  $z' = \alpha z + \beta$  بحيث:  $\alpha = i$  و  $\beta = -1 - i$  .  
لدينا:  $\alpha \in \mathbb{C}$  و  $|\alpha| = |i| = 1$  ومنه التحويل  $T$  هو دوران .

زاوية للدوران  $T$  هي:  $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  .

مركز الدوران  $T$  هو النقطة ذات اللاحقة  $\frac{\beta}{1-\alpha}$  .

لدينا:  $z_A = -i$  ومنه النقطة  $A$  هي مركز الدوران  $T$  .  
 $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i = z_A$

ب- صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$  :

نسمي النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$  ومنه  $z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = i - 4$  أي:  $z_{B'} = z_C$  .

إذن صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$  هي النقطة  $C$  .

(3) لتكن  $D$  ذات اللاحقة  $z_D = -6 + 2i$

أ- تبين أن النقط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامة:

يكفي إثبات أن  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$  حقيقي .

لدينا:  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-4+i - (-i)}{-6+2i - (-i)} = \frac{-4+2i}{-6+3i} = \frac{2(-2+i)}{3(-2+i)} = \frac{2}{3}$  ومنه النقط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامة .

ب- تعيين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  و يحول النقطة  $C$  إلى  $D$  :

العلاقة المركبة للتحاكي  $h$  من الشكل:  $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$  بحيث:  $k$  هي نسبة التحاكي  $h$  .

لدينا:  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$  ومنه نسبة التحاكي  $h$  هي:  $k = \frac{3}{2}$  .

ج- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $D$  .

العلاقة المركبة للتشابه المباشر  $S$  من الشكل:  $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$  :

لدينا:  $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+2i - (-i)}{2+3i - (-i)} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{3i(2i+1)}{2(1+2i)} = \frac{3}{2}i$  ومنه:

نسبة التشابه المباشر  $S$  هي:  $k = |a| = \frac{3}{2}$  .

زاوية التشابه المباشر  $S$  هي:  $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  .

( يمكن إثبات أن:  $S = h \circ T$  )

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ب:  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

أ- جدول تغيرات الدالة  $g$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +         | +         |
| $g(x)$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

ب- حل المتراجحة  $g(x) > 0$  بيانيا :  $g(x) > 0$  تكافئ  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  .

ج- تعيين قيم  $x$  التي يكون من أجلها  $0 < g(x) < 1$  :

$$. x \in ]1; +\infty[ \text{ تكافئ } 0 < g(x) < 1$$

$$(II) \text{ الدالة } f \text{ معرفة على المجال } ]1; +\infty[ \text{ بـ: } f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = 1$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$(2) \text{ أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } ]1; +\infty[ \text{ يكون: } g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]1; +\infty[$ :

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب  $f'(x)$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]1; +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)^2} \left( \frac{2x}{x-1} \right) = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]1; +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $]1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  |   | 1         |

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج، تعيين إشارة العبارة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

لدينا حسب الجزء (I) السؤال ج: من أجل كل  $x \in ]1; +\infty[$ ، فإن  $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$  ومنه  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ .

ب-  $\alpha$  عدد حقيقي.

تبين أن الدالة  $h$  بحيث  $h(x) = (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $\ln(x - \alpha)$  على  $]\alpha; +\infty[$ .

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]\alpha; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]\alpha; +\infty[$ :

$$h'(x) = 1 \times \ln(x - \alpha) + \frac{1}{x - \alpha} \times (x - \alpha) - 1 = \ln(x - \alpha)$$

جـ - التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$  ،  
 تعيين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$  ،

وبالتالي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$  من الشكل :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x] \\ = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$

## تصحيح مقترح للموضوع الثاني

### حل مقترح التمرين الأول

$\alpha$  عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$  .

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب:  $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$  .

(1) أ- تبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \alpha \left( u_n + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \alpha v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \alpha$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$  .

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  :

$$v_n = \left( \frac{6\alpha-5}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n \text{ ومنه } v_n = v_0 \times q^n , n \text{ عدد طبيعي}$$

• كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  :

$$u_n = \left( \frac{6\alpha-5}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n - \frac{1}{\alpha-1} \text{ ومنه } u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1} , n \text{ عدد طبيعي}$$

ج - تعيين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  التي تكون من أجلها المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

تكون المتتالية  $(u_n)$  متقاربة إذا وفقط إذا كان  $\alpha \in ]0; 1[$  ، لأن في هذه الحالة يكون  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$

$$\text{ويكون } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{\alpha-1}$$

(2) من أجل :  $\alpha = \frac{3}{2}$  يكون أساس المتتالية  $(v_n)$  هو  $q = \frac{3}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = 8$  .

- حساب المجموعين  $T_n$  و  $S_n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 8 \times \left( \frac{1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) = 16 \times \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

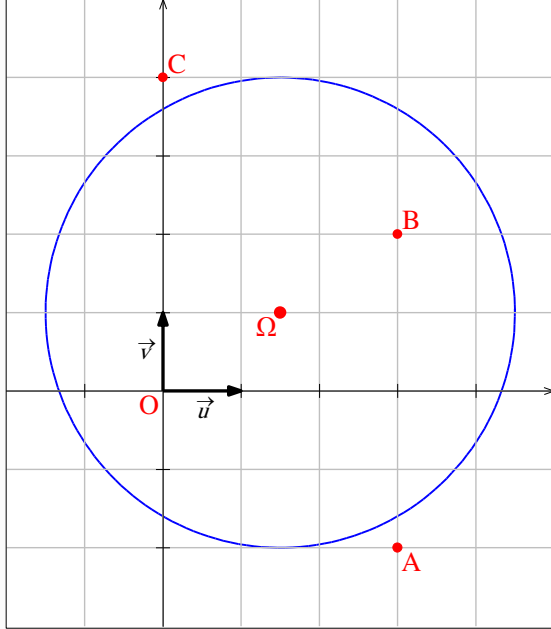
$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = v_n - 2, \text{ ومنه}$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2) = S_n - 2(n+1) = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$$z_C = 4i \text{ و } z_B = 3 + 2i, \quad z_A = 3 - 2i$$

(1) أ. تعلیم النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  :



بـ. طبيعة الرباعي  $OABC$  :

لدينا :  $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (3 - 2i) = 4i$  و  $z_{\overline{OC}} = z_C - z_O = 4i$  أي :  $z_{\overline{OC}} = z_{\overline{AB}}$  ومنه  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$  وبالتالي  $OABC$  متوازي أضلاع.

جـ. تعيين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$  :

النقطة  $\Omega$  هي مرجح الجملة  $\{(O, 1); (A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$  ومنه :  $z_{\Omega} = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$  أي :  $z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i$ .

(2) تعيين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق :  $\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 12$

$\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 12$  تكافئ  $\| 4\overrightarrow{M\Omega} \| = 12$  أي  $M\Omega = 3$  وبالتالي  $(E)$  هي الدائرة التي مركزها

النقطة  $\Omega$  ونصف قطرها 3 .

الرسم : أنظر الشكل .

(3) أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 6z + 13 = 0$  .

لدينا :  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i = z_B \quad \text{و} \quad z_0 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i = z_A$$

بـ. تعيين مجموعة النقطة  $M$  من المستوي التي تحقق :  $|z - z_0| = |z - z_1|$

معناه  $AM = BM$  وبالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القاطعة  $[AB]$  . (محور الفواصل)

### حل مقترح التمرين الثالث

أ، B و C النقط من الفضاء بحيث:  $A(0;1;5)$ ،  $B(2;1;7)$  و  $C(3;-3;6)$ .

(1) أكتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$ :

لدينا:  $(\Delta)$  يشمل B و  $\vec{u}(1;-4;-1)$  شعاع توجيه له ومنه تمثيل وسيطي لـ  $(\Delta)$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 7 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل}$$

بـ التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ :

بتعويض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ  $(\Delta)$  نجد  $t = 1$  ومنه  $C \in (\Delta)$ .

جـ تبين أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان:

لدينا:  $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$  و  $\overrightarrow{AB}(1;-4;-1)$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 1 + 0 \times (-4) + 2 \times (-1) = 0$  ومنه  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان.

دـ استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم  $(\Delta)$ :

لدينا: B هي المسقط العمودي لـ A على المستقيم  $(\Delta)$  ومنه  $d(A, (\Delta)) = AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

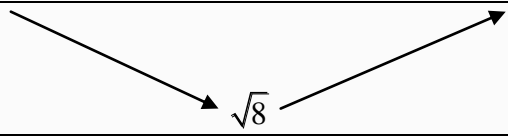
(2) نعتبر النقطة  $M(2+t; 1-4t; 7-t)$  حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(t) = AM$ .

أـ كتابة عبارة  $h(t)$  بدلالة t:  $h(t) = AM = \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{18t^2 + 8}$

بـ الدالة h قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي t،  $h'(t) = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2 + 8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$

جـ استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جدول تغيرات الدالة h:

| x       | $-\infty$                                                                            | 0     | $+\infty$ |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|
| $h'(x)$ |                                                                                      | - 0 + |           |
| $h(x)$  |  |       |           |

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل  $t = 0$  و  $AM = \sqrt{h(0)} = \sqrt{8}$ .

ـ المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h، والمسافة بين النقطة A والمستقيم  $(\Delta)$ .

$$d(A, (\Delta)) = h(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

### حل مقترح التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^x - ex - 1$ .

(1) أـ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

بـ حساب  $f'(x)$ :

الدالة f قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي x:  $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$  تكافئ  $e^x - e = 0$  تكافئ  $e^x = e$  تكافئ  $x = 1$ .

من أجل  $x \in ]-\infty; 1]$ ، يكون  $e^x \leq e$  أي  $f'(x) \leq 0$  وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال  $]-\infty; 1]$ .

من أجل  $x \in [1; +\infty[$ ، يكون  $e^x \geq e$  أي  $f'(x) \geq 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .  
جـ - جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |   |           |           |
|---------|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | - | 0         | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | -1        | $+\infty$ |

أ- لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

ب- كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0:

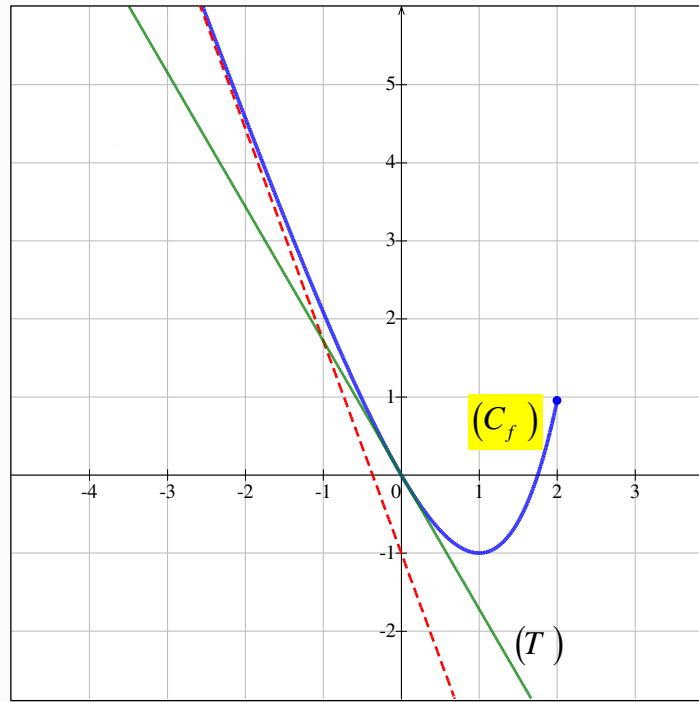
لدينا:  $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  ومنه  $(T): y = (1 - e)x$

جـ - تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1, 75; 1, 76[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  و  $[1, 75; 1, 76[ \subset [1; +\infty[$  و  $\begin{cases} f(1,75) \approx -0,002 \\ f(1,76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي  $f(1,75) \times f(1,76) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,75 < \alpha < 1,76$ .

د- الرسم:



(3) أ- حساب، بدلالة  $\alpha$ ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما:  $x = \alpha$  و  $x = 0$ .

$$A(\alpha) = -\int_0^\alpha f(x) dx = -\int_0^\alpha (e^x - ex - 1) dx = -\left[ e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^\alpha = 1 - \left( e^\alpha - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{ب- إثبات أن:}$$

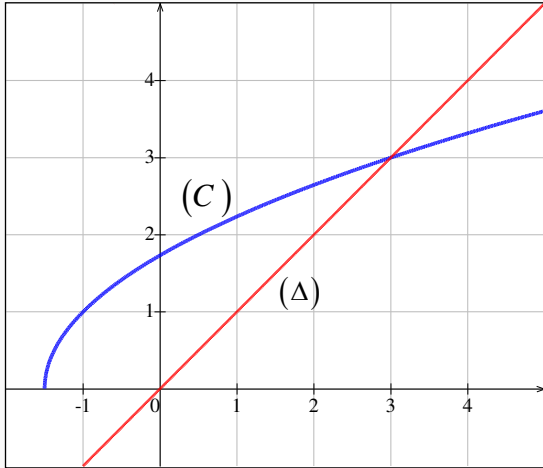
لدينا:  $f(\alpha) = 0$  ومنه  $e^\alpha - e\alpha - 1 = 0$  أي  $e^\alpha = e\alpha + 1$  وبالتالي:

$$A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بعدها الأول  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$  .  
 (1) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$  كما يلي :  $h(x) = \sqrt{2x + 3}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني



و  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).

أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية  $u_0, u_1, u_2, u_3$  (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير  $(u_n)$  وتقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 3$

(3) أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

ب- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

التمرين الثاني (4ن)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$  (حيث  $z \neq 2 - 3i$ )  
 - حل في  $\mathbb{C}$  هذه المعادلة .

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .  $A$  ،  $B$  نقطتان لاحقتاهما على الترتيب :  $z_A$  و  $z_B$  حيث :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

- تحقق أن  $A$  و  $B$  تنتمي إلى دائرة مركزها  $O$  يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي لاحقتها  $z$  ،  $(z \neq 2 - 3i)$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $z'$  حيث :  $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$

النقط  $C$  ،  $D$  ،  $E$  لواحقها على الترتيب :  $z_C = -2i$  ،  $z_D = 2 - 3i$  و  $z_E = 3i$  و  $(\Delta)$  محور القطعة  $[CD]$  .  
 أ- عبر عن المسافة  $OM'$  بدلالة المسافتين  $CM$  و  $DM$  .

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة  $M$  من  $(\Delta)$  فإن النقطة  $M'$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها  
 تحقق أن  $E$  تنتمي إلى  $(\gamma)$  .

التمرين الثالث (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر المستوي  $(P)$  ذا المعادلة :  $14x + 16y + 13z - 47 = 0$  ،

والنقط  $A(1; -2; 5)$  ،  $B(2; 2; -1)$  و  $C(-1; 3; 1)$  .

(1) أ- تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة .

ب- بين أن المستوي  $(ABC)$  هو  $(P)$  .

(2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$  .

(3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة [AB].

ب- تحقق أن النقطة  $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$  تنتمي إلى (Q).

ج- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

### التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 0]$  كما يلي:  $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 0]$ ،  $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$ .

استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته:  $y = x + 5$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) عند  $-\infty$ .

ب- أدرس وضع المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ ).

(4) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $-3.5 < \alpha < -3.4$  و  $-1.1 < \beta < -1$ .

(5) أنشئ المنحنى ( $C_f$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ).

(6) أ- نعتبر النقطتين  $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$  و  $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ .

بين أن  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$  معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى ( $C_f$ ) في نقطة  $M_0$  يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 0]$  كما يلي:  $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$ .

بين أن  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0]$ .

### الموضوع الثاني

### التمرين الأول (5,4ن)

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = \frac{13}{4}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$ .

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $3 < u_n < 4$ .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$ . استنتج أن ( $u_n$ ) متزايدة تماماً.

(3) برز لماذا ( $u_n$ ) متقاربة.

(4) المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \ln(u_n - 3)$ .

أبرهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلاماً من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$ .

أكتب  $P_n$  بدلالة  $n$  ، ثم بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$ .

#### التمرين الثاني (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(-1; 0; 1)$  ،  $B(2; 1; 0)$  و  $C(1; -1; 0)$  .

(1) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .

(2) بين أن :  $2x - y + 5z - 3 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .

(3)  $D(2; -1; 3)$  و  $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$  نقطتان من الفضاء حيث :

أ- تحقق أن النقطة  $D$  لا تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$  .

ب- بين أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$  .

جـ- استنتج أن المستويين  $(ADH)$  و  $(ABC)$  متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما .

#### التمرين الثالث (4,5ن)

(1)  $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$  كثير حدود للمتغير المركب  $z$  حيث :

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود  $P(z)$  .

ب- حدد العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$  .

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $P(z) = 0$  .

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .  $A$  ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب

$$z_A = 6 \quad , \quad z_B = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

أ- أكتب كلا من  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب- أكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$  على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي.

جـ- استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ، نسبته  $\sqrt{3}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه  $S$  .

ب- عين  $z_A$  لاحقة النقطة  $A'$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه  $S$  .

جـ- بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $A'$  في إستقامة.

#### التمرين الرابع (7ن)

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 - xe^x$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  ، تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1; +\infty[$

ب- تحقق أن  $0.5 < \alpha < 0.6$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 2]$  كما يلي :  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) لتكن  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2]$  فإن :  $f'(x) = -g(x)$  ، استنتج إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) بين أن  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$  ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  ( تدور النتائج إلى  $10^{-2}$  )

(4) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(5) أ- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-1.6 < x_1 < -1.5$  و  $1.5 < x_2 < 1.6$  . ب- أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

(6) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = (ax + b)e^x$  :

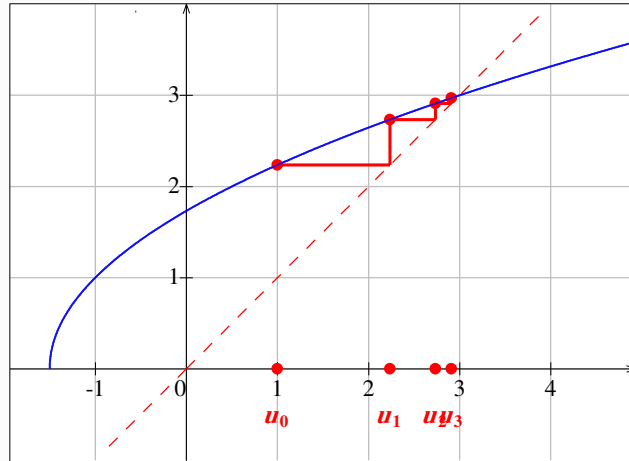
أ- عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $xe^x \mapsto x$  على  $\mathbb{R}$  .  
ب- استنتج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

(1) الرسم :



ب- التخمين :

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومتقاربة نحو 3.

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 3$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 3$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 1$  ومنه  $0 < u_0 < 3$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 < u_n < 3$  ، و نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 < u_{n+1} < 3$ .

لدينا حسب الفرض  $0 < u_n < 3$  ومنه  $0 < 2u_n < 6$  ومنه  $3 < 2u_n + 3 < 9$  ومنه  $\sqrt{3} < \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9}$

أي  $0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < u_n < 3$  .

(3) أدراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - u_n)(\sqrt{2u_n + 3} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \text{ ومنه}$$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3 - u_n > 0$  و  $1 + u_n > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .  
بـ استنتاج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .  
حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

نضع :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  إذن  $h(l) = l$  .

$$h(l) = l \text{ تكافئ } \sqrt{2l + 3} = l \text{ تكافئ } \begin{cases} 2l + 3 = l^2 \\ l > 0 \end{cases} \text{ تكافئ } l^2 - 2l - 3 = 0$$

المعادلة لها حلين هما  $l_1 = 3$  و  $l_2 = -1$  و  $l_2$  مرفوض

إذن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$  .

### حل مقترح التمرين الثاني

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$  (حيث  $z \neq 2 - 3i$ )

لنحل في  $\mathbb{C}$  هذه المعادلة .

$$z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \text{ تكافئ } z(z - 2 + 3i) = 3i(z + 2i) \text{ تكافئ } z^2 - 2z + 6 = 0$$

لدينا :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -20 = 20i^2 = (\sqrt{20}i)^2 = (2\sqrt{5}i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{5}i}{2} = 1 - i\sqrt{5} \text{ و } z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{5}i}{2} = 1 + i\sqrt{5}$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .  $A$  ،  $B$  نقطتان لاحقتاهما على الترتيب :  $z_A$  و  $z_B$  حيث :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \text{ و } z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

التحقق أن  $A$  و  $B$  تنتميان إلى دائرة مركزها  $O$  يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا :  $|z_A| = |1 + i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$  و  $|z_B| = |1 - i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$  ومنه  $|z_A| = |z_B|$  أي :  $OA = OB$  .

وبالتالي  $A$  و  $B$  تنتميان إلى الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $\sqrt{6}$  .

(3) نرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي لاحقتها  $z$  ،  $(z \neq 2 - 3i)$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $z'$  حيث :  $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$

النقط  $C$  ،  $D$  ،  $E$  لواحقها على الترتيب :  $z_C = -2i$  ،  $z_D = 2 - 3i$  و  $z_E = 3i$  و  $(\Delta)$  محور القطعة  $[CD]$  .

أ. التعبير عن المسافة  $OM'$  بدلالة المسافتين  $CM$  و  $DM$  :

$$\text{لدينا : } z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \text{ أي } z' = \frac{z_E(z - z_C)}{z - z_D} \text{ ومنه } |z'| = \frac{|z_E| \cdot |z - z_C|}{|z - z_D|} = \frac{|z_E| \cdot |z - z_C|}{|z - z_D|} \text{ أي : } OM' = \frac{3CM}{DM}$$

بـ.  $M \in (\Delta)$  معناه:  $CM = DM$  ومنه  $OM' = 3$  أي أن النقطة  $M'$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  مركزها  $O$  ونصف قطرها 3.  
التحقق أن  $E \in (\gamma)$  :

لدينا:  $|z_E| = |3i| = 3$  أي:  $OE = 3$  ومنه  $E \in (\gamma)$ .

### حل مقترح التمرين الثالث

$A$ ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث:  $A(1; -2; 5)$ ،  $B(2; 2; -1)$  و  $C(-1; 3; 1)$ .  
( $P$ ) المستوي ذو المعادلة:  $14x + 16y + 13z - 47 = 0$ .  
أ. التحقق أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية:

لدينا:  $\overrightarrow{AB}(1; 4; -6)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2; 5; -4)$  ومنه  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية.

بـ. تبين أن المستوي ( $ABC$ ) هو ( $P$ ):

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحقق معادلة ( $P$ ).

$$14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14 + 16 \times (-2) + 13 \times 5 - 47 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14 \times 2 + 16 \times 2 + 13 \times (-1) - 47 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14 \times (-1) + 16 \times 3 + 13 \times 1 - 47 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

(2) إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم ( $AB$ ):

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 4t - 2 \\ z = -6t + 5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{لدينا } \overrightarrow{AB}(1; 4; -6) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB) \text{ من الشكل:}$$

(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري ( $Q$ ) للقطعة  $[AB]$ :

لتكن  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  ومنه  $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$  وبالتالي ( $Q$ ) هو المستوي الذي  $\overrightarrow{AB}(1; 4; -6)$  شعاع ناظمي له

ويشمل  $I$  ومنه لـ ( $Q$ ) معادلة من الشكل:  $x + 4y - 6z + d = 0$

ولدينا  $I \in (Q)$  يعني  $\frac{3}{2} + 4 \times 0 - 6 \times 2 + d = 0$  أي  $d = \frac{21}{2}$ .

إذن  $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$  هي معادلة للمستوي ( $Q$ ).

(طريقة أخرى: المستوي ( $Q$ ) هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء بحيث:  $MA = MB$  .....

بـ. التحقق أن النقطة  $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$  تنتمي إلى ( $Q$ ):

$$x_D + 4y_D - 6z_D + \frac{21}{2} = -1 + 4 \times (-2) - 6 \times \frac{1}{4} + \frac{21}{2} = 0 \text{ لدينا } D \in (Q) \text{ ومنه}$$

جـ. حساب المسافة بين النقطة  $D$  والمستقيم ( $AB$ ):

لدينا:  $D \in (Q)$  ومنه  $I$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستقيم ( $AB$ ).

$$d(D, (AB)) = ID = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (0 + 2)^2 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{4} \text{ ومنه:}$$

$$f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad : \text{بـ} \quad ]-\infty; 0[ \text{ المجال المعرفة على}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \end{cases} \quad : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (حامل محاور الترتيب) مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\text{بـ} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

$$(2) \quad \text{تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } ]-\infty; 0[ \quad f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-\infty; 0[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 0[$  :

$$f'(x) = 1 + 6 \left( \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} \right) = 1 - \frac{6}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 0[$  ،  $\frac{x}{x-1} > 0$  و منه  $x(x-1) > 0$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 0[$  ،  $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$  ، و منه :

|         |           |      |     |
|---------|-----------|------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ |

الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; -2]$  و متناقصة على المجال  $]-2; 0[$ .

|         |           |                       |           |
|---------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$                  | $0$       |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$                   | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $3 + 6\ln\frac{2}{3}$ | $-\infty$ |

$$(3) \quad \text{أـ} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ الذي معادلته له : } y = x + 5 \text{ هو مستقيم}$$

مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

بـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  :

$$\text{لدينا : } f(x) - y = f(x) - (x + 5) = 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 0[$  ،  $x > x - 1$  و منه  $\frac{x}{x-1} < 1$  و بالتالي  $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < 0$ .

إذن نستنتج أن  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$ .

(4) تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $-3.5 < \alpha < -3.4$  و  $-1.1 < \beta < -1$ .

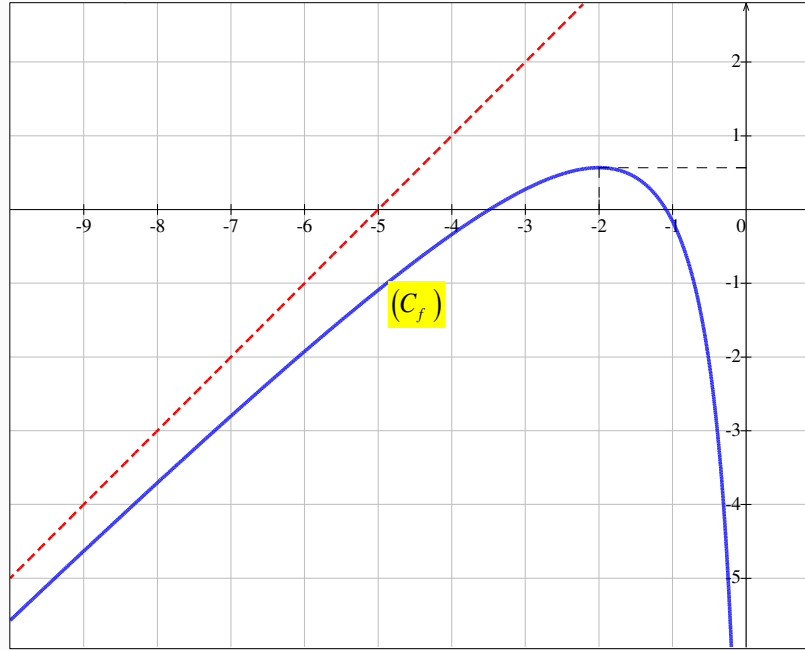
• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $]-\infty; -2[$  و  $]-\infty; -2[ \subset ]-3.5; -3.4[$  و  $f(-3.4) \approx 0,05$   
 $f(-3.5) \approx -0,01$

أي  $f(-3,4) \times f(-3,5) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  $-3.5 < \alpha < -3.4$   
 و يحقق  $f(\alpha) = 0$ .

• الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $]-2; 0[$  و  $]-2; 0[ \subset ]-1,1; -1[$  و  $f(-1.1) \approx 0,02$   
 $f(-1) \approx -0,16$

أي  $f(-1,1) \times f(-1) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\beta$  حيث  $-1.1 < \beta < -1$   
 و يحقق  $f(\beta) = 0$ .

(5) الرسم :



(6) أـ لدينا :  $A \left( -1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) \right)$  و  $B \left( -2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) \right)$ .

تبين أن  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم  $(AB)$ .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين  $A$  و  $B$  تحقق المعادلة المعطاة.

$$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6\ln\frac{3}{4}, \quad y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = 3 + 6\ln\frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم  $(AB)$  والحصول على المعادلة المعطاة)

بـ تبين أن المستقيم  $(AB)$  يمس المنحنى  $(C_f)$  في نقطة  $M_0$  يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا : معامل توجيه المستقيم  $(AB)$  هو  $\frac{1}{2}$  وبالتالي نحل في المجال  $]0; +\infty[$  المعادلة  $f'(x) = \frac{1}{2}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x^2 - x - 12 = 0$$

المعادلة  $f'(x) = \frac{1}{2}$  تقبل في المجال  $]0; +\infty[$  حل وهو  $x_0 = -3$ .

إذن : المستقيم  $(AB)$  يمس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $M_0(x_0; y_0)$  مع  $y_0 = f(-3) = 2 + 6\ln\frac{3}{4}$ .

(7) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 0[$  كما يلي :  $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$

تبيان أن  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0[$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-\infty; 0[$  ومن أجل كل  $x \in ]-\infty; 0[$  :

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

ومنه الدالة  $g$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0[$  .

## تصحيح مقترح للموضوع الثاني

### حل مقترح التمرين الأول

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول  $u_0 = \frac{13}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3 < u_n < 4$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3 < u_n < 4$  "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = \frac{13}{4}$  ومنه  $3 < u_0 < 4$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $3 < u_n < 4$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $3 < u_{n+1} < 4$  .

لدينا حسب الفرض  $3 < u_n < 4$  ومنه  $0 < u_n - 3 < 1$  ومنه  $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$  ومنه  $3 < \sqrt{u_n - 3} < 4$

أي  $3 < u_{n+1} < 4$  بالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3 < u_n < 4$  .

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \frac{(3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n)(\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3)}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{u_n - 3 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

• استنتاج أن  $(u_n)$  متزايدة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{(4 - u_n)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} , n \text{ طبيعي}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3 < u_n < 4$  فإن  $4 - u_n > 0$  و  $u_n - 3 > 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

(3) تبرير تقارب المتتالية  $(u_n)$  :

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 ، إذن فهي متقاربة .

(4) المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ- تبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 3) = \frac{1}{2} v_n$$

ومن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$  .  
ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = \ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n$$

• كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$u_n = 3 + e^{\ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} : v_n = \ln(u_n - 3) \text{ ومنه } u_n = 3 + e^{v_n} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 : \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + e^{\ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 3 + 1 = 4$$

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$  .  
كتابة  $P_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \ln(u_n - 3)$  ومنه  $u_n - 3 = e^{v_n}$  ومنه :

$$P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

• تبين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 : \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)} = e^{\ln \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$A$  ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(-1;0;1)$  ،  $B(2;1;0)$  و  $C(1;-1;0)$  .

(1) تبين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا :

لدينا :  $\overline{AB}(3;1;-1)$  و  $\overline{AC}(2;-1;-1)$

لاحظ أن  $\overline{AB} = \overline{AC}$  لكن  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$  ومنه  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا إذن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

(2) تبين أن :  $2x - y + 5z - 3 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة .

$$2x_A - y_A + 5z_A - 3 = 2 \times (-1) - 0 + 5 \times 1 - 3 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 2 \times 2 - 1 + 5 \times 0 - 3 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 2 \times 1 - (-1) + 5 \times 0 - 3 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(3)  $D(2;-1;3)$  و  $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$

أ- التحقق أن النقطة  $D$  لا تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$  :

$$\text{لدينا : } 2x_D - y_D + 5z_D - 3 = 2 \times 2 - (-1) + 5 \times 3 - 3 = 17 \text{ ومنه } D \notin (ABC)$$

ب- تبين أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$  :

يكفي إثبات أن :  $H \in (ABC)$  و  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  و  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

(أو  $H \in (ABC)$  و  $\overrightarrow{DH}$  ناظمي لـ  $(ABC)$ )

لدينا :  $H \in (ABC)$  ومنه  $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 2 \times \frac{13}{15} - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5 \times \frac{1}{6} - 3 = \frac{52}{30} + \frac{13}{30} + \frac{25}{30} - 3 = 3 - 3 = 0$

ولدينا :  $\overrightarrow{DH} \left( -\frac{17}{15}; \frac{17}{30}; -\frac{17}{6} \right)$  ومنه

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times \left(-\frac{17}{15}\right) + 1 \times \frac{17}{30} + (-1) \times \left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{102}{30} + \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \left(-\frac{17}{15}\right) + (-1) \times \frac{17}{30} + (-1) \times \left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{68}{30} - \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$$

جـ استنتاج أن المستويين  $(ADH)$  و  $(ABC)$  متعامدان :

لدينا  $A \in [(ADH) \cap (ABC)]$  و  $H \in [(ADH) \cap (ABC)]$  وبالتالي  $(ADH)$  و  $(ABC)$  متقاطعان وفق

المستقيم  $(AH)$  ولكون  $(DH) \perp (ABC)$  فالمستويان  $(ADH)$  و  $(ABC)$  متعامدان.

• إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم  $(AH)$  :

$$\begin{cases} x = \frac{28}{15}t - 1 \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = -\frac{5}{6}t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{لدينا } \overrightarrow{AH} \left( \frac{28}{15}; -\frac{13}{30}; -\frac{5}{6} \right) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AH) \text{ من الشكل :}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1)  $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$  كثير حدود للمتغير المركب  $z$  حيث :

أ- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود  $P(z)$  :

$$P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$$

ب- تعيين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث من أجل كل عدد مركب  $z$  :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta \\ &= z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta \\ &= z^3 - 12z^2 + 48z - 72 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد  $\alpha = -6$  ،  $\beta = 12$  ومنه  $P(z) = (z - 6)(z^2 - 6z + 12)$

جـ حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $P(z) = 0$  :

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 6)(z^2 - 6z + 12) = 0 \text{ معناه } z - 6 = 0 \text{ أو } z^2 - 6z + 12 = 0$$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 6z + 12 = 0$ .

لدينا :  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2\sqrt{3}i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $P(z) = 0$  هي :  $S = \{6; 3 - i\sqrt{3}; 3 + i\sqrt{3}\}$

(2) أ- كتابة كلا من  $z_C$  و  $z_B$  ،  $z_A$  على الشكل الأسّي:

لدينا:  $z_A = 6$  ومنه  $|z_A| = 6$  إذن  $z_A = 6e^{i0}$ .

لدينا:  $z_B = 3 + i\sqrt{3}$  ومنه:  $|z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

$$\text{وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

إذن:  $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

لدينا:  $z_C = \overline{z_B}$  ومنه:  $z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

ب- كتابة العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$  على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - (3 + i\sqrt{3})}{6 - (3 - i\sqrt{3})} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا: } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ إذن } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ج- إستنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} BA = CA \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ يكافئ } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ لدينا:}$$

وبالتالي المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع.

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ، نسبته  $\sqrt{3}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

أ- الكتابة المركبة للتشابه  $S$  :

لدينا:  $z' = az + b$  بحيث  $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$  و  $b = (1 - a)z_C$  ، أي:  $b = (1 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$

ومنه  $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$  هي العبارة المركبة للتشابه  $S$ .

ب- تعيين  $z_{A'}$  لاحقة النقطة  $A'$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه  $S$  :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

ج- تبيان أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $A'$  في إستقامة.

$$\text{يكفي إثبات أن } \frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} \text{ حقيقي.}$$

$$\text{لدينا: } \frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{6 - (3 + i\sqrt{3})} = \frac{2(3 - i\sqrt{3})}{3 - i\sqrt{3}} = 2$$

(I)  $g(x) = 1 - xe^x$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

(1) حساب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$  :  
بما أن  $e^x > 0$  فإن إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-(x+1)$  ، ومنه :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0    | -         |

وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[-1; +\infty[$  ومتزايدة على المجال  $]-\infty; -1]$  .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$         | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0            | -         |
| $g(x)$  | 1         | $1 + e^{-1}$ | $-\infty$ |

(3) أ- تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  ، تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1; +\infty[$  :

الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  و  $g(-1) = 1 + e^{-1}$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$  .

ب- التحقق أن  $0.5 < \alpha < 0.6$  :

لدينا :  $]-1; +\infty[ \subset ]0.5; 0.6[$  و  $\begin{cases} g(0.5) \approx 0.18 \\ g(0.6) \approx -0.09 \end{cases}$  ومنه  $0.5 < \alpha < 0.6$  .

إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | +         | 0        | -         |

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 2]$  كما يلي :  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$  :

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2]$  فإن :  $f'(x) = -g(x)$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; 2]$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-\infty; 2]$  :

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$  :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | 2 |
|---------|-----------|----------|---|
| $f'(x)$ | -         | 0        | + |

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 2         |
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $e^2 - 3$ |

(3) تبين أن:  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ .

لدينا:  $f(\alpha) = (\alpha - 1)e^\alpha - \alpha - 1$ ، ولدينا من جهة  $g(\alpha) = 0$  يكافئ  $1 - \alpha e^\alpha = 0$  يكافئ  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ .

ومنه  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$  أي  $f(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha - 1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$

إيجاد حصر للعدد  $f(\alpha)$ :

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases}$$

يكافئ  $-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$  أي  $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$ .

(4) أ- لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x - 1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

ب- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

لدينا:  $f(x) - y = (x - 1)e^x$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $x - 1$  على المجال  $]-\infty; 2]$ .

|              |                                                                                                |   |   |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$          | $-\infty$                                                                                      | 1 | 2 |
| $f(x) - y$   | -                                                                                              | 0 | + |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ / $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1; -2)$ / $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |   |   |

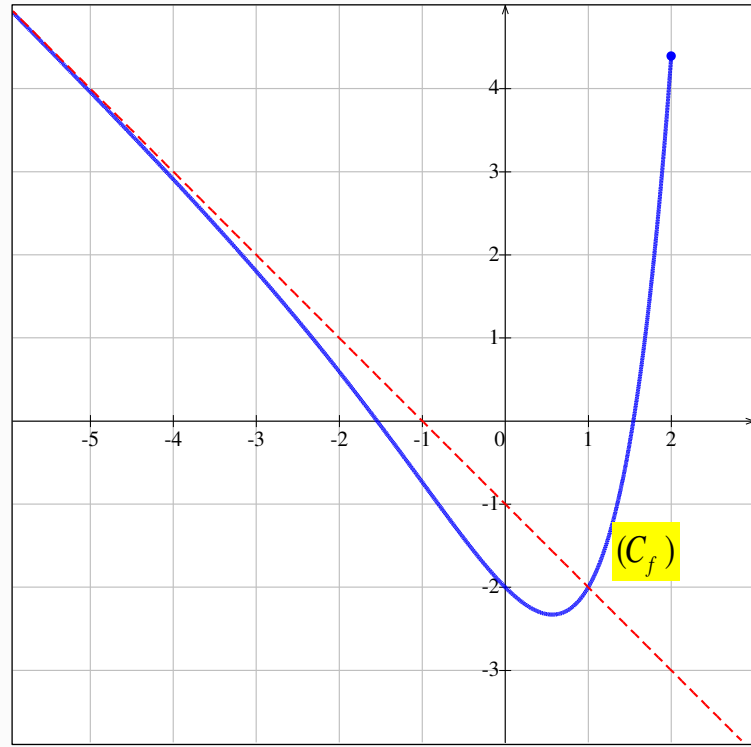
(5) أ- تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-1,6 < x_1 < -1,5$  و  $1,5 < x_2 < 1,6$ .

• الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha]$  و  $]-\infty; \alpha]$  و  $]-1,6; -1,5[$  و  $f(-1,5) \approx -0,05$  و  $f(-1,6) \approx 0,07$

أي  $f(-1,6) \times f(-1,5) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $x_1$  حيث  $-1,6 < x_1 < -1,5$  و يحقق  $f(x_1) = 0$ .

• الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $[\alpha; 2]$  و  $[\alpha; 2]$  و  $]1,5; 1,6[$  و  $f(1,5) \approx -0,26$  و  $f(1,6) \approx 0,37$

أي  $f(1,5) \times f(1,6) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $x_2$  حيث  $1,5 < x_2 < 1,6$  و يحقق  $f(x_2) = 0$ .



(6) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = (ax + b)e^x$ .

أ- تعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $xe^x \mapsto x$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$  ،

الدالة  $h$  أصلية للدالة  $xe^x \mapsto x$  يعني :  $h'(x) = xe^x$  ، ومنه بالمطابقة نجد :  $a = 1$  و  $b = -1$ .

أي  $h(x) = (x - 1)e^x$ .

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  :

لدينا :  $g(x) = 1 - xe^x$  ومنه دالة أصلية للدالة  $g$  من الشكل :  $G(x) = x - (x - 1)e^x$ .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط :

$$D(2; 0; -1) \text{ و } C(2; -1; 1), B(1; 0; -1), A(-1; 1; 3)$$

والمستوي  $(P)$  ذا المعادلة :  $2y + z + 1 = 0$

$$\text{ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \text{ حيث } \beta \text{ وسيط حقيقي .}$$

(1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(BC)$  ، ثم تحقق أن المستقيم  $(BC)$  محتوي في المستوي  $(P)$  .

(2) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا من نفس المستوي .

(3) أ- أحسب المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(P)$  .

ب- بين أن  $D$  نقطة من  $(P)$  ، وأن المثلث  $BCD$  قائم .

(4) بين أن  $ABCD$  رباعي وجوه ، ثم أحسب حجمه .

التمرين الثاني (4 ن)

(I) المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  .

(II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ :  $u_0 = 1$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

(1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 6$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(3) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$  .

ب- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

التمرين الثالث (5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $(I)$  ذات المجهول  $z$  التالية :

$$(I) \quad z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \quad \text{حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي .}$$

(2) من أجل  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ، نرمز إلى حلي المعادلة  $(I)$  بـ  $z_1$  و  $z_2$  . بين أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

أ- أنشئ النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

بـ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  ، ثم استنتج أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ويطلب تعيين نسبته وزاويته .

جـ. عين لاحقة النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$  ، ثم أنشئ  $G$  .  
دـ. أحسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABDG$  متوازي أضلاع .

### التمرين الرابع (5,6ن)

| $x$  | $f(x)$ |
|------|--------|
| 0,20 | 0,037  |
| 0,21 | 0,016  |
| 0,22 | -0,005 |
| 0,23 | -0,026 |
| 0,24 | -0,048 |
| 0,25 | -0,070 |

(I)  $f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى  $(C)$  .

(2) أحسب  $f'(x)$  . بين أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في  $]-\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد  $\alpha$  .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى  $(C)$  ، ثم أرسم المنحنى  $(C')$  الممثل للدالة  $|f|$  .

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية  $m$  التي من أجلها يكون للمعادلة  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة .

(II)  $g$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $g(x) = f(2x-1)$  . (عبارة  $g(x)$  غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $]-\infty; 1[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أـ. تحقق أن  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$  ، ثم بين أن :  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$  .

بـ. استنتج معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$  .

جـ. تحقق من أن :  $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$  ، معادلة للمستقيم  $(T)$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4,5ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $z$  الآتية :  $(E) \quad z^2 + 4z + 13 = 0$  .....

(1) تحقق أن العدد المركب  $-2 - 3i$  حل للمعادلة  $(E)$  ، ثم جد الحل الآخر .

(2)  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوي المركب لاحتقاهما  $z_A = -2 - 3i$  و  $z_B = i$  على الترتيب .

$S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ، نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$  .

أـ. بين أن :  $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$  .

بـ. أحسب  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  ، علما أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه  $S$  .

(3) لتكن النقطة  $D$  حيث :  $2\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{O}$  .

أـ. بين أن  $D$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

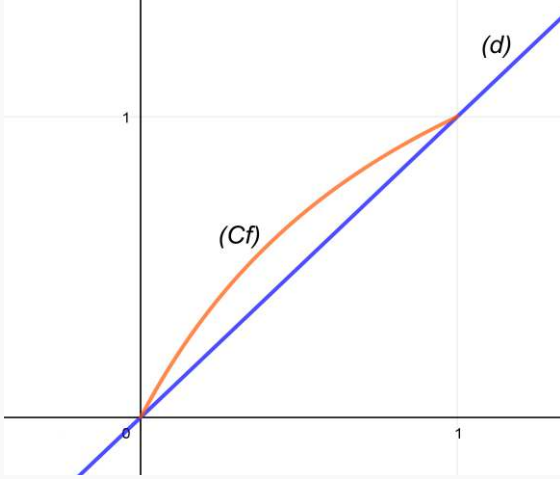
بـ. أحسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  .

جـ- بين أن  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$  ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ACD$  .

#### التمرين الثاني (4ن)

في الشكل المقابل ،  $(C_f)$  هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0;1]$  بالعلاقة :  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  ،

و  $(d)$  المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$



(1)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدتها الأول ،  $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود  $u_2, u_1, u_0$  و  $u_3$  على محور الفواصل دون حسابها ، مبرزاً خطوط التمثيل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها .

(2) أ- أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0;1]$

ب- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$

جـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(3)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ- برهن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  ، يطلب حساب حدّها الأول  $v_0$  .

ب- أحسب نهاية  $(u_n)$  .

#### التمرين الثالث (4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة :  $A(2;1;-1)$  ،  $B(1;-1;3)$  ،  $C(-\frac{3}{2};-2;1)$

و  $D(\frac{7}{2};-3;0)$  . ولتكن  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  .

(1) أ- أحسب إحداثيات النقطة  $I$  .

ب- بين أن :  $2x + 4y - 8z + 5 = 0$  معادلة ديكارتية لـ  $(P)$  ، المستوي المحوري لـ  $[AB]$  .

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $C$  و  $\vec{u}(1;2;-4)$  شعاع توجيه له .

(3) أ- جد إحداثيات  $E$  نقطة تقاطع المستوي  $(P)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

ب- بين أن  $(\Delta)$  و  $(AB)$  من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث  $IEC$  قائم .

(4) أ- بين أن المستقيم  $(ID)$  عمودي على كل من المستقيم  $(AB)$  والمستقيم  $(IE)$  .

ب- أحسب حجم رباعي الوجوه  $DIEC$  .

#### التمرين الرابع (7ن)

(I)  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$  .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(2) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $g(x) > 0$  .

(II) الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول 2cm)

(1) أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ . فسر النتيجة بيانياً.

بـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) أـ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ،

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

جـ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلاً حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن  $0 < \alpha < 0,5$ .

(3) أـ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

بـ أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

(4) نقبل أن المستقيم  $(T)$  ذا المعادلة  $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة فاصلتها  $x_0$ .

أـ أحسب  $x_0$ .

بـ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

جـ عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي  $m$  بحيث تقبل المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين متميزين.

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

$A, B, C$  و  $D$  النقطة من الفضاء بحيث:  $A(-1; 1; 3)$ ،  $B(1; 0; -1)$ ،  $C(2; -1; 1)$  و  $D(2; 0; -1)$ .

و المستوي  $(P)$  ذا المعادلة:  $2y + z + 1 = 0$ ، و  $(\Delta)$  المستقيم الذي تمثيل وسيطيه له:  $y = 2 + \beta$  حيث  $\beta$  وسيط حقيقي.

(1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(BC)$ :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

لدينا  $\overline{BC}(1; -1; 2)$  ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم  $(BC)$  من الشكل:

• التحقق أن المستقيم  $(BC)$  محتوئ في المستوي  $(P)$ :

$(BC) \subset (P)$  لأن  $2(-t) + (2t - 1) + 1 = 0$ . (أو يمكن إثبات أن:  $B \in (P)$  و  $C \in (P)$ )

(2) تبين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا من نفس المستوي:

لنثبت أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا متوازيين وليسا متقاطعين.

لندرس التوازي:

لدينا  $\overline{BC}(1; -1; 2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(BC)$  و  $\vec{u}(0; 1; -2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta)$  ومنه  $\overline{BC}$  و  $\vec{u}$  ليسا

مرتبطين خطياً لأن  $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$  وبالتالي المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع : معناه  $\begin{cases} -1=t+1 \\ 2+\beta=-t \\ 1-2\beta=2t-1 \end{cases}$  ، الجملة لا تقبل حل وبالتالي المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا متقاطعين .

(3) أ- حساب المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(P)$  :

$$d(A, (P)) = \frac{|2y_A + z_A + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 3 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب- تبين أن  $D$  نقطة من  $(P)$  :

$$\text{لدينا } 2y_D + z_D + 1 = 2 \times 0 - 1 + 1 = 0 \text{ ومنه } D \in (P)$$

تبيان أن المثلث  $BCD$  قائم :

$$\text{لدينا : } \overline{BC} (1; -1; 2) , \overline{BD} (1; 0; 0) , \overline{DC} (0; -1; 2) \text{ ومنه } BC = \sqrt{6} , BD = 1 , DC = \sqrt{5}$$

$$\text{ولدينا : } DC^2 + DB^2 = 1 + 5 = 6 = BC^2 \text{ ومنه حسب عكس نظرية فيثاغورث المثلث } BCD \text{ قائم في } D$$

$$\text{طريقة أخرى : } \overline{BD} \cdot \overline{DC} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 0 \text{ ومنه المثلث } BCD \text{ قائم في } D$$

(4) تبين أن  $ABCD$  رباعي وجوه :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} (BC) \subset (P) \\ D \in (P) \end{cases} \text{ و } A \notin (P) \text{ لأن } d(A, (P)) \neq 0 \text{ و } BCD \text{ مثلث ومنه } ABCD \text{ رباعي وجوه}$$

حساب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$  :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times h \text{ مع } h = d(A, (P)) \text{ ومنه : } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} DB \times DC \right) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$$(I) \text{ المتتالية } (v_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

(1) تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n , v_{n+1} = \frac{5^{n+2}}{6^{n+1}} = \frac{5 \times 5^{n+1}}{6 \times 6^n} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6} v_n$$

$$\text{ومن المتتالية هندسية أساسها } q = \frac{5}{6} \text{ وحدها الأول } 5 \text{ و } v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = 5$$

(2) حساب  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5 \times \left( \frac{5}{6} \right)^n \right] = 0 \text{ لأن } 0 < q < 1$$

$$(II) \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ : } u_0 = 1 , \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 6$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 6$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  :

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 1$  ومنه  $1 \leq u_0 \leq 6$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $1 \leq u_n \leq 6$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $1 \leq u_{n+1} \leq 6$  .

$$\text{لدينا حسب الفرض } 1 \leq u_n \leq 6 \text{ ومنه } 5 \leq 5u_n \leq 30 \text{ ومنه } 11 \leq 5u_n + 6 \leq 36 \text{ ومنه } \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq \sqrt{36}$$

$$\text{أي } 1 \leq \sqrt{11} \leq u_{n+1} \leq 6 \text{ وبالتالي } P(n+1) \text{ صحيحة .}$$

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 6$  .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \frac{(\sqrt{5u_n + 6} - u_n)(\sqrt{5u_n + 6} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، ومنه  $u_{n+1} - u_n = \frac{(6 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $6 - u_n > 0$  و  $1 + u_n > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

$$(3) \text{ أ- برهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي } n : 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) .$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n + 6} = \frac{(6 - \sqrt{5u_n + 6})(6 + \sqrt{5u_n + 6})}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \text{ ومنه } \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{1}{6} \text{ يكافئ } 1 \leq u_n \leq 6 \text{ ومن جهة أخرى :}$$

ب- تبين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 1$  و  $v_0 = 5$  منه  $0 \leq 6 - u_0 \leq v_0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$

$$\text{لدينا حسب الفرض } 0 \leq 6 - u_n \leq v_n \text{ ولدينا } 0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \text{ منه } 0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}v_n$$

ومنّه  $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  .

(يمكن استخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- استنتاج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  ولدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  ومنّه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - u_n) = 0$  أي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $(I)$  ذات المجهول  $z$  التالية :  $(I) \dots z^2 - (4\cos \alpha)z + 4 = 0$  حيث  $\alpha$  وسيط حقيقي .

$$\Delta = (-4\cos \alpha)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16\cos^2 \alpha - 16 = 16(\cos^2 \alpha - 1) = -16\sin^2 \alpha = (4i \sin \alpha)^2$$

ومنّه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{4\cos \alpha + 4i \sin \alpha}{2} = 2(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2e^{i\alpha} \text{ و}$$

$$z_2 = \frac{4\cos \alpha - 4i \sin \alpha}{2} = 2(\cos \alpha - i \sin \alpha) = 2e^{-i\alpha}$$

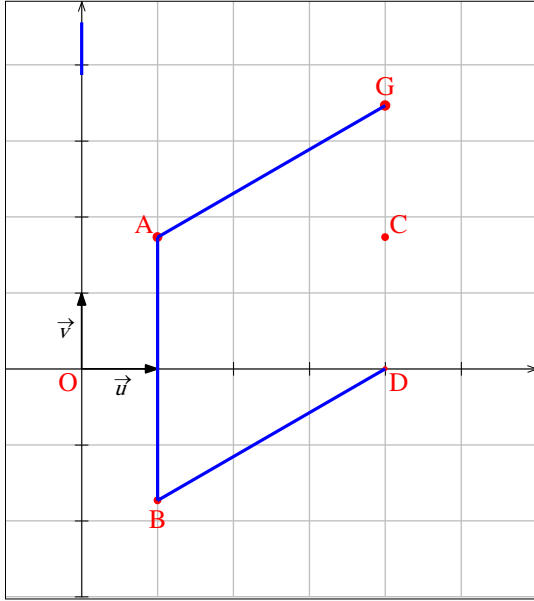
$$(2) \text{ من أجل } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ ، نجد : } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{تبيان أن : } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ لدينا}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\frac{4026\pi}{3}} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(0+671 \times 2\pi)} = e^0 = 1 \text{ ومنه}$$

(3) أ. تعلیم النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$ .



ب. كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  مع تعيين نسبته وزاوية له.

لدينا  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ومنه  $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$  إذن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ونسبته } \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} \text{ وزاوية له}$$

ج. تعيين لاحقة النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$  :

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3}) + 2(4 + i\sqrt{3})}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د. تعيين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABDG$  متوازي أضلاع :

$$z_D = z_B - z_A + z_G = 4 \text{ وبالتالي } z_B - z_A = z_D - z_G \text{ معناه } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD} \text{ معناه } ABDG \text{ متوازي أضلاع}$$

#### حل مقترح التمرين الرابع

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \text{ : ب. } ]-\infty; 1[ \text{ الدالة المعرفة على } (I)$$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 1 \end{cases} \text{ لأن ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right] = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C)$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C)$ .

(2) حساب  $f'(x)$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -\infty; 1[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $] -\infty; 1[$ :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left( \frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left( 1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن  $f'(x) < 0$  من أجل كل  $x \in ] -\infty; 1[$ ، فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $] -\infty; 1[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |   |
|---------|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 |
| $f'(x)$ |           | - |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 2 |

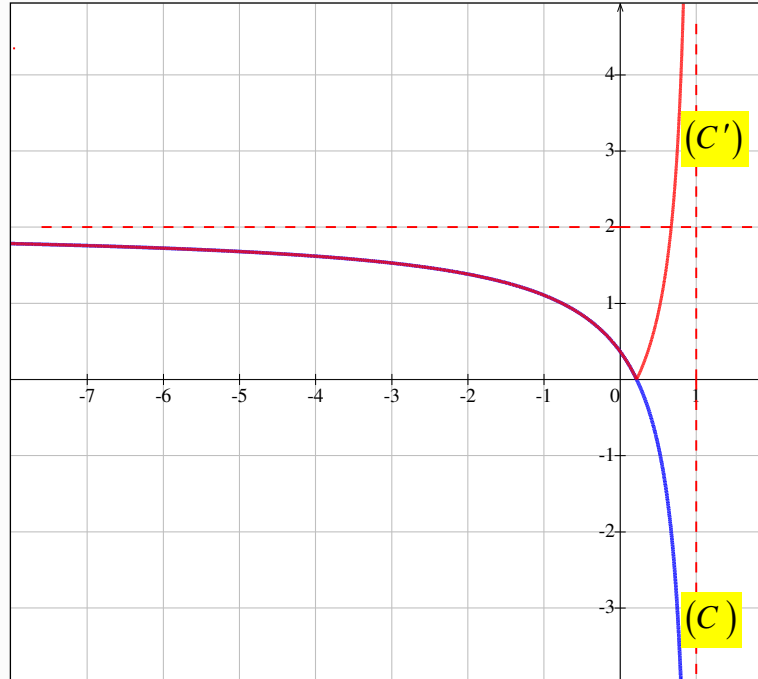
(3) تبيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $] -\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $] -\infty; 1[$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $] -\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

حسب جدول القيم:  $0,21 < \alpha < 0,22$ .

(4) الرسم:



(5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية  $m$  التي من أجلها يكون للمعادلة  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة  $|f(x)| = m$  بيانها هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C')$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = m$ .

من أجل  $m \in \left[ \frac{1}{e}; 2 \right]$  المعادلة  $|f(x)| = m$  تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

(II) الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ:  $g(x) = f(2x - 1)$  .

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x - 1) = 2$$

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-\infty; 1[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 1[$  :  $g'(x) = 2f'(2x - 1)$  .  
بما أنه من أجل كل  $x \in ]-\infty; 1[$  ،  $(2x - 1) \in ]-\infty; 1[$  فإن  $f'(2x - 1) < 0$  ، وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       |
| $g'(x)$ |           | $-$       |
| $g(x)$  | $2$       | $-\infty$ |

(2) أ- التحقق أن  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$  :

$$\text{لدينا : } g(x) = f(2x - 1) \text{ ومنه } g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{تبيان أن : } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا : } g'(x) = 2f'(2x - 1) \text{ ومنه } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

ب- إستنتاج معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$  .

$$\text{لدينا : } (T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \text{ ومنه } (T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\text{ج- التحقق من أن : } y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3} \text{ ، معادلة للمستقيم } (T)$$

$$\text{لدينا : } f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \text{ ، لكن } f(\alpha) = 0 \text{ وهذا يعني } e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1} \text{ ومنه } f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$$

$$\text{إذن : } (T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3} \text{ أي } (T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة (E) ذات المجهول  $z$  الآتية : (E) .....  $z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) التحقق أن العدد المركب  $-2 - 3i$  حل للمعادلة (E) :

$$(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$

بما أن  $-2 - 3i$  حل للمعادلة (E) فإن  $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$  كذلك حل للمعادلة (E) .

((E) معادلة في  $\mathbb{C}$  بمعاملات حقيقية)

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما  $z_A = -2 - 3i$  و  $z_B = i$  على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$  .

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

العبارة المركبة للتشابه S :  $z' - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$  أي  $z' - z_A = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}iz_A + z_A$  و منه  $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$  .

بـ حساب  $z_C$  لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i = \frac{1}{2}i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i = -4 - 2i$$

(3) لتكن النقطة D حيث :  $\overrightarrow{2AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$

أ تبيان أن مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما :

لدينا  $\overrightarrow{2AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$  ومنه  $\overrightarrow{2AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$  أي  $\overrightarrow{3DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$  إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

بـ حساب  $z_D$  لاحقة النقطة D .

$$z_D = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-3(-2 - 3i) + i}{-2} = \frac{6 + 9i + i}{-2} = -3 - 5i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i \quad \text{جـ تبيان أن :}$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3 - 5i - (-2 - 3i)}{-4 - 2i - (-2 - 3i)} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{i(i - 2)}{-2 + i} = i$$

طبيعة المثلث ACD :

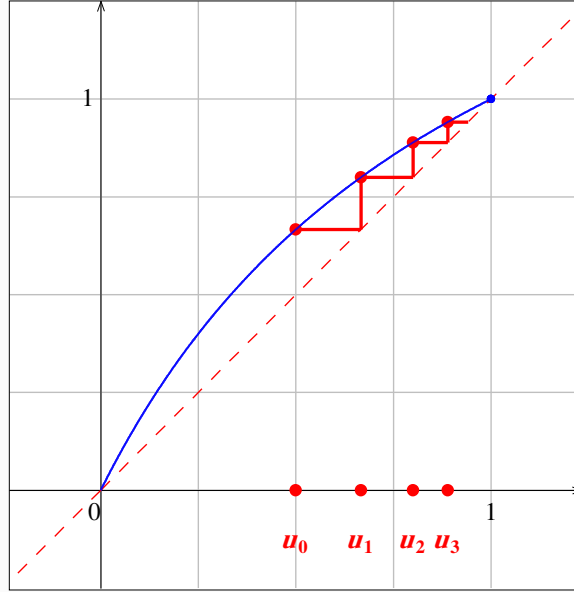
$$\left\{ \begin{array}{l} AD = AC \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{معناه} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{يكافئ} \quad \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$$

ومن المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين .

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0;1]$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .

(1)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدّها الأول،  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- الرسم :



ب- التخمين:

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومتقاربة نحو العدد 1.

(2) أ- إثبات أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$  :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \text{ و } [0;1] \text{ على المجال}$$

لدينا : من أجل كل  $x \in [0;1]$  ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$ .

ب- البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n=0$ ، لدينا  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومنه  $0 < u_0 < 1$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 < u_n < 1$ ، و نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 < u_{n+1} < 1$ .

لدينا حسب الفرض  $0 < u_n < 1$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماما فإن  $f(0) < f(u_n) < f(1)$  أي  $0 < u_{n+1} < 1$

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n < 1$ .

ج- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $1 - u_n > 0$  و  $u_n > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

(3)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ- إثبات  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}} = \frac{2u_n-(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_n-1}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0} = -1$

بـ حساب نهاية  $(u_n)$  :

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ أي } u_n = \frac{1}{1-v_n} \text{ ومنه } v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \text{ ومنه } v_n = \frac{u_n-1}{u_n}, n \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right] = 1 : \text{ إذن}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

$A, B, C$  و  $D$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(2;1;-1), B(1;-1;3), C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$  و  $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$

(1) أـ حساب إحداثيات النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$ .

$$\text{لدينا } I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right) \text{ ومنه } I\left(\frac{2+1}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) \text{ أي } I\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right)$$

بـ تبين أن :  $2x + 4y - 8z + 5 = 0$  معادلة ديكارتية لـ  $(P)$  ، المستوي المحوري لـ  $[AB]$  :

يكفي إثبات أن :  $I \in (P)$  و  $\overrightarrow{AB}$  ناظمي لـ  $(P)$  .

$$\text{لدينا : } 2x_I + 4y_I - 8z_I + 5 = 2 \times \frac{3}{2} + 4 \times 0 - 8 \times 1 + 5 = 0 \text{ ومنه } I \in (P)$$

$$\text{لدينا : } \vec{n}(2;4;-8) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ ولدينا } \overrightarrow{AB}(-1;-2;4) \text{ ومنه } \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \vec{n}$$

إذن  $\overrightarrow{AB}$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  .

(2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $C$  و  $\vec{u}(1;2;-4)$  شعاع توجيه له :

$$\text{تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta) \text{ من الشكل : } \begin{cases} x = t - \frac{3}{2} \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(3) أـ إيجاد إحداثيات  $E$  نقطة تقاطع المستوي  $(P)$  والمستقيم  $(\Delta)$  :

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = t - \frac{3}{2} \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 1 \\ 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } 2\left(t - \frac{3}{2}\right) + 4(2t - 2) - 8(-4t + 1) + 5 = 0 \text{ أي } t = \frac{1}{3}$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(\Delta)$  نجد  $\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$  وهي إحداثيات النقطة  $E$  .

بـ. تبين أن  $(\Delta)$  و  $(AB)$  من نفس المستوي :

لدينا  $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$  و  $\vec{u}(1; 2; -4)$  منه  $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$  أي  $(AB)$  و  $(\Delta)$  متوازيان وبالتالي هما من نفس المستوي .  
• استنتاج أن المثلث  $IEC$  قائم :

$$\left\{ \begin{array}{l} (EC) \perp (P) \\ E \in (P) \end{array} \right\} \text{ وبالتالي } \left\{ \begin{array}{l} (AB) \perp (P) \\ (AB) \parallel (\Delta) \end{array} \right\} . (\Delta) \text{ على } I \text{ عمودي } \rightarrow E \text{ هي المسقط العمودي لـ } I \text{ على } (\Delta)$$

(يمكن استخدام نظرية فيثاغورث)

4) أـ تبين أن المستقيم  $(ID)$  عمودي على كل من المستقيم  $(AB)$  و المستقيم  $(IE)$  .

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{ID}(2; -3; -1) , \overrightarrow{AB}(-1; -2; 4) \text{ و } \overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) .$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} (AB) \perp (ID) \\ (IE) \perp (ID) \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ID} = -1 \times 2 + (-2) \times (-3) + 4 \times (-1) = 0 \\ \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{ID} = \left(-\frac{8}{3}\right) \times 2 + \left(-\frac{4}{3}\right) \times (-3) + \left(-\frac{4}{3}\right) \times (-1) = 0 \end{array} \right.$$

بـ. حساب حجم رباعي الوجوه  $DIEC$  :

$$ID = \sqrt{14} \text{ و } IE = \frac{4\sqrt{6}}{3} , EC = \frac{\sqrt{21}}{3} , S_{IEC} = \frac{1}{2} IE \times EC : \text{لأن } V_{DIEC} = \frac{1}{3} S \times h = \frac{1}{3} S_{IEC} \times ID = \frac{89}{4} uv$$

#### حل مقترح التمرين الرابع

I) الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$  :

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} \right) = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$\cdot \text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } ]-1; +\infty[ \text{ و } g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $x$  ، لأنه من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  فإن  $x+1 > 0$  و  $x+2 > 0$  .

|         |    |       |           |
|---------|----|-------|-----------|
| $x$     | -1 | 0     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |    | - 0 + |           |

الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $]-1; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | -1        | 0     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | - 0 + |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 4     | $+\infty$ |

(2) من جدول التغيرات : من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  و  $g(x) \geq 4$  وبالتالي نستنتج أنه من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  ،  $g(x) > 0$  .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{x+1} \right) [x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة  $x = -1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ : لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$(2) \text{ أ- تبيان أنه من أجل كل } x \text{ من } ]-1; +\infty[ , f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} ,$$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  ، ومن أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  :

$$f(x) = 1 - \frac{-2}{x+1} (x+1) - 1 \times (1 - 2\ln(x+1)) = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  :

لدينا : من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  ،  $g(x) > 0$  ، وبالتالي  $f'(x) > 0$  إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-1$      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

ج- تبيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right. \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$  ،

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-1; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

التحقق أن  $0 < \alpha < 0,5$  .  
لدينا :  $]-1; +\infty[ \subset ]0; 0,5[$  و  $f(0) = -1$  أي  $f(0) \times f(0,5) < 0$  ومنه  $0 < \alpha < 0,5$ .

$$(3) \text{ أ- لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ب- دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

$$\text{لدينا : } f(x) - x = \frac{-1 + 2\ln(x+1)}{x+1} \text{ ومنه إشارة الفرق من إشارة } -1 + 2\ln(x+1)$$

|              |      |                                                                 |                        |
|--------------|------|-----------------------------------------------------------------|------------------------|
| $x$          | $-1$ | $-1 + \sqrt{e}$                                                 | $+\infty$              |
| $f(x) - y$   |      | -                                                               | 0 +                    |
| الوضع النسبي |      | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$<br>في $A(-1 + \sqrt{e}; -1 + \sqrt{e})$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

(4) المستقيم  $(T)$  ذا المعادلة  $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة فاصلتها  $x_0$ .

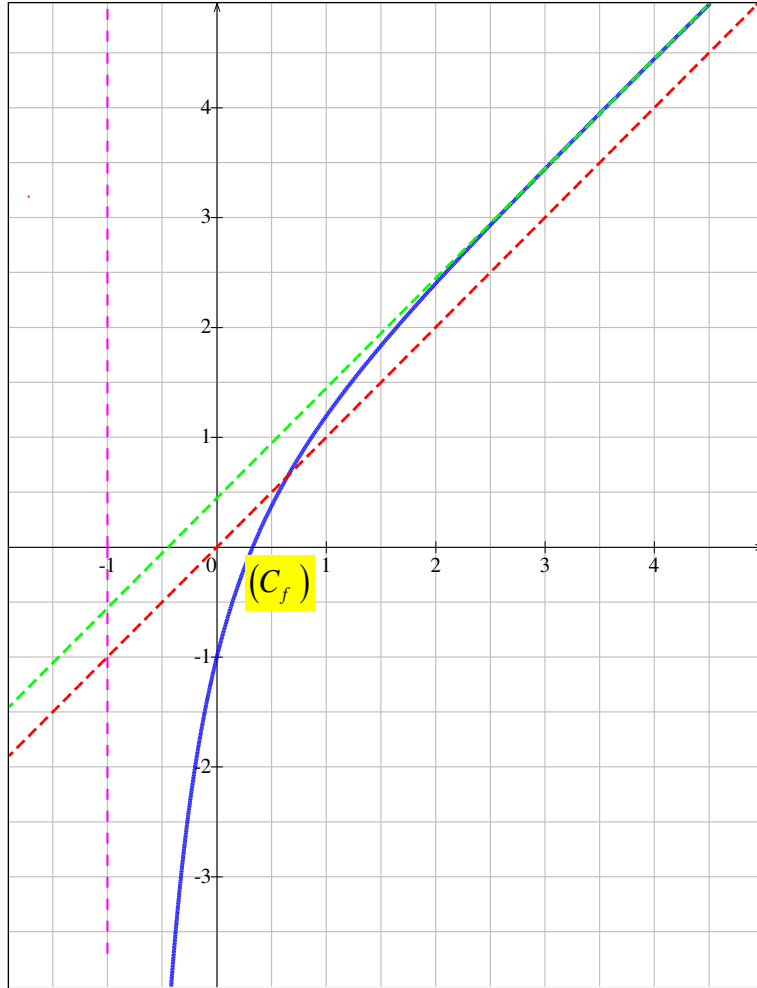
أ- حساب  $x_0$ :

لدينا:

$$f'(x_0) = 1 \text{ تكافئ } \frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1 \text{ تكافئ } g(x_0) = (x_0+1)^2 \text{ تكافئ } 2\ln(x_0+1) = 3$$

$$x_0 = -1 + \sqrt{e^3}$$

ب- الرسم:



ج- بياناً، حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = x + m$ .

إذن: تقبل المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين متميزين إذا وفقط إذا كان  $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$  ، و  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n + 4$  ،
- (1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
  - (2) أكتب كلا من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  .
  - (3) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  على  $\mathbb{N}$  .
  - (4) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
  - (5) لتكن  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$  .
- أبين أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  .
- بـ أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$  .

التمرين الثاني (5ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  . نعتبر النقط:  $A(2; -1; 1)$  ،  $B(-1; 2; 1)$  ،  $C(1; -1; 2)$  و  $D(1; 1; 1)$  .
- (1) أـ تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .
  - بـ بين أن  $\vec{n}(1; 1; 1)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  .
  - جـ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .
  - (2) لتكن النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$  .
  - أـ أحسب إحداثيات  $G$  .
  - بـ لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$  .
  - بين أن  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GD]$  .
  - جـ أثبت أن معادلة  $(\Gamma)$  هي:  $6x - 4y + 2z + 3 = 0$  .
  - (3) بين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

التمرين الثالث (5ن)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:  $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- لتكن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  لواحقها على الترتيب:
- $z_D = \frac{z_C}{2}$  و  $z_C = 6\sqrt{2}$  ،  $z_B = \overline{z_A}$  ،  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$
- أـ أكتب  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_A(1+i)$  على الشكل الأسّي.
- بـ أحسب  $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$  .

جـ- بين أن النقط  $O$  ،  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $D$  ، يطلب تعيين نصف قطرها .

دـ أحسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  ثم جد قياسا للزاوية  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  . ماهي طبيعة الرباعي  $OACB$  ؟

(3) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

أـ أكتب العبارة المركبة للدوران  $R$  .

بـ عين لاحقة النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$  ثم تحقق أن النقط  $A$  ،  $C$  و  $C'$  في إستقامة .

جـ- عين لاحقة النقطة  $A'$  صورة  $A$  بالدوران  $R$  ثم حدد صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$  .

### التمرين الرابع (6ن)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
(1) أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، فسر النتيجة هندسيا .

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أـ أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته :  $y = 1$  .

بـ أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1 .

جـ- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  ، حيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$  .

(3) أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$  .

(4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي :  $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$

وليكن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم ،  $h(x) - h(-x) = 0$  ، ماذا تستنتج ؟

بـ أنشئ المنحنى  $(C_h)$  اعتمادا على المنحنى  $(C_f)$  .

جـ- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ، عدد حلول المعادلة :  $\ln x^2 = (m-1)|x|$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4ن)

(I) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها العام :  $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$  (  $e$  هو أساس اللوغاريتم النيبيري )

(1) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأولى .

(2) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ، ماذا تستنتج ؟

(3) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = \ln(u_n)$  (  $\ln$  يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري ) .

(1) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج نوع المتتالية  $(v_n)$  .

(2) أـ أحسب بدلالة  $n$  العدد  $P_n$  حيث :  $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

بـ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث :  $P_n + 4n > 0$  .

### التمرين الثاني (5ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر النقط:  $A(1; -1; -2)$ ،  $B(1; -2; -3)$  و  $C(2; 0; 0)$ .
- أ- برهن أن  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية.  
ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(ABC)$ .  
ج- تحقق أن  $x + y - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .
  - نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:  $(P): x - y - 2z + 5 = 0$  و  $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$ .  

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 أ- برهن أن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  ذي التمثيل الوسيط:  $(t \in \mathbb{R})$ .  
 ب- عيّن تقاطع المستويات  $(ABC)$ ،  $(P)$  و  $(Q)$ .  
 ج- لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء. نسمي  $d(M, (P))$  المسافة بين  $M$  و  $(P)$  و  $d(M, (Q))$  المسافة بين  $M$  و  $(Q)$ .  
 د- عيّن المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  بحيث:  $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$ .

### التمرين الثالث (5ن)

- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:  $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$ .
- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (وحدة الطول  $1cm$ )  
 تعطى النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  لواحقتها على الترتيب:  $z_A = i$ ،  $z_B = 1 + 2i$ ،  $z_C = 1 - 2i$ .  
 أ- أنشئ النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .  
 ب- جد  $z_H$  لاحقة النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$ .  
 ج- أحسب مساحة المثلث  $ABC$ .
- ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .  
 أ- عيّن الكتابة المركبة للتشابه  $S$ .  
 ب- بين أن مساحة صورة المثلث  $ABC$  بالتشابه  $S$  تساوي  $\frac{1}{2}cm^2$ .
- نقطة لاحقتها  $z$ ، عيّن مجموعة النقط  $M$  حيث:  $|z| = |iz + 1 + 2i|$ .

### التمرين الرابع (7ن)

- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .  
 (1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .  
 ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكل جدول تغيراتها.
- أ- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ .  
 ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .
- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .  
 وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .  
 (1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
 (2) أ- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ .

بـ استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  .

$$(3) \text{ أ- بين أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

بـ استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ . (نأخذ  $f(\alpha) \approx -0,1$ )

(4) أحسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$  .

(5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

$$(6) \text{ لتكن } h \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x) = f(x) - 2$  .

بـ استنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ  $(C_h)$

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$$

$$\text{و } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = u_n + 4$$

(1) تبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = u_0 + 4 = 5$$

(2) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

• كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = v_n - 4 \text{ ومنه } u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \left[5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\right] - \left[5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right] = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n < 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$  .

(4) حساب المجموع  $S_n$  حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (4 + 4 + \dots + 4)$$

$$= v_0 \left[ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right] - 4(n+1) = 15 \times \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] - 4(n+1)$$

$$(5) (w_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } w_n = 5 \left( \frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$

أ- تبيان أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  :

لدينا : المتتالية  $(v_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  ومنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n < v_{n+1}$  ،

$$\text{ومن } v_n + 5 < v_{n+1} + 5 \text{ وبالتالي } \frac{1}{v_{n+1} + 5} < \frac{1}{v_n + 5} \text{ أي } \frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 < \frac{1}{v_n + 5} - 1$$

$$\text{ومن } 5 \left( \frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 \right) < 5 \left( \frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$

إذن :  $w_n < w_{n+1}$  ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، وعليه المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  .

ب- حساب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) = -4 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 4 - w_n) = 0$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$A$  ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(2; -1; 1)$  ،  $B(-1; 2; 1)$  ،  $C(1; -1; 2)$  و  $D(1; 1; 1)$  .

(1) أ- التحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-3; 3; 0)$  و  $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$  و  $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$  بالتالي الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة وبالتالي فهي تعين مستويا .

ب- تبيان أن  $\vec{n}(1; 1; 1)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  .

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \text{ إذن الشعاع } \vec{n}(1; 1; 1) \text{ ناظمي للمستوي } (ABC) .$$

ج- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  :

لدينا :  $\vec{n}(1; 1; 1)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  ومنه معادلة  $(ABC)$  من الشكل  $x + y + z + d = 0$

و  $A \in (ABC)$  يعني  $2 - 1 + 1 + d = 0$  أي :  $d = -2$  وعليه معادلة للمستوي  $(ABC)$  من الشكل :  $x + y + z - 2 = 0$

(2) النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$  .

أ- حساب إحداثيات  $G$  :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + 2x_B - y_C}{1 + 2 - 1} = \frac{2 + 2 \times (-1) - 1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1 + 2 - 1} = \frac{-1 + 2 \times 2 - (-1)}{2} = 2 \\ z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1 + 2 - 1} = \frac{1 + 2 \times 1 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } G \left( -\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2} \right)$$

ب-  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق :  $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MD}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MG}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$$

ومنه المجموعة  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GD]$  .

جـ- إثبات أن معادلة  $(\Gamma)$  هي :  $6x - 4y + 2z + 3 = 0$ .

يكفي إثبات أن :  $I \in (\Gamma)$  و  $\vec{n}' = k \overrightarrow{GD}$  ، بحيث  $I \left( \frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right)$  منتصف القطعة  $[GD]$  و  $\vec{n}'(6; -4; 2)$  شعاع ناظم لـ  $(\Gamma)$

لدينا :  $6x_I - 4y_I + 2z_I + 3 = \frac{6}{4} - 4 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{4} + 3 = 0$  ومنه  $I \in (\Gamma)$  ، ولدينا  $\overrightarrow{GD} \left( \frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2} \right)$  ومنه  $\vec{n}' = 4\overrightarrow{GD}$

(يمكن استخدام طرق أخرى)

(3) تبين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا :  $\vec{n}(1; 1; 1)$  شعاع ناظمي لـ  $(ABC)$  و  $\vec{n}'(6; -4; 2)$  شعاع ناظمي لـ  $(\Gamma)$  .

$\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  .

$$\text{هذه } \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{2}{5}t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ نجد } z = t \text{ ومنه بوضع } \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ المستقيم المعروف : } (\Delta)$$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  .

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

لدينا :  $\Delta = (-6\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 36 = -2 \times 36 = (6i\sqrt{2})^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(1+i) \text{ و } z_1 = \frac{6\sqrt{2} - 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(1-i)$$

(2) لدينا :  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$  ،  $z_B = \overline{z_A}$  ،  $z_C = 6\sqrt{2}$  و  $z_D = \frac{z_C}{2} = 3\sqrt{2}$

أ- كتابة  $z_A$  ،  $z_B$  و  $(1+i)z_A$  على الشكل الأسّي .

لدينا :  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$  ومنه :  $|z_A| = 6$  .

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن :  $z_A = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$  .

و لدينا :  $z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$  و  $(1+i)z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 6e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب- حساب  $\left( \frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$  .

$$\left( \frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left( \frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2014} = e^{i1007\pi} = e^{i(\pi+503 \times 2\pi)} = e^{i\pi} = -1$$

جـ- تبين أن النقط  $O$  ،  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $D$  :

لنثبت أن :  $DO = DA = DB = DC$

لدينا :  $|z_O - z_D| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$  و  $|z_A - z_D| = |3\sqrt{2}(1+i) - 3\sqrt{2}| = |3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$

و  $|z_B - z_D| = |3\sqrt{2}(1-i) - 3\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$  و  $|z_C - z_D| = |6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

ومنه  $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$  وبالتالي النقط  $O, A, B$  و  $C$  تنتمي إلى الدائرة التي مركزها  $D$  و نصف قطرها  $3\sqrt{2}$

د- حساب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{i(3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2})}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = i$$

إيجاد قياس للزاوية  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

طبيعة الرباعي  $OACB$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} CA = CB \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ وبالتالي المثلث } ACB \text{ قائم في } C \text{ و لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \text{ يعني : } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$$

متساوي الساقين ولدينا النقطة  $D$  منتصف القطعة  $[AB]$  لأن  $z_D = \frac{z_A + z_B}{2}$  وكذلك منتصف القطعة  $[OC]$

لأن  $z_D = \frac{z_C}{2}$  ومنه الرباعي  $OACB$  مربع .

(3) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

أ- العبارة المركبة للدوران  $R$  :  $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$  ومنه  $z' = iz$  .

ب- تعيين لاحقة النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$  :  $z_{C'} = iz_C = 6i\sqrt{2}$

• التحقق أن النقط  $A, C$  و  $C'$  في إستقامة :

$$\frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R} \text{ يكفي إثبات أن :}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \frac{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = 2 \text{ ومنه النقط } A, C \text{ و } C' \text{ في إستقامة .}$$

$$z_{A'} = iz_A = i3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}(-1+i) : R \text{ بالدوران } A \text{ صورة } A'$$

تعيين صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$  :

$$z_{B'} = iz_B = i3\sqrt{2}(1-i) = 3\sqrt{2}(1+i) = z_A : R \text{ بالدوران } B \text{ صورة } B'$$

إذن : صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$  هي الرباعي  $OAC'A'$  . لأن :  $R(O) = O, R(A) = A', R(C) = C'$

$$R(B) = A \text{ و}$$

#### حل مقترح التمرين الرابع

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

$$(1) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x}\right) = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (حامل محاور الترتيب) مقارب للمنحنى  $(C_f)$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ : لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ، ومن أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $1 - \ln x$ .

|         |   |     |           |
|---------|---|-----|-----------|
| $x$     | 0 | $e$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +   | 0 -       |

الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0; e]$  ومتناقصة على المجال  $]e; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |               |           |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | 0         | $e$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +             | 0 -       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1 + 2e^{-1}$ | $+\infty$ |

(2) أـ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته :  $y = 1$  .

لدينا :  $f(x) - y = 1 + \frac{2 \ln x}{x} - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$  ، ولأن  $\ln x$  إشارة الفرق من إشارة  $\frac{2}{x} > 0$  من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  .

|              |                        |                                                |                        |
|--------------|------------------------|------------------------------------------------|------------------------|
| $x$          | 0                      | 1                                              | $+\infty$              |
| $f(x) - y$   |                        | -                                              | 0 +                    |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$<br>في النقطة $A(1; 1)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

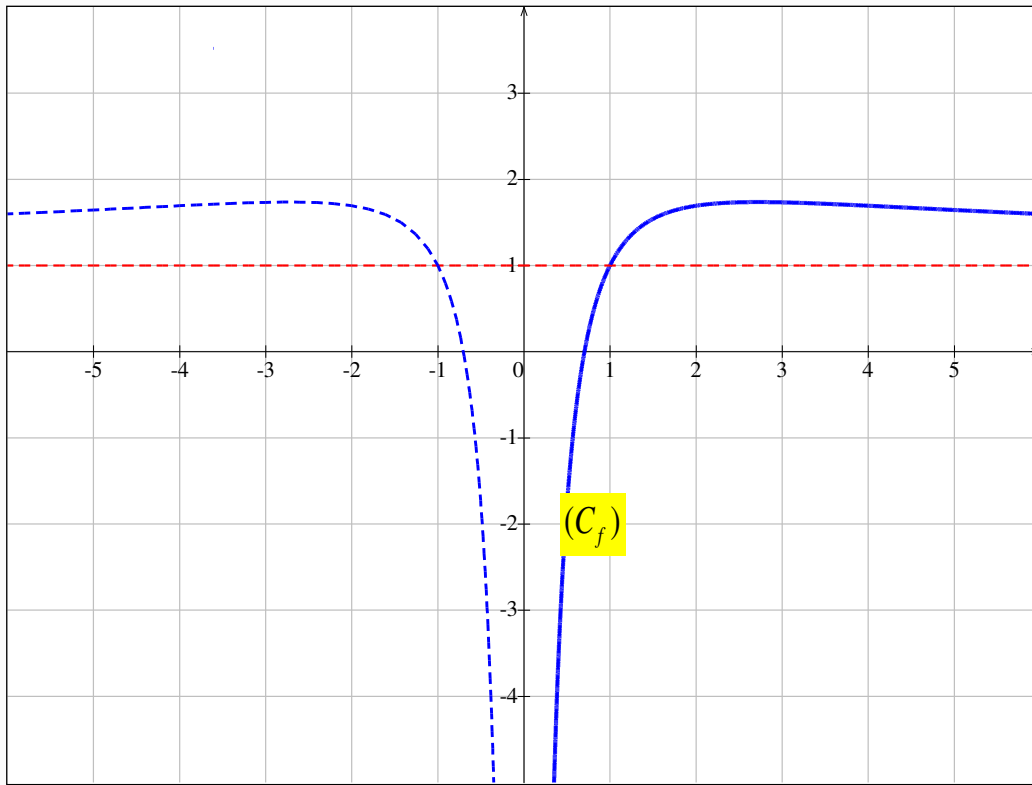
بـ كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا :  $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  و منه  $(T) : y = 2x - 1$  .

جـ تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  ، حيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$  .

الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $]0; 1[$  و  $]e^{-0.4}; e^{-0.3}[ \subset ]0; 1[$  و  $f(e^{-0.4}) \approx -0,2$  و  $f(e^{-0.3}) \approx 0,2$

أي  $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$  .



(4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $h(x) = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|}$ .

أ- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم :

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln|-x|}{|-x|} = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln|x|}{|x|} = 0$$

نستنتج أن الدالة  $h$  زوجية وتمثيلها البياني  $(C_h)$  متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب .

ب- كيفية إنشاء المنحنى  $(C_h)$  اعتماداً على المنحنى  $(C_f)$  :

من أجل  $x \in ]0; +\infty[$  ، يكون  $f(x) = h(x)$  ، وبالتالي  $(C_h)$  منطبق على  $(C_f)$  .

من أجل  $x \in ]-\infty; 0[$  ،  $(C_h)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الترتيب لكون الدالة  $h$  زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

ج- المناقشة البيانية :

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \text{ تكافئ } 2 \ln|x| = (m-1)|x| \text{ تكافئ } 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} = m \text{ أي } h(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_h)$  والمستقيم ذي المعادلة  $y = m$  .

لما  $m \in ]-\infty; 0[$  المعادلة تقبل حلين .

لما  $m \in \left]0; 1 + \frac{2}{e}\right[$  المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما  $m = 1 + \frac{2}{e}$  المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) .

لما  $m \in \left]1 + \frac{2}{e}; +\infty\right[$  المعادلة ليس لها حلول .

حل مقترح التمرين الأول

(I) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

(1) تبين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية:

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} u_n, \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (u_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{e} \text{ وحدها الأول } u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

(2) حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{e} \times \left( \frac{1}{e} \right)^n \right] = 0$$

نستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

(3) حساب المجموع  $S_n$ :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \sqrt{e} \left[ \frac{1 - \left( \frac{1}{e} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} \right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1} (1 - e^{-n-1})$$

(II) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $v_n = \ln(u_n)$

(1) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n \quad \text{ومنه } v_n = \ln(u_n), \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

استنتاج نوع المتتالية  $(v_n)$ :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - (n+1) - \left( \frac{1}{2} - n \right) = -1, \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ حسابية أساسها } r = -1 \text{ وحدها الأول } v_0 = \ln(u_0) = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$$

(2) أ- حساب العدد  $P_n$ :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$\text{ومنه } P_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n \right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث:  $P_n + 4n > 0$

$$P_n + 4n > 0 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1-n^2}{2} + 4n > 0 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1+8n-n^2}{2} > 0 \quad \text{يكافئ} \quad -\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{ولدينا: } -\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0 \quad \text{يكافئ} \quad n \in [0; 8] \quad \text{أي } n \in ]4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}[$$

ومنه مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $P_n + 4n > 0$  هي:  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ .

1) أ. إثبات أن  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية.  $A(1;-1;-2)$ ،  $B(1;-2;-3)$  و  $C(2;0;0)$ .

لدينا:  $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$  و  $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$  و  $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$  بالتالي الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطياً أي أن  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية، إذن فهي تعين مستويًا. بـ كتابة تمثيل وسيطي للمستوي  $(ABC)$ :

بما أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية فإن  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  أساس للمستوي  $(ABC)$ .

$$\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta \\ z = -2 - \alpha + 2\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{من الشكل:}$$

جـ. التحقق أن  $x + y - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة.

$$x_A + y_A - z_A - 2 = 1 - 1 - (-2) - 2 = 0 \quad \text{لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B + y_B - z_B - 2 = 1 - 2 - (-3) - 2 = 0 \quad \text{لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C + y_C - z_C - 2 = 2 + 0 - 0 - 2 = 0 \quad \text{لأن } C \in (ABC)$$

2)  $(P)$  و  $(Q)$  المستويان  $(P): x - y - 2z + 5 = 0$  و  $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$ .

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{إثبات أن } (P) \text{ و } (Q) \text{ يتقاطعان وفق المستقيم } (\Delta) \text{ ذي التمثيل الوسيط:}$$

لدينا:  $\vec{n}(1;-1;-2)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\vec{n}'(3;2;-1)$  شعاع ناظمي لـ  $(Q)$ .

$\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  ليسا مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم.

$$\begin{cases} (t-3) - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0 \\ 3(t-3) + 2(-t) - (t+1) + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{ولدينا:} \quad \text{ومن } (P) \subset (\Delta) \text{ و } (Q) \subset (\Delta) \text{ أي } (P) \cap (Q) = (\Delta).$$

3) تعيين تقاطع المستويات  $(ABC)$ ،  $(P)$  و  $(Q)$ .

لدينا:  $(ABC) \cap (Q) \cap (P) = (\Delta) \cap (ABC)$

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \text{يكافئ } (t-3) + (-t) - (t+1) - 2 = 0 \quad \text{أي } t = -6$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيط لـ  $(\Delta)$  نجد  $(-9;6;-5)$  وهي إحداثيات النقطة  $E$  نقطة تقاطع  $(ABC)$ ،  $(P)$  و  $(Q)$ .

4)  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء. نسمي  $d(M, (P))$  المسافة بين  $M$  و  $(P)$  و  $d(M, (Q))$  المسافة بين  $M$  و  $(Q)$ .

تعيين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  بحيث:  $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$ .

$$|x - y - 2z + 5| = |3x + 2y - z + 10| \quad \text{معناه } \sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 15 = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y - 2z + 5 = 3x + 2y - z + 10 \\ x - y - 2z + 5 = -(3x + 2y - z + 10) \end{cases} \quad \text{أي:}$$

ومنه مجموعة النقط  $(\Gamma)$  هي إتحاد مستويين معادلتهما:  $2x + 3y + z + 5 = 0$  و  $4x + y - 3z + 15 = 0$ .

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \text{ أو } z = i \text{ تكافئ } (z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 2z + 5 = 0$

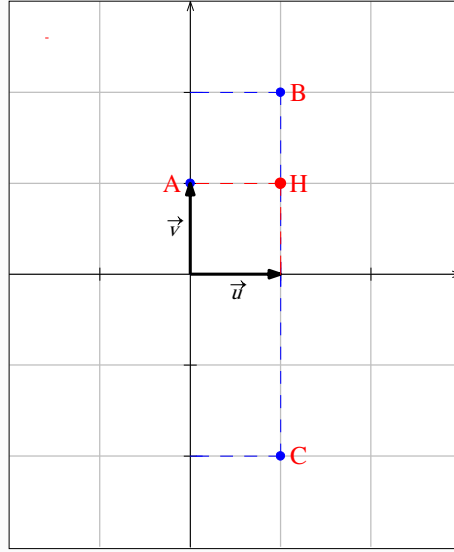
لدينا :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \text{ و } z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$  هي :  $S = \{i; 1-2i; 1+2i\}$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (وحدة الطول 1cm)

تعطى النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقها على الترتيب :  $z_A = i$  ،  $z_B = 1+2i$  ،  $z_C = 1-2i$   
أ. إنشاء النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  :



ب- تعيين  $z_H$  لاحقة النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  :  $z_H = 1+i$

ج- حساب مساحة المثلث  $ABC$  :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2 \text{ cm}^2 \text{ لأن } AH = |z_H - z_A| = |1+i - i| = 1 \text{ و } BC = |z_C - z_B| = |-4i| = 4$$

(3)  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

أ. تعيين الكتابة المركبة للتشابه  $S$  :

$$\text{لدينا : } z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A) \text{ ومنه } z' = \frac{1}{2} i (z - i) + i \text{ أي } z' = \frac{1}{2} iz + \frac{1}{2} + i$$

ب- تبيان أن مساحة صورة المثلث  $ABC$  بالتشابه  $S$  تساوي  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  :

$$S' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_{ABC} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2 \text{ فإن } \frac{1}{2} \text{ هي نسبة التشابه } S$$

(4) تعيين مجموعة النقط  $M$  حيث :  $|z| = |iz + 1 + 2i|$

$$|z| = |z - (i - 2)| \text{ تكافئ } |z| = |z - i + 2| \text{ تكافئ } |z| = |i(z - i + 2)| \text{ تكافئ } |z| = |iz + 1 + 2i|$$

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة  $[OD]$  بحيث  $D$  هي النقطة التي لاحقتها  $z_D = i - 2$

(I)  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$  : كما يلي : الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  .

بـ الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$  .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

(لأن :  $6x^2 - 8x + 7 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$  أولاً : مميز العبارة  $6x^2 - 8x + 7$  سالب ومعامل  $x^2$  موجب تماماً)

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |           |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) أـ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$  .

الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  و  $\begin{cases} g(0,7) \approx -0,37 \\ g(0,8) \approx 0,06 \end{cases}$  أي  $g(0,7) \times g(0,8) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  بحيث  $0,7 < \alpha < 0,8$  .

بـ إشارة  $g(x)$  :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$  : كما يلي : الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  .

(2) أـ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} = f(x)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-3x}{4x^2} \right] = 0$$

بـ لدينا :  $y = \frac{1}{2}(x+1)$  ذو المعادلة  $(\Delta)$  ومنه المستقيم  $(C_f)$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  .

جـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - y = f(x) - \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$  ومنه إشارة الفرق  $f(x) - y$  من إشارة  $1-3x$  :

|              |                        |                                                                               |                        |
|--------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $x$          | $-\infty$              | $\frac{1}{3}$                                                                 | $+\infty$              |
| $f(x) - y$   | -                      | 0                                                                             | +                      |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$<br>في النقطة $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

(3) أ. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(2x^2 - 2x + 1) - (4x - 2)(x^3 - 2x + 1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

ب. إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x \cdot g(x)$  :

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |     |     |
|---------|-----------|-----|----------|-----------|-----|-----|
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$      | $-$       | $0$ | $+$ |

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | 0                                                                                                                                                                                                                                            |   | $\alpha$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|-----------|---|
| $f'(x)$ |           | +                                                                                                                                                                                                                                            | 0 | -        | 0         | + |
| $f(x)$  |           | <div><div><div><math>-\infty</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div>1</div></div><div><div><math>\searrow</math></div><div><math>f(\alpha)</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>+\infty</math></div></div></div> |   |          |           |   |

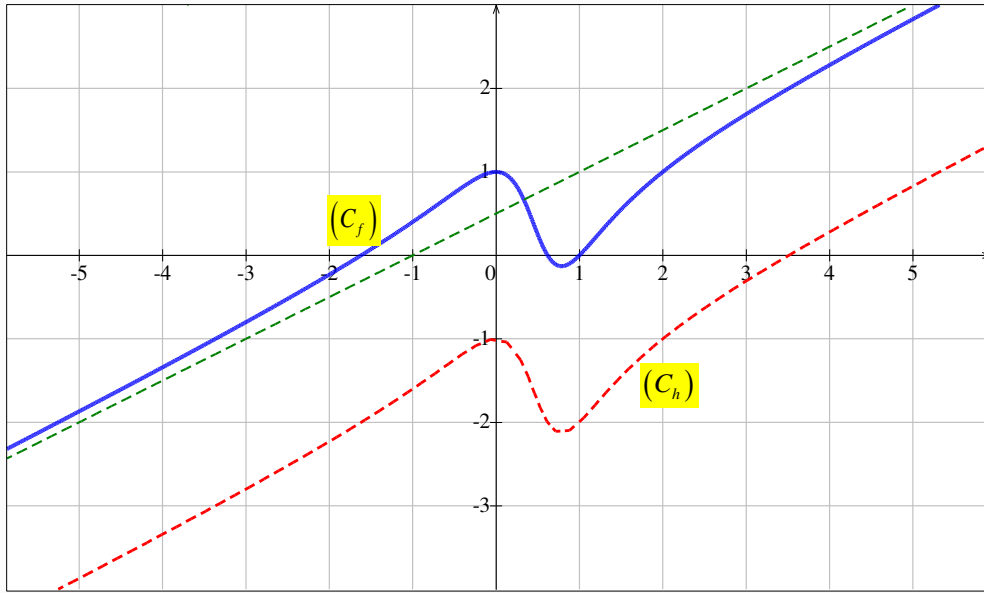
(4)  $f(1) = 0$ .

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$  :

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x^3 - 2x + 1 = 0 \text{ تكافئ } x^3 - 2x + 1 = 0 \text{ تكافئ } (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\text{إذن حلول المعادلة } f(x) = 0 \text{ هي : } \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

(5) الرسم :



(6)  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

أ. التحقق : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

ب. المنحنى  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(0; -2)$ .

الرسم : أنظر الشكل السابق.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:  $A(2; 1; 0)$ ،  $B(1; 2; 2)$ ،  $C(3; 3; 1)$  و  $D(1; 1; 4)$ .
- (1) تحقق أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا وأن  $x - y + z - 1 = 0$  معادلة ديكارتية له.
  - (2) بين أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع، ثم تحقق أن مساحته هي  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  وحدة مساحة.
  - (3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  العمودي على المستوي  $(ABC)$  والذي يشمل النقطة  $D$ .
  - (4) النقطة  $E$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$   
أ عين إحداثيات النقطة  $E$  ثم أحسب المسافة بين النقطة  $D$  و المستوي  $(ABC)$ .
  - ب- عين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمتان  $(ABC)$  في النقطة  $E$  ونصف قطر كل منهما  $\sqrt{3}$
  - (5) أحسب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$ .

التمرين الثاني (4,5 ن)

- (I) عين العددين المركبين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث: 
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع  $\bar{\alpha}$  مرافق  $\alpha$  و  $\bar{\beta}$  مرافق  $\beta$ .
- (II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  النقط التي لواحقها على الترتيب: 
$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{3}}$$
- (1) أ- أكتب  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$  حقيقيا سالبا.
- ب- تحقق أن العدد المركب 
$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$
 حقيقي.
- (2)  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $z_D = 1 + i$   
أ حدد النسبة وزاوية للتشابه  $S$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $D$  إلى  $A$ .
- ب- أكتب  $\frac{z_A}{z_D}$  على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من:  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .
- (3) عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي تحقق:  $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$  حيث  $k$  يمسح  $\mathbb{R}^+$ .

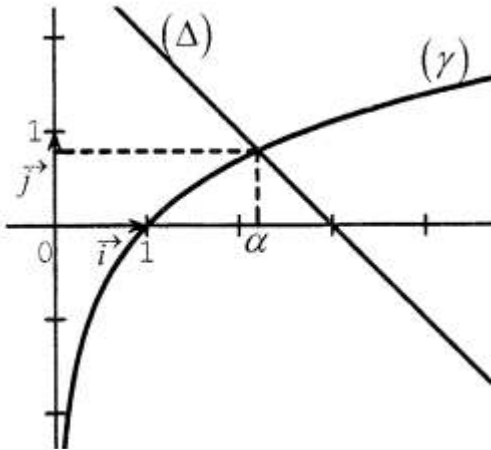
التمرين الثالث (4,5 ن)

- $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = e^2 - 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$ .
- (1) أحسب:  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$ .
  - (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $1 + u_n > 0$ .
  - (3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.
  - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = 3(1 + u_n)$   
أ أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ. أكتب  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

جـ. بين أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :  $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

### التمرين الرابع (5,6 ن)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(I)  $(\gamma)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$  و  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 3$  هي فاصلة نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(\gamma)$  .

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية  $(\gamma)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  على  $]0; +\infty[$  .

(2)  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x - 3 + \ln x$  .

إستنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  .

(3) تحقق أن :  $2, 2 < \alpha < 2, 3$  .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  .

(2) أثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(3) بين أن :  $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$  ، ثم إستنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .

(4) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ  $(C_f)$  على المجال  $]0; e^2]$  .

(III)  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  والتي تحقق :  $F(1) = -3$  .

(1) بين أن منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما .

(2) بين أن  $x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln x$  على  $]0; +\infty[$  ، ثم إستنتج عبارة الدالة  $F$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4 ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(2; 4; 1)$  ،  $B(0; 4; -3)$  ،  $C(3; 1; -3)$  ،  $D(1; 0; -2)$  .  
أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية :

(1) النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية .

(2)  $2x + 2y - z - 11 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .

(3) النقطة  $E(3; 2; -1)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$  .

(4) المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  من نفس المستوي .

(5) تمثيل وسيطي للمستقيم  $(CD)$  :  $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} , t \in \mathbb{R}$  .

(6) يوجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث النقطة  $I(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5})$  مرجح الجملة  $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$  .

### التمرين الثاني (5ن)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لواحقها على الترتيب :

$$z_C = -(z_A + z_B) \quad , \quad z_B = -\overline{z_A} \quad , \quad z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{حيث } z_C \text{ و } z_B , z_A$$

(1) أ- أكتب كلا من العددين المركبين  $z_C$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

ب- استنتج أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .  
ج- أنشئ الدائرة  $(\gamma)$  والنقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

$$(2) \text{ أتحقق أن : } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب- استنتج أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع وأن النقطة  $O$  مركز ثقل هذا المثلث .

ج- عيّن وأنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$  .

(3) أ- عيّن زاوية للدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $C$  إلى  $A$  .

ب- أثبت أن صورة  $(E)$  بالدوران  $r$  هي محور القطعة  $[OB]$  .

### التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(I)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

(1) عيّن اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  .

(2) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$  ذي المعادلة :  $y = x$  .

(3) مثل  $(C_f)$  و  $(D)$  على المجال  $[0; 6]$  .

(II) نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  و  $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  و  $v_0, v_1, v_2, v_3$  دون حسابها.

ب- خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

(2) أ- أثبت أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $2 \leq u_n < \alpha$  و  $\alpha < v_n \leq 5$  حيث :  $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

(3) أ- أثبت أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج- استنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  ، ثم حدد نهاية كل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

### التمرين الرابع (6ن)

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$  .

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  ، ثم تحقق أن :  $0,36 < \alpha < 0,37$  .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(II)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أـبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$ .

بـ. إستنتج أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -\alpha]$  ومتزايدة تماما على  $[-\alpha; +\infty[$ .

(2) أحسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$  وعند  $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x + 1$ .

(5) أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ  $f(-\alpha) \approx 0,1$ .

(6) أـ تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ .

بـ. إستنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

$A, B, C$  و  $D$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(2;1;0)$ ،  $B(1;2;2)$ ،  $C(3;3;1)$  و  $D(1;1;4)$ .

(1) التحقق أن النقط  $A, B, C$  تعين مستويا :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$  و  $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$  و  $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$  وبالتالي الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط  $A, B$  و  $C$  ليست في استقامة إذن فهي تعين مستويا .

• التحقق أن :  $x - y + z - 1 = 0$  معادلة للمستوي  $(ABC)$  :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A, B, C$  تحقق المعادلة المعطاة .

$$x_A - y_A + z_A - 1 = 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B - y_B + z_B - 1 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C - y_C + z_C - 1 = 3 - 3 + 1 - 1 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) تبيان أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ،  $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$  و  $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$  ومنه  $AB = AC = BC = \sqrt{6}$  وبالتالي المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع.

• التحقق أن مساحة  $ABC$  هي :  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  وحدة مساحة

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6})^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  العمودي على المستوي  $(ABC)$  والذي يشمل النقطة  $D$  :

$(\Delta) \perp (ABC)$  معناه  $\vec{n}(1;-1;1)$  الناظمي لـ  $(ABC)$  هو شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$ .

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{من الشكل :}$$

(4) النقطة  $E$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوى  $(ABC)$

أ. تعيين إحداثيات النقطة  $E$  :

النقطة  $E$  هي نقطة تقاطع المستوي  $(ABC)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ أي } t = -1$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطى لـ  $(\Delta)$  نجد  $(0; 2; 3)$  وهي إحداثيات النقطة  $E$  .

• حساب المسافة بين النقطة  $D$  و المستوى  $(ABC)$  :

$$d(D, (ABC)) = \frac{|x_D - y_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

ب. تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمتان  $(ABC)$  في النقطة  $E$  ونصف قطر كل منهما  $\sqrt{3}$  :

لدينا :  $d(D, (ABC)) = \sqrt{3}$  ومنه إحدى الكرتين مركزها  $D$  والأخرى مركزها  $D'$  نظيرة  $D$  بالنسبة لـ  $E$  .

لدينا  $E$  منتصف  $[DD']$  ومنه  $\overrightarrow{ED'} = -\overrightarrow{ED}$  أي  $\overrightarrow{ED'} = \overrightarrow{DE}$  ،

و  $\overrightarrow{DE}(-1; 1; -1)$  و  $\overrightarrow{ED'}(x_{D'}; y_{D'} - 2; z_{D'} - 3)$  ومنه بالمطابقة نجد :  $D'(-1; 3; 2)$  .

(5) حساب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$  .

$$h = d(D, (ABC)) = \sqrt{3} \text{ بحيث } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \text{ ومنه :}$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$$(I) \text{ تعيين العددين المركبين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث : } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{وبالجمع طرف لطرف نجد : } 4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{أي : } \alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبتعويض قيمة } \alpha \text{ نجد : } \beta = i\sqrt{3}$$

$$(II) \text{ } A, B \text{ و } C \text{ النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_B = \bar{z}_A, z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} .$$

(1) أ. كتابة  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الأسى :

$$\text{لدينا : } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه : } |z_A| = \sqrt{3}$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ إذن : } z_A = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

ولدينا:  $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$  أي  $z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

• تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$  حقيقيا سالبا :

لدينا:  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$  حقيقي سالب معناه  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$

$\arg\left[e^{i\frac{n\pi}{3}}\right] = \pi + 2k\pi$  يكافئ  $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi$

يكافئ  $n = 6k + 3 / k \in \mathbb{N}$

ب- التحقق أن العدد المركب  $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$  حقيقي :

$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015} + \left(e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^{1962} - \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1435} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} + e^{i\pi} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3} - 1$

(2)  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $1+i$

أ- تحديد النسبة وزاوية للتشابه  $S$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $D$  إلى  $A$  :

لدينا:  $\begin{cases} S(O) = O \\ S(D) = A \end{cases}$  ومنه  $z_A - z_O = ke^{i\theta}(z_D - z_O)$  ومنه نسبة التشابه  $S$  هي:  $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right|$

وزاوية التشابه  $S$  هي  $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)$

ولدينا:  $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$  ومنه  $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$  و  $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \frac{7\pi}{12}$

ب- كتابة  $\frac{z_A}{z_D}$  على الشكل الجبري :

$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-3}{4} + i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$

• إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  :

لدينا:  $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  وبالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

أي:  $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$  ومنه  $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}-3)}{4\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{4\sqrt{6}} \end{cases}$

(3) تعيين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي تحقق:  $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$  حيث  $k \in \mathbb{R}^+$

$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$  تكافئ  $z = k z_D e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$  تكافئ  $z = k z_A$  تكافئ  $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OA}$  و  $k \in \mathbb{R}^+$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = e^2 - 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ .  
حساب  $u_1, u_2, u_3$ :

$$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1, \quad u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = e^2 \times e^{-2} - 1 = 0$$

$$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $1+u_n > 0$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $1+u_n > 0$ ".  
• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0 = e^2 - 1$  ومنه  $1+u_0 > 0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي:  $1+u_n > 0$ , ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $1+u_{n+1} > 0$ .  
لدينا حسب الفرض  $1+u_n > 0$  ولدينا  $1+u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$  ومنه  $1+u_{n+1} > 0$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.  
• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $1+u_n > 0$ .

(3) تبين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = (1+u_n)e^{-2} - 1 - u_n = (1+u_n)e^{-2} - (1+u_n) = (1+u_n)(e^{-2} - 1)$ ,  
وبما أنه  $1+u_n > 0$ , من أجل كل عدد طبيعي  $n$ , و  $e^{-2} - 1 < 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.  
- المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد  $-1$ , إذن فهي متقاربة.

(4) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = 3(1+u_n)$

أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_{n+1} = 3(1+u_{n+1}) = 3(1+u_n)e^{-2} = e^{-2}v_n$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = e^{-2}$  وحدها الأول:  $v_0 = 3(1+u_0) = 3e^2$ .

بـكتابة عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$ :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = v_0 \times q^n = 3e^2 \times (e^{-2})^n = 3e^{-2n+2}$  ومنه  $v_n = 3e^{-2n+2}$

• كتابة عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = 3(1+u_n)$  ومنه  $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$  أي  $u_n = \frac{1}{3}(3e^{-2n+2}) - 1 = e^{-2n+2} - 1$ .

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-2n+2} - 1) = -1$$

جـ- تبين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :  $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = (3 \times e^2)^{n+1} (e^{-2})^{0+1+2+\dots+n} = (3 \times e^2)^{n+1} (e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}} = (3 \times e^2)^{n+1} e^{-n(n+1)} = (3e^{2-n})^{n+1}$$

ومنه  $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$  أي  $\ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n) = (n+1)\ln(3e^{2-n})$

(يمكن استخدام طرق أخرى)

(I) (γ) التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$  و (Δ) المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 3$  ،  $\alpha$  هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .  
(1) بقرأة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال  $]0; +\infty[$  :

من أجل  $x \in ]0; \alpha[$  ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  ، (γ) يقع فوق (Δ) .

(2) إشارة  $g(x)$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ |   | -        | 0 +       |

(3) التحقق أن :  $2,2 < \alpha < 2,3$  .

لدينا :  $\begin{cases} g(2,2) \approx -0,011 \\ g(2,3) \approx 0,13 \end{cases}$  ومنه  $g(2,2) \times g(2,3) < 0$  أي  $2,2 < \alpha < 2,3$  .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$  .

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 2) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty \end{cases} \quad \text{و : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{-3 + x + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -           | 0 +       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

(3) تبين أن :  $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$  :

لدينا :  $g(\alpha) = 0$  أي  $\ln \alpha = -\alpha + 3$  وبالتالي :  $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$  .

إستنتاج حصر للعدد  $f(\alpha)$  :

$$\frac{(1,2)^2}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{(1,3)^2}{2,2} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{1}{2,3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,3} \\ 1,2 < \alpha-1 < 1,3 \\ (1,2)^2 < (\alpha-1)^2 < (1,3)^2 \end{cases} \text{ لدينا : } 2,2 < \alpha < 2,3 \text{ يكافئ :}$$

$$\text{ومنه : } -\frac{(1,3)^2}{2,2} < f(\alpha) < -\frac{(1,2)^2}{2,3} \text{ أي : } -0,76 < f(\alpha) < -0,62$$

(4) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

لندرس إشارة  $f(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

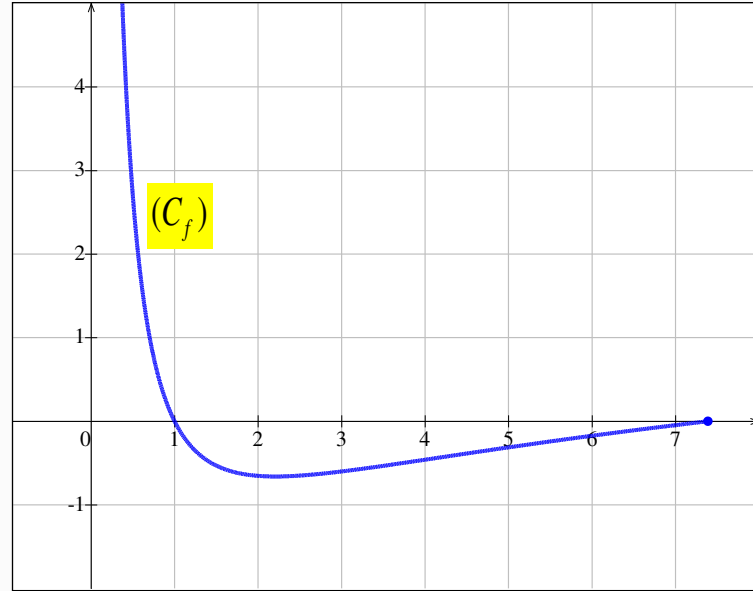
$$\text{لدينا : } f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2 + \ln x)$$

| $x$    | 0 | 1 | $e^2$ | $+\infty$ |
|--------|---|---|-------|-----------|
| $f(x)$ | + | 0 | -     | +         |

ومنه  $(C_f)$  فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين  $]e^2; +\infty[$  و  $]0; 1[$  وتحت على المجال  $]1; e^2[$ ، ويتقاطعان في

النقطتين ذات الفاصلتين 1 و  $e^2$ .

الرسم :



(III) الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  والتي تحقق:  $F(1) = -3$ .

(1) تبين أن منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

$F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  يعني : من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$ ،  $F'(x) = f(x)$ .

$F'(x) = 0$  تكافئ  $f(x) = 0$  تكافئ :  $x = 1$  أو  $x = e^2$ ، ومنه منحنى الدالة  $F$  يقبل مماسين موازيين لحامل

محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و  $e^2$ .

(2) تبين أن  $x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $\ln x$  على  $]0; +\infty[$  :

نضع :  $u(x) = x \ln x - x$

الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$ ،  $u'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$ .

ومنه الدالة  $u$  هي دالة أصلية للدالة  $\ln x$  على  $]0; +\infty[$ .

استنتاج عبارة الدالة  $F$  :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left( \ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t} \right) dt = \left[ t \ln t - t - 2t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 - 2 \ln t \right]_1^x = (2+x) \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 3x$$

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(2; 4; 1)$ ،  $B(0; 4; -3)$ ،  $C(3; 1; -3)$ ،  $D(1; 0; -2)$ .  
الإجابة: بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة:

(1) النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية. — صحيح  
التبرير:

لدينا:  $\overrightarrow{AB}(-2; 0; -4)$  و  $\overrightarrow{AC}(1; -3; -4)$  و  $\frac{0}{-3} \neq \frac{-2}{1}$  وبالتالي الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطياً أي أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية.

(2)  $2x + 2y - z - 11 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ . — صحيح  
التبرير:

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة.

$$2x_A + 2y_A - z_A - 11 = 2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B + 2y_B - z_B - 11 = 2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C + 2y_C - z_C - 11 = 2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(3) النقطة  $E(3; 2; -1)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ . — خطأ  
التبرير:

لدينا:  $\overrightarrow{DE}(2; 2; 1)$  و  $\vec{n}(2; 2; -1)$  ناظمي للمستوي  $(ABC)$ .

لاحظ أن  $\overrightarrow{DE}$  و  $\vec{n}$  ليسا مرتبطين خطياً وبالتالي  $\overrightarrow{DE}$  ليس ناظماً للمستوي  $(ABC)$ .  
(4) المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  من نفس المستوي. — خطأ  
التبرير:

$$2x_D + 2y_D - z_D - 11 \neq 0 \text{ لأن } D \notin (ABC)$$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5) \quad \text{تمثيل وسيطي للمستقيم } (CD). \text{ — صحيح}$$

التبرير:

إحداثيات كلا من النقطتين  $C$  و  $D$  تحقق التمثيل الوسيطي.

لأن: بتعويض إحداثيات  $C$  في التمثيل الوسيطي نجد  $t = 2$  و بتعويض إحداثيات  $D$  في التمثيل الوسيطي نجد  $t = 1$ .

(6) يوجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث النقطة  $I(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5})$  مرجح الجملة  $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ . — صحيح  
التبرير:

لدينا:  $\overrightarrow{IA}(\frac{7}{5}; 0; \frac{14}{5})$  و  $\overrightarrow{IB}(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{6}{5})$  ومنه  $\overrightarrow{IA} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$  أي  $3\overrightarrow{IA} + 7\overrightarrow{IB} = \vec{0}$  إذن:  $(\alpha; \beta) = (3; 7)$ .

حل مقترح التمرين الثاني

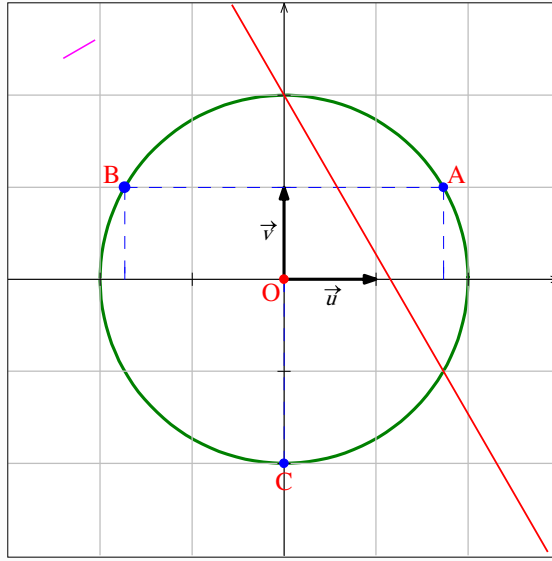
$$z_C = -(z_A + z_B) \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(1) أ. كتابة كلا من العددين المركبين  $z_C$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي:

$$z_B = \overline{z_A} = e^{i\pi} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C = -(z_A + z_B) = -(z_A - \overline{z_A}) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

بـ استنتاج أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .  
 لدينا :  $|z_B| = |z_C| = |z_A| = 2$  وهذا يعني :  $OA = OB = OC = 2$  وبالتالي النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\gamma)$  التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 2 .  
 جـ الرسم :



$$(2) \text{ أـ التحقق أن : } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{-\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بـ استنتاج أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = BC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ يكافئ } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

• إثبات أن النقطة  $O$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  :

لدينا :  $z_A + z_B + z_C = z_A + z_B - (z_A + z_B) = 0$  ومنه  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  وبالتالي  $O$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  .

جـ تعيين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$  .

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i| \text{ تكافئ } |z| = |z - (\sqrt{3} + i)| \text{ تكافئ } OM = AM$$

وبالتالي مجموعة النقط  $(E)$  هي محور القطعة  $[OA]$  .

إنشاء المجموعة  $(E)$  : أنظر الشكل .

(3) أـ تعيين زاوية الدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $C$  إلى  $A$  .

$$\left\{ \begin{array}{l} r(O) = O \\ r(C) = A \end{array} \right. \text{ لدينا : ومنه } z_A - z_O = e^{i\theta} (z_C - z_O) \text{ ومنه زاوية الدوران } r \text{ هي } \theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ ومنه } \frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

بـ إثبات أن صورة  $(E)$  بالدوران  $r$  هي محور القطعة  $[OB]$  :

$$\text{لدينا : } r(O) = O \text{ و } r(A) = B \text{ لأن : } z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

بالدوران  $r$  هي محور القطعة  $[OB]$  ، كون الدوران يحافظ على المنتصفات وعلى التعامد .

(I) الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

(1) تعيين اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  و  $f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

لدينا: من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .

(2) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$  ذي المعادلة:  $y = x$ .

لدينا:  $f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x+1}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $-x^2 + 3x + 1$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

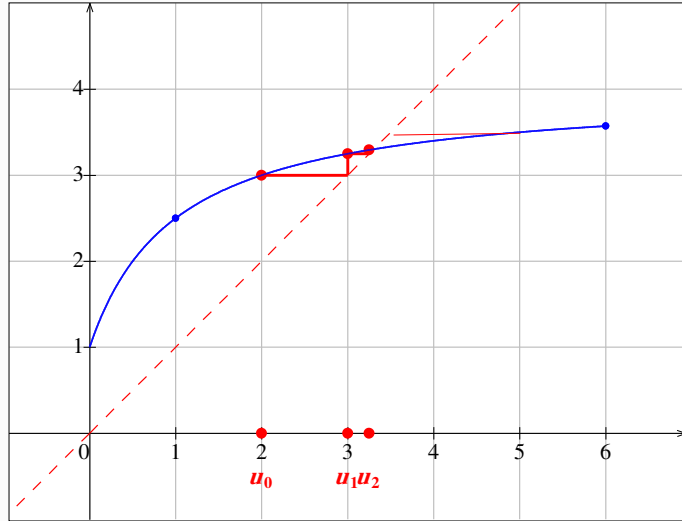
المعادلة  $-x^2 + 3x + 1 = 0$  تقبل في المجال  $[0; +\infty[$  حلا  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ . بحيث:

| $x$        | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|------------|---|----------|-----------|
| $f(x) - x$ | + | 0        | -         |

على المجال  $[0; \alpha[$ :  $(C_f)$  يقع فوق  $(D)$ .

على المجال  $]\alpha; +\infty[$ :  $(C_f)$  يقع تحت  $(D)$ .

(3) الرسم:



(II) نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  و  $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ- الرسم: أنظر الشكل.

ب- التخمين: المتتالية  $(u_n)$  متزايدة والمتتالية  $(v_n)$  متناقصة وكلاهما تتقارب نحو العدد  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ .

(2) أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $2 \leq u_n < \alpha$  و  $\alpha < v_n \leq 5$  حيث:  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ .

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $2 \leq u_n < \alpha$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $2 \leq u_n < \alpha$ ".

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 2$  ومنه  $2 \leq u_0 < \alpha$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$ : أي:  $2 \leq u_n < \alpha$ ، و نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $2 \leq u_{n+1} < \alpha$ .

لدينا حسب الفرض  $2 \leq u_n < \alpha$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  فإن  $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$

أي  $\alpha < u_{n+1} \leq 3 \leq 2$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2 \leq u_n < \alpha$  .

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $\alpha < v_n \leq 5$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\alpha < v_n \leq 5$  "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n=0$  ، لدينا  $v_0 = 5$  ومنه  $\alpha < v_0 \leq 5$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $\alpha < v_n \leq 5$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $\alpha < v_{n+1} \leq 5$  .

لدينا حسب الفرض  $\alpha < v_n \leq 5$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  فإن  $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$

أي  $\alpha < v_{n+1} \leq \frac{7}{2} \leq 5$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $\alpha < v_n \leq 5$  .

بـ استنتاج اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \in [2; \alpha[$  . ومن أجل  $x \in ]0; \alpha[$  :  $f(x) - x > 0$  ومنه :  $u_{n+1} - u_n > 0$  .

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً .

ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n \in ]\alpha; 5]$  . ومن أجل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  :  $f(x) - x < 0$  ومنه :  $v_{n+1} - v_n < 0$  .

وبالتالي المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماماً .

(3) أـ إثبات أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$  .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{1+4v_n}{1+v_n} - \frac{1+4u_n}{1+u_n} = \frac{3(v_n - u_n)}{(1+v_n)(1+u_n)}$  ،

ومن جهة أخرى :  $\begin{cases} u_n \geq 2 \\ v_n \geq 2 \end{cases}$  يكافئ  $\frac{3}{(1+v_n)(1+u_n)} \leq \frac{1}{3}$  ومنه  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$  .

بـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$  ، وهذا يعني :

$$\begin{cases} v_1 - u_1 \leq \frac{1}{3}(v_0 - u_0) \\ v_2 - u_2 \leq \frac{1}{3}(v_1 - u_1) \\ \dots \\ \dots \\ v_n - u_n \leq \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد  $(v_1 - u_1)(v_2 - u_2) \dots (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0)(v_1 - u_1) \dots (v_{n-1} - u_{n-1})$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  . (يمكن استخدام البرهان بالتراجع)

ومن جهة أخرى لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < \alpha$  و  $\alpha < v_n$  ومنه  $v_n - u_n > 0$  .

وبالتالي : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- لدينا ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$  ومنه نستنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

النهاية المشتركة للمتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  هي العدد الحقيقي  $l$  الذي يحقق :  $f(l) = l$

إذن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \alpha$

### حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) < 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left( \frac{1 - 2x}{2x - 2} - \frac{e^{2x-2}}{2x - 2} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$

التحقق أن :  $0,36 < \alpha < 0,37$

لدينا :  $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$  أي :  $g(0,36) \times g(0,37) < 0$  ومنه  $0,36 < \alpha < 0,37$

(3) إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ |           | 0        | -         |

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

(1) أ- تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{2x+2} g(-x)$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2} (1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2} (1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2} g(-x)$$

ب- إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(-x)$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | 0         | +         |

نستنتج أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -\alpha]$  و متزايدة على  $[-\alpha; +\infty[$

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | 0            | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(-\alpha)$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

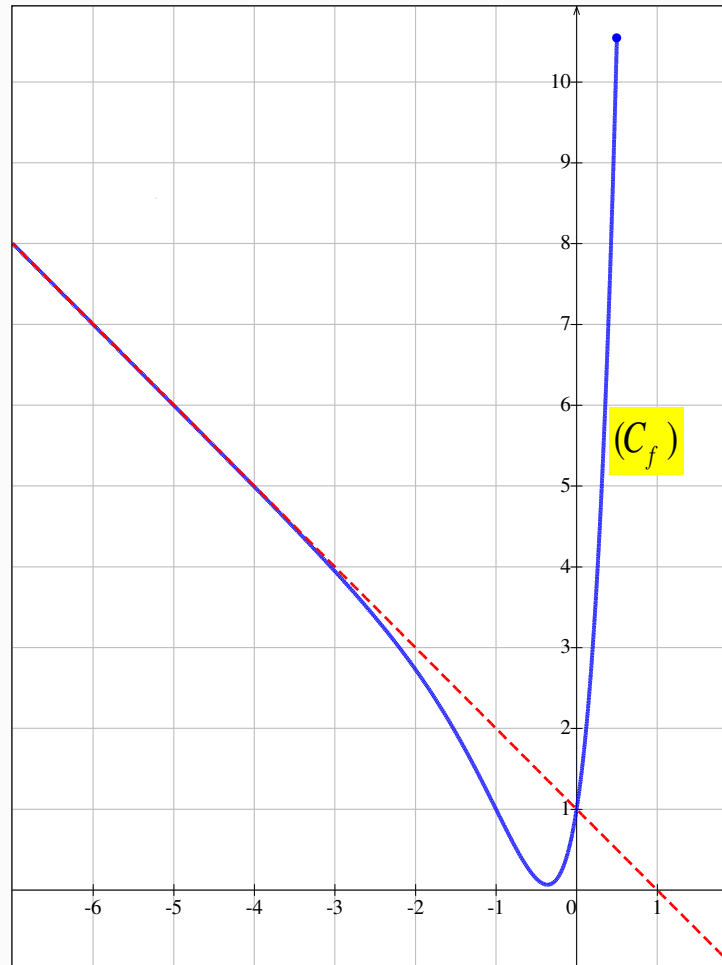
التفسير الهندسي: المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

(4) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ :

لدينا:  $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $x$ .

| $x$          | $-\infty$                                                                                    | 0 | $+\infty$ |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $f(x) - y$   | -                                                                                            | 0 | +         |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ / $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;1)$ / $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |   |           |

(5) الرسم:



(6) أ. التحقق: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

ب. إستنتاج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

لدينا: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ .

$$\text{ومنهم } f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2}$$

وبالتالي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  من الشكل:  $F(x) = \frac{1}{2} \left[ -f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c$

$$\text{أي: } F(x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c$$

## الموضوع الأول

### التمرين الأول (4 ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(P')$  معادلتيهما على الترتيب:

$$x - 2y + z - 2 = 0 \quad \text{و} \quad 2x + y - z + 1 = 0$$

(1) بين أن المستويين  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعان.

(2) عيّن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:  $d(M, (P)) = d(M, (P'))$ .

حيث  $d(M, (P))$  المسافة بين النقطة  $M$  والمستوي  $(P)$  و  $d(M, (P'))$  المسافة بين النقطة  $M$  والمستوي  $(P')$ .

(3) تحقق أن النقطة  $A(1; 2; 0)$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$ .

(4)  $H$  و  $H'$  المسقطان العموديان للنقطة  $A$  على المستويين  $(P)$  و  $(P')$  على الترتيب.

أ- جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين  $(AH)$  و  $(AH')$ .

ب- استنتج إحداثيات كل من النقطتين  $H$  و  $H'$ .

(5) عيّن إحداثيات النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[HH']$  ثم أحسب مساحة المثلث  $AHH'$ .

### التمرين الثاني (5 ن)

(I)  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \sqrt{2x + 8}$ .

و  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى  $(C)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  الذي:  $y = x$  معادلة له.

(3) أرسم  $(C)$  و  $(\Delta)$ .

(II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 \leq u_n < 4$ .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ .

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$ .

د- استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### التمرين الثالث (4,5 ن)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي لاحقته العدد المركب  $z$  حيث  $(z \neq 1)$  نرفق النقطة  $M'$  لاحقته العدد المركب  $z'$  حيث:  $z' = \frac{z-2}{z-1}$ .
- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :  $z' = z$ .
  - النقطتان  $A$  و  $B$  لاحقتهما  $z_1$  و  $z_2$  على الترتيب حيث:  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = \overline{z_1}$ .
    - أكتب  $\frac{z_2}{z_1}$  على الشكل الأسّي.
    - بين أن النقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  الذي مركزه المبدأ  $O$ ، يطلب تعيين زاوية له.
  - نضع:  $z' \neq z$ . نعتبر النقطتين  $C$  و  $D$  لاحقتهما 2 و 1 على الترتيب.
    - عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  حيث  $M'$  تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ  $(\Gamma)$ .
    - $h$  التحاكي الذي مركزه المبدأ  $O$  ونسبته 2.
    - أعين طبيعة التحويل النقطي  $S = h \circ R$  وعناصره المميزة.
    - أكتب العبارة المركبة للتحويل  $S$ .
    - عين ثم أنشئ المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $S$ .

### التمرين الرابع (5,6 ن)

- الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ .
    - أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .
    - أحسب  $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$ .
- الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ .
    - و  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
      - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
      - أبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،
        - بشكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .
        - أكتب معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  في النقطة التي فاصلتها 1.
        - بين أن  $(C)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  حيث:  $y = x - 1$  معادلة له.
        - بأدرس الوضع النسبي لـ  $(C)$  و  $(\Delta)$ .
        - أرسم المستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$  ثم المنحنى  $(C)$ .
        - $m$  عدد حقيقي.  $(\Delta_m)$  المستقيم حيث:  $y = mx - m$  معادلة له.
          - أتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي، النقطة  $A(1; 0)$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta_m)$ .
          - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = mx - m$ .
          - أجد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على المجال  $]0; +\infty[$ .
      - بأحسب  $I_n$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$ ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 1$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  حيث  $n$  عدد طبيعي  $(n > 1)$ .
      - عين أصغر عدد طبيعي  $n_0$  بحيث إذا كان  $n > n_0$  فإن  $I_n > 2$ .

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقطتين  $A(5; -1; -2)$  و  $B(3; 12; -7)$  .

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta)$$

(1) أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta')$  الذي يشمل النقطة  $A$  و  $\vec{u}(-2; 1; 1)$  شعاع توجيه له .

ب- بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متعامدان وأن النقطة  $C(1; 1; 0)$  نقطة تقاطعهما .

(2)  $(P)$  المستوي المعين بالمستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

أ- بين أن الشعاع  $\vec{n}(2; 1; -7)$  ناظمي للمستوي  $(P)$  ، ثم جد معادلة ديكارتية له .

ب- بين أن النقطة  $C$  هي المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستوي  $(P)$  .

$$\begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \end{cases} \quad (3)$$

أ- أثبت أن المجموعة  $(P')$  هي مستو ثم تحقق أن  $13x - y - 2z - 41 = 0$  هي معادلة ديكارتية له .

ب- عين إحداثيات  $D$  و  $E$  نقطتي تقاطع المستوي  $(P')$  مع المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  على الترتيب .

ج- أحسب حجم رباعي الوجوه  $BCDE$  .

$$f(x) = \frac{5x}{x+2} \quad \text{I} \quad f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } [0; +\infty[ \text{ بـ :}$$

$$(1) \text{ أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) .$$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $f(x) \geq 0$  .

$$(II) \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ : } u_0 = 1 , \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 3$  .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة .

$$(2) (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = 1 - \frac{3}{u_n} .$$

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$  يطلب تعيين حدّها الأول .

ب- أكتب بدلالة  $n$  عبارة  $v_n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  .

$$\text{ج- أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n .$$

$$(3) \text{ أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} .$$

### التمرين الثالث (4,5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

$A, B$  و  $C$  ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب :  $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ،  $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $z_C = \overline{z_B}$

أ- أكتب  $z_A, z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب- بين أنه يوجد تشابه مباشر  $S$  مركزه  $B$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $A$  يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) أ- عين لاحقة النقطة  $D$  حتى يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع ، ثم حدد بدقة طبيعته.

ب- عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق :  $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$

ج- عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق :  $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$  عندما  $\theta$  يتغير على  $\mathbb{R}$  ، ثم تحقق

أن  $A \in (\Gamma)$

### التمرين الرابع (7 ن)

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حلين في  $\mathbb{R}$  ، أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث :  $-1.52 < \alpha < -1.51$

ب- استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = -g(x)$

ج- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  . (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0.38$ )

د- عين دون حساب :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  .

ج- بين أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

د- أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $[-2; +\infty]$  .

هـ- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$  على المجال  $[-2; +\infty]$

(III)  $h$  و  $H$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = x + f(x)$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

(1) عين الأعداد الحقيقية  $a, b$  و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) أ- أحسب التكامل التالي :  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$  ، حيث  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما وفسر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

حل مقترح التمرين الأول

المستويان  $(P)$  و  $(P')$  معادلتهما على الترتيب:  $2x + y - z + 1 = 0$  و  $x - 2y + z - 2 = 0$ .  
(1) تبيان أن المستويين  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعان:

لدينا:  $\vec{n}(2;1;-1)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\vec{n}'(1;-2;1)$  شعاع ناظمي لـ  $(P')$ .

لدينا:  $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$  ومنه الشعاعان  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعان وفق مستقيم.

(2) تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقاط  $(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:  $d(M, (P)) = d(M, (P'))$ .

$$\text{أي } \frac{|2x + y - z + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|x - 2y + z - 2|}{\sqrt{6}} \text{ معناه } d(M, (P)) = d(M, (P'))$$

$$|2x + y - z + 1| = |x - 2y + z - 2|$$

$$\text{أي: } \begin{cases} 2x + y - z + 1 = x - 2y + z - 2 \\ 2x + y - z + 1 = -(x - 2y + z - 2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x + 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقاط  $(\Gamma)$  هي اتحاد مستويين معادلتيهما:  $x + 3y - 2z + 3 = 0$  و  $3x - y - 1 = 0$ .

(3) التحقق أن النقطة  $A(1; 2; 0)$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$ :

$$\text{لدينا: } d(A, (P)) = \frac{|2x_A + y_A - z_A + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ و } d(A, (P')) = \frac{|x_A - 2y_A + z_A - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ ومنه } A \in (\Gamma).$$

(4)  $H'$  و  $H$  المسقطان العموديان للنقطة  $A$  على المستويين  $(P)$  و  $(P')$  على الترتيب.

أ- إيجاد تمثيل وسيطي لكل من المستقيمين  $(AH)$  و  $(AH')$ .

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل: لدينا } \vec{n}(2;1;-1) \text{ شعاع توجيه لـ } (AH) \text{ و } A \in (AH) \text{ ومنه تمثيل وسيطي لـ } (AH) \text{ من الشكل:}$$

و  $\vec{n}'(1;-2;1)$  شعاع توجيه لـ  $(AH')$  و  $A \in (AH')$  ومنه تمثيل وسيطي لـ  $(AH')$  من الشكل:

$$\begin{cases} x = t' + 1 \\ y = -2t' + 2 \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

ب- استنتاج إحداثيات كل من النقطتين  $H$  و  $H'$ :

النقطة  $H$  هي نقطة تقاطع المستوي  $(P)$  والمستقيم  $(AH)$ .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } 2(2t + 1) + (t + 2) - (-t) + 1 = 0 \text{ أي } t = -\frac{5}{6}$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(AH)$  نجد  $(-\frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \frac{5}{6})$  وهي إحداثيات النقطة  $H$ .

النقطة  $H'$  هي نقطة تقاطع المستوي  $(P')$  والمستقيم  $(AH')$ .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = -2t' + 2 \\ z = t' \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } t' + 1 - 2 - 2t' + 2 + t' - 2 = 0 \text{ أي } t' = \frac{5}{6}$$

وبتعويض قيمة  $t'$  في التمثيل الوسيط لـ  $(AH')$  نجد  $(\frac{11}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6})$  وهي إحداثيات النقطة  $H'$ .

جـ- تعيين إحداثيات النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[HH']$ :

$$\text{لدينا: } I\left(\frac{7}{12}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right) \text{ ومنه } I\left(\frac{x_H + x_{H'}}{2}; \frac{y_H + y_{H'}}{2}; \frac{z_H + z_{H'}}{2}\right)$$

حساب مساحة المثلث  $AHH'$ :

لدينا:  $AH = AH'$  وبالتالي المثلث  $AHH'$  متساوي الساقين ومنه  $S_{AHH'} = \frac{1}{2} HH' \times AI$

$$\text{ولدينا: } HH' = \frac{5\sqrt{10}}{6} \text{ أي } \overline{HH'}\left(\frac{15}{6}; -\frac{5}{6}; 0\right) \text{ و } AI = \frac{5\sqrt{14}}{12} \text{ أي } \overline{AI}\left(-\frac{5}{12}; -\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$$

$$\text{ومنه } S_{AHH'} = \frac{25}{72} \sqrt{35} \text{ (u.a.)}$$

### حل مقترح التمرين الثاني

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \sqrt{2x+8}$ .

$$(1) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$$

بـ- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [0; +\infty[ \text{ و } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$ ، ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |            |           |
|---------|------------|-----------|
| $x$     | 0          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |            | +         |
| $f(x)$  | $\sqrt{8}$ | $+\infty$ |

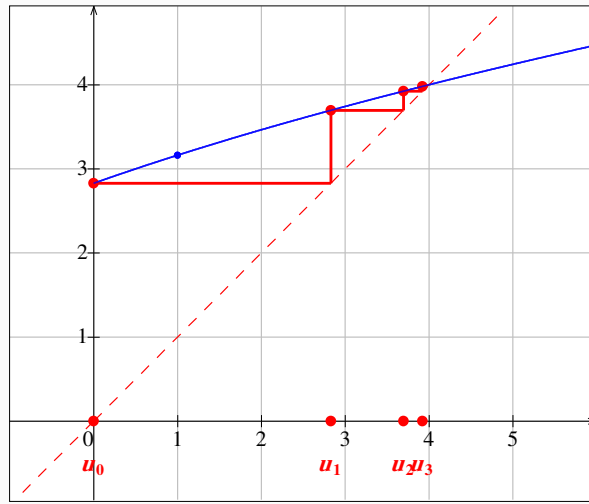
(2) تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى  $(C)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  الذي:  $y = x$  معادلة له.

نحل في المجال  $[0; +\infty[$  المعادلة:  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \text{ تكافئ } \sqrt{2x+8} = x \text{ تكافئ } \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+8 = x^2 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \text{ أي } (x+2)(x-8) = 0$$

ومنه  $x = 4$ . إذن نقطة تقاطع المنحنى  $(C)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  هي:  $A(4; 4)$ .

(3) الرسم:



(II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

(1) الرسم : أنظر الشكل .

(2) التخمين : المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومتقاربة نحو العدد 4 .

(3) أ- البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq u_n < 4$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n < 4$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 0$  ومنه  $0 \leq u_0 < 4$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 \leq u_n < 4$  ، و نبهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 \leq u_{n+1} < 4$  .

لدينا حسب الفرض  $0 \leq u_n < 4$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً فإن  $f(0) \leq f(u_n) < f(4)$

أي  $0 \leq 2\sqrt{2} \leq u_{n+1} < 4$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq u_n < 4$  .

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n + 8} - u_n)(\sqrt{2u_n + 8} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{2u_n + 8 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{(4 - u_n)(2 + u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 - u_n > 0$  و  $2 + u_n > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

ج- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$  .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \frac{(4 - \sqrt{2u_n + 8})(4 + \sqrt{2u_n + 8})}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{16 - (2u_n + 8)}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{8 - 2u_n}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{2(4 - u_n)}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}$$

ومن جهة أخرى :  $0 \leq u_n < 4$  يكافئ  $\frac{1}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} \leq \frac{1}{4}$  ومنه  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$  ، وهذا يعني :

$$\begin{cases} 4-u_1 \leq \frac{1}{2}(4-u_0) \\ 4-u_2 \leq \frac{1}{2}(4-u_1) \\ 4-u_3 \leq \frac{1}{2}(4-u_2) \\ \dots \\ \dots \\ 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد  $(4-u_1)(4-u_2)\dots(4-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)(4-u_1)\dots(4-u_{n-1})$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$  . (يمكن استخدام البرهان بالتراجع)

د- استنتاج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$  ، ولدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4-u_n) = 0$

أي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z' = z$  :

$z' = z$  تكافئ  $\frac{z-2}{z-1} = z$  تكافئ  $z-2 = z(z-1)$  ، حيث  $(z \neq 1)$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 2z + 2 = 0$  :

لدينا :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

(2) لدينا :  $z_2 = \overline{z_1}$  ،  $z_1 = 1-i$

أ- كتابة  $\frac{z_2}{z_1}$  على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

ب- تبين أن النقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  الذي مركزه المبدأ  $O$  ، مع تعيين زاوية له .

لدينا :  $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$  يكافئ  $z_2 - z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_0)$  ومنه النقطة  $B$  صورة  $A$  بالدوران  $R$  الذي مركزه المبدأ  $O$

وزاوية له  $\frac{\pi}{2}$  .

(3) نضع :  $z' \neq z$  . نعتبر النقطتين  $C$  و  $D$  لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

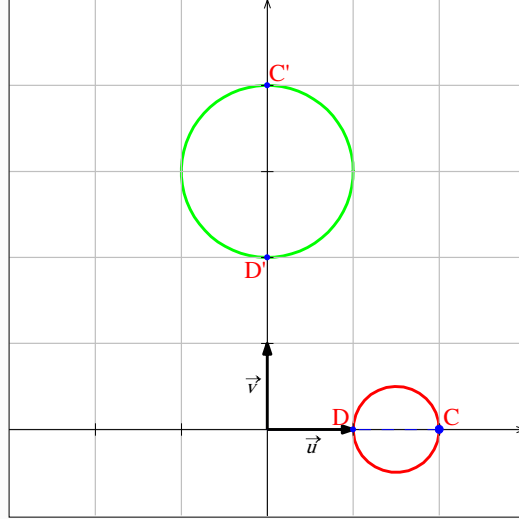
تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  حيث  $M'$  تنتمي إلى محور الترتيب :

$$\text{لدينا : } \arg(z') = \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right) \quad (z' \neq 0)$$

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} : \text{أي } \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} : \text{تنتهي إلى حامل محور الترتيب معناه}$$

$$\left(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} : \text{أي}$$

( إذا كان  $z' = 0$  فإن  $z = 2$  وهذا يعني أن  $M$  منطبقة على  $C$  )  
 إذن المجموعة  $(\Gamma)$  هي الدائرة التي قطرها  $[CD]$  باستثناء النقطة  $D$ .  
 إنشاء  $(\Gamma)$  :



(4) أ- تعيين طبيعة التحويل النقطي  $S = h \circ R$  وعناصره المميزة :

لدينا :  $h$  : التحاكي الذي مركزه المبدأ  $O$  ونسبته 2 و  $R$  الدوران الذي مركزه المبدأ  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  ومنه  $S$  هو التشابه

الذي مركزه  $O$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

ب- كتابة العبارة المركبة للتحويل  $S$  :

$$z' = 2iz \quad \text{ومنه} \quad z' - z_O = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$$

ج- تعيين المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $S$  :

المجموعة  $(\Gamma')$  هي الدائرة التي قطرها  $[CD']$  باستثناء النقطة  $D'$  ، بحيث :  $S(D) = D'$  و  $S(C) = C'$ .

$$z_{D'} = 2iz_D = 2i, \quad z_{C'} = 2iz_C = 2 \times 2i = 4i$$

الإنشاء : أنظر الشكل .

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I)  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ .

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  ،  $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ .

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $2x^2 - 1$  :

|         |   |                      |           |
|---------|---|----------------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0                    | +         |

الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  ومتزايدة على المجال  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right]$ .

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (2)$$

الدالة  $g$  تقبل قيمة حدية صغرى على المجال  $]0; +\infty[$  هي  $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  وبالتالي من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  ،  $g(x) > 0$ .

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$ .

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = +\infty$$

(2) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ،

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$  ،

إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$  ، إذن من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$  ، وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .

ب- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

(3) كتابة معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا :  $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  و منه  $(T) : y = 2x - 2$ .

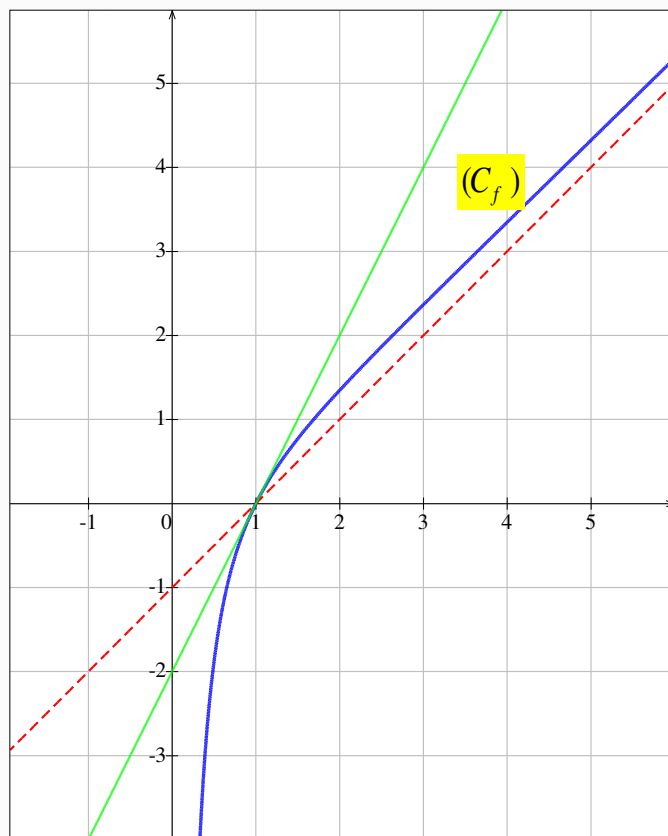
(4) أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و منه المنحنى  $(C)$  يقبل مستقيما مقاربا مائل  $(\Delta)$

حيث :  $y = x - 1$  معادلة له.

ب- دراسة الوضع النسبي لـ  $(C)$  و  $(\Delta)$  :

لدينا  $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $\ln x$  :

|              |                        |                                                                                                                                                                    |                        |
|--------------|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $x$          | 0                      | 1                                                                                                                                                                  | $+\infty$              |
| $f(x) - y$   |                        | 0                                                                                                                                                                  | +                      |
| الوضع النسبي |                        | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>(C_f)</math> يقطع <math>(\Delta)</math><br/>في النقطة <math>A(1;0)</math> </div> | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |
|              | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |                                                                                                                                                                    |                        |



(6)  $m$  عدد حقيقي .  $(\Delta_m)$  المستقيم حيث :  $y = mx - m$  معادلة له .

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $m$  ، النقطة  $A(1;0)$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta_m)$  .

لدينا  $y_A = mx_A - m$  أي  $0 = m - m$  وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $m$  ،  $A \in (\Delta_m)$  ،  
ب- المناقشة البيانية :

لدينا :  $(\Delta_m)$  معامل توجيهه  $m$  ويشمل النقطة  $A(1;0)$  .

إذا كان  $m \in ]-\infty; 1]$  فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان  $m \in ]1; 2]$  فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان  $m = 2$  فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) وهو 1.

إذا كان  $m \in ]2; +\infty[$  فإن المعادلة تقبل حلين .

(7) أ- إيجاد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  على  $]0; +\infty[$  من الشكل :  $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$  . (لاحظ أن  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  من الشكل  $u' \times u$ )

ب- حساب  $I_n$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 1$  والمستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  حيث  $n$  عدد طبيعي ( $n > 1$ ) .

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x - 1)] dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي  $n_0$  بحيث إذا كان  $n > n_0$  فإن  $I_n > 2$  .

$I_n > 2$  معناه  $(\ln n)^2 > 4$  أي  $\ln n > 2$  أو  $\ln n < -2$  (مرفوض) ومنه  $n > e^2$  وعليه : أصغر قيمة لـ  $n_0$  هي  $n_0 = 8$  .

حل مقترح التمرين الأول

$A$  و  $B$  نقطتان من الفضاء بحيث :  $A(5; -1; -2)$  و  $B(3; 12; -7)$ .

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي :}$$

(1) أ- تمثيل وسيطى للمستقيم  $(\Delta')$  الذي يشمل النقطة  $A$  و  $\vec{u}(-2; 1; 1)$  شعاع توجيه له من الشكل :

$$\begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متعامدان :

لدينا :  $\vec{v}(3; 2; 4)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  و  $\vec{u}(-2; 1; 1)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta')$  و  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 3 + 2 + 4 = 0$  ومنه  $(\Delta) \perp (\Delta')$ .

تبين أن  $C(1; 1; 0)$  هي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  :

يكفي إثبات أن  $C \in (\Delta)$  و  $C \in (\Delta')$ .

$$\begin{cases} 1 = 1 + 3k \\ 1 = 1 + 2k \\ 0 = 4k \end{cases} \quad \text{لأن } C \in (\Delta) \text{ أي } k = 0 \text{ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ } k \text{).}$$

$$\begin{cases} 1 = -2t + 5 \\ 1 = t - 1 \\ 0 = t - 2 \end{cases} \quad \text{لأن } C \in (\Delta') \text{ أي } t = 2 \text{ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ } t \text{).}$$

(2) المستوي المعين بالمستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

أ- تبين أن الشعاع  $\vec{n}(2; 11; -7)$  ناظمي للمستوي  $(P)$  :

يكفي إثبات أن  $\vec{n} \perp \vec{u}$  و  $\vec{n} \perp \vec{v}$ .

لدينا :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + 11 - 7 = 0$  ومنه  $\vec{n} \perp \vec{u}$  ، و  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 11 \times 2 - 7 \times 4 = 0$  ومنه  $\vec{n} \perp \vec{v}$ .

• إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  .

$(P)$  يشمل النقطة  $C$  و  $\vec{n}(2; 11; -7)$  شعاع ناظمي له ومنه لـ  $(P)$  معادلة من الشكل :  $2x + 11y - 7z + 13 = 0$ .

ب- تبين أن النقطة  $C$  هي المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستوي  $(P)$  :

يكفي إثبات أن  $\vec{n}$  و  $\vec{CB}$  مرتبطان خطيا .

لدينا :  $\vec{CB}(2; 11; -7)$  ومنه  $\vec{CB} = \vec{n}$ .

(يمكن كذلك إثبات أن  $CB = d(B; (P))$ )

$$\begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \end{cases} \quad (3) \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان و } (P') \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء المعرفة بـ :}$$

أ- إثبات أن المجموعة  $(P')$  هي مستو :

المجموعة  $(P')$  معرفة بالثلاثية  $(B, \vec{w}; \vec{k})$  بحيث  $B(3; 12; -7)$  ،  $\vec{w}(0; 12; -6)$  و  $\vec{k}(-1; 9; -11)$  ولكون  $\vec{w}$  و  $\vec{k}$  غير

مرتبطتين خطيا فإن  $(P')$  هي مستو .

التحقق أن  $13x - y - 2z - 41 = 0$  هي معادلة ديكارتية لـ  $(P')$  :

يكفي إثبات أن  $\vec{n}' \perp \vec{w}$  و  $\vec{n}' \perp \vec{k}$  بحيث  $\vec{n}'(13; -1; -2)$  شعاع ناظمي لـ  $(P')$  .

لدينا :  $\vec{n}' \cdot \vec{w} = -1 \times 12 + (-6) \times (-2) = 0$  ومنه  $\vec{n}' \perp \vec{w}$  ، و  $\vec{n}' \cdot \vec{k} = 13 \times (-1) - 1 \times 9 - 2 \times (-11) = 0$  ومنه  $\vec{n}' \perp \vec{k}$  .

بـ. تعيين إحداثيات  $D$  و  $E$  نقطتي تقاطع المستوي  $(P')$  مع المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \begin{cases} 13x - y - 2z - 41 = 0 \end{cases}$$

يكافئ  $13(1+3k) - (1+2k) - 2(4k) - 41 = 0$  أي  $k = 1$  .

وبتعويض قيمة  $k$  في التمثيل الوسيط لـ  $(\Delta)$  نجد  $(4; 3; 4)$  وهي إحداثيات النقطة  $D$  .

$$\begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \begin{cases} 13x - y - 2z - 41 = 0 \end{cases}$$

يكافئ  $13(-2t+5) - (t-1) - 2(t-2) - 41 = 0$  أي  $t = 1$  .

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيط لـ  $(\Delta')$  نجد  $(3; 0; -1)$  وهي إحداثيات النقطة  $E$  .

جـ. حساب حجم رباعي الوجوه  $BCDE$  :

$$V_{BCDE} = \frac{1}{3} S_{CDE} \times CB = \frac{1}{6} \times CB \times CD \times CE \quad \text{إذن} \quad S_{CDE} = \frac{1}{2} \times CD \times CE \quad \text{ومنه} \quad C \text{ المثلث } CDE \text{ قائم في } C$$

لدينا :  $\vec{CB}(2; 11; -7)$  ومنه  $CB = \sqrt{174}$  ، و  $\vec{CD}(3; 2; 4)$  ومنه  $CD = \sqrt{29}$  ، و  $\vec{CE}(2; -1; -1)$  ومنه  $CE = \sqrt{6}$  .

$$\text{إذن : } V_{BCDE} = \frac{1}{6} \times CB \times CD \times CE = 29$$

### حل مقترح التمرين الثاني

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{5x}{x+2}$  .

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x}{x+2} \right) = 5$$

بـ. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - 5x}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2} \quad \text{الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على المجال } [0; +\infty[$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$  ، ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  | 0 | 5         |

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $f(x) \geq 0$  .

من جدول التغيرات : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $0 \leq f(x) \leq 5$  أي :  $f(x) \geq 0$  .

(II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 1$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 3$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 3$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 1$  ومنه  $1 \leq u_0 \leq 3$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $1 \leq u_n \leq 3$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $1 \leq u_{n+1} \leq 3$  .

لدينا حسب الفرض  $1 \leq u_n \leq 3$  وبما أن الدالة متزايدة تماما فإن  $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$  أي  $1 \leq \frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq 3$  .

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{5u_n - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 3u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 2}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3 - u_n \geq 0$  و  $2 + u_n > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة

• المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

(2)  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$  .

أ- تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$  :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{5u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} = \frac{5u_n - 3u_n - 6}{5u_n} = \frac{2u_n - 6}{5u_n} = \frac{2(u_n - 3)}{5u_n} = \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{3}{u_n} \right) = \frac{2}{5} v_n$$

ومن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$   $q = \frac{2}{5}$  وحدها الأول  $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = -2$  .

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = v_0 \times q^n$  ، ومنه  $v_n = -2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$  .

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$  ، ومنه  $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$  أي  $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$  : إذن  $u_n = \frac{3}{1 - 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$  .

ج- حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{1 - 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} \right) = 3$  لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$  .

(3) حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$  .

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$  ، ومنه  $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$  أي :  $\frac{1}{u_n} = \frac{1 - v_n}{3} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$  .

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3} \left[ (1+1+1\dots+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \right] = \frac{1}{3} \left[ (n+1) - \left( v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] : \text{إذن}$$

$$. S_n = \frac{1}{3} \left[ (n+1) + \frac{10}{3} \left( 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) \right] : \text{أي}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$  ..... (1)

$z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$  أو  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  : تكافئ  $(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

لدينا :  $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 = i^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $z_1 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي :  $S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$

(2)  $z_C = \overline{z_B}$  و  $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ،  $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

أكتب  $z_C$  و  $z_B$  ،  $z_A$  على الشكل الأسّي :

لدينا :  $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ومنه :  $|z_A| = 1$

وبفرض  $\theta_A$  عمدة للعدد المركب  $z_A$  ، يكون :  $\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{2} \end{cases}$  ومنه  $\arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ، حيث  $k \in \mathbb{Z}$

إذن :  $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$

لدينا :  $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ومنه :  $|z_B| = 1$

وبفرض  $\theta_B$  عمدة للعدد المركب  $z_B$  ، يكون :  $\begin{cases} \cos \theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$  ومنه  $\arg(z_B) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  ، حيث  $k \in \mathbb{Z}$

إذن :  $z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

لدينا :  $z_C = \overline{z_B} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$  ومنه :  $z_C = \overline{z_B}$

بـ تبيان أنه يوجد تشابه مباشر  $S$  مركزه  $B$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $A$  مع تعيين عناصره المميزة :

لدينا :  $z_A - z_B = i\sqrt{3}(z_C - z_B)$  أي  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{3}}{-i} = i\sqrt{3}$

ومنه يوجد تشابه مباشر  $S$  مركزه  $B$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $A$  بنسبته  $\sqrt{3}$  وزاوية له  $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ .  
(3) أـ تعيين لاحقة النقطة  $D$  حتى يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع:

$$z_D = z_A - z_B + z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ومنه } z_D - z_C = z_A - z_B$$

طبيعة الرباعي  $ABCD$ :

$$\text{لدينا: } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i\sqrt{3} \text{ يعني: } \begin{cases} \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \left( \overline{BC}; \overline{BA} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ وبالتالي } ABCD \text{ مستطيل}$$

بـ. تعيين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق:  $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ .  
تكافئ  $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$  تكافئ  $|z - z_A| = |z - z_B|$  تكافئ  $AM = CM$ .  
وبالتالي مجموعة النقط  $(E)$  هي محور القطعة  $[AC]$ .

جـ. تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق:  $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$  عندما  $\theta$  يتغير على  $\mathbb{R}$ .  
تكافئ  $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$  تكافئ  $|z - z_B| = |\sqrt{3}e^{i\theta}|$  وهذا يعني:  $BM = \sqrt{3}$  أي  $|z - z_B| = \sqrt{3}$ .  
وبالتالي مجموعة النقط  $(\Gamma)$  هي الدائرة التي مركزها  $B$  ونصف قطرها  $\sqrt{3}$ .  
التحقق أن  $A \in (\Gamma)$ :  
لدينا:  $|z_A - z_B| = \sqrt{3}$  أي  $AB = \sqrt{3}$  وبالتالي  $A \in (\Gamma)$ .

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$ .  
(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(2 - x)(x + 1)$ :

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[-1; 2]$  ومتناقصة على كل من المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[2; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ :

|         |           |       |             |           |     |
|---------|-----------|-------|-------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$  | $2$         | $+\infty$ |     |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$   | $+$         | $0$       | $-$ |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $1-e$ | $1+5e^{-2}$ | $1$       |     |

(3) أ- تبين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حلين في  $\mathbb{R}$  ، أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث :  $-1.52 < \alpha < -1.51$  .

لدينا :  $g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$

الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1[$  و  $]-1.52; -1.51[ \subset ]-\infty; -1[$  و  $\begin{cases} g(-1.52) \approx 0,041 \\ g(-1.51) \approx -0,040 \end{cases}$

أي  $g(-1.52) \times g(-1.51) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-\infty; -1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1.52 < \alpha < -1.51$  .

ب- إشارة  $g(x)$  :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|---|-----------|
| $g(x)$ |           | +        | 0 | -         |

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(1) أ- حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$

ب- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$

ج- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | -           | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | 2 | $-\infty$ |

د-  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$  .

التفسير الهندسي : المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  معامل توجيهه معدوم .

(يوازي حامل محور الفواصل)

(2) أ-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل

للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

ب- دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x+1)(x+2)e^{-x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $(x+1)(x+2)$

| $x$          | $-\infty$               | -2 | -1                      | $+\infty$ |
|--------------|-------------------------|----|-------------------------|-----------|
| $f(x) - y$   |                         | +  | 0                       | -         |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$  |    | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$  |           |
|              | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ |    | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ |           |
|              | في النقطة $B(-2; 2)$    |    | في النقطة $A(-1; 1)$    |           |

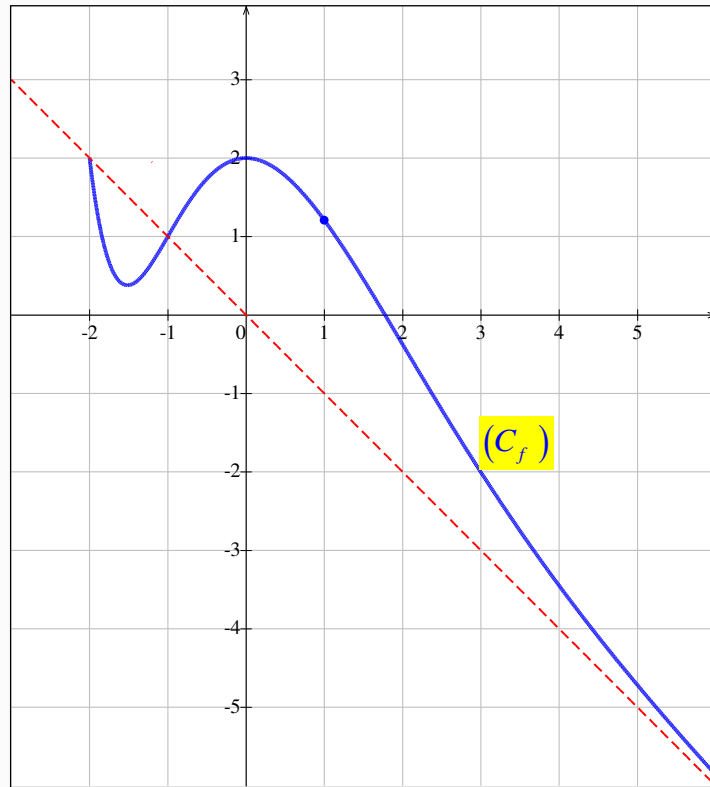
ج- تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا : الدالة  $f'$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f''(x) = -g'(x) = (x-2)(x+1)e^{-x}$  .

إشارة  $f''(x)$  :

| $x$      | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|----------|-----------|----|---|-----------|
| $f''(x)$ |           | +  | 0 | -         |

ومن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف هما :  $A(-1; 1)$  و  $C(2; -2 + 12e^{-2})$  .



هـ - المناقشة البيانية :

- المعادلة  $(x^2 + 3x + 2) = 0$  تكافئ  $f(x) = -m$ .
- حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = -m$ .
- لما  $m \in ]-f(\alpha); +\infty[$  يكون  $m \in ]-\infty; f(\alpha)[$  و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- لما  $m = -f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب .
- لما  $m \in ]-2; -f(\alpha)[$  يكون  $m \in ]f(\alpha); 2[$  و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان والآخر موجب .
- لما  $m = -2$  المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .
- (III)  $h$  و  $H$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
- (1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  :
- $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  يعني : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $H'(x) = h(x)$  .
- الدالة  $H$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،
- $$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$
- ومنه بالمطابقة نجد :  $a = -1$  ،  $b = -5$  و  $c = -7$  أي  $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$  .

(2) أ - حساب التكامل :  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$  ، حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  .

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$  يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  والمستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  .

ب -  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$  .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- (1) نضع من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$  .  
 أ- تحقق أن:  $P(2\sqrt{3}) = 0$  .  
 ب- جد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$  .  
 ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $P(z) = 0$  .  
 (2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .  $A$  ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :  
 $z_C = 2\sqrt{3}$  و  $z_B = -\sqrt{3} - 3i$  ،  $z_A = -\sqrt{3} + 3i$   
 أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  .  
 ب- بين أنه يوجد دوران  $R$  مركزه  $A$  و يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$  ، يطلب تعيين زاويته .  
 ج- استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .  
 د- عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي  $ABDC$  .  
 (3) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة  $z$  بحيث :  $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

التمرين الثاني (4ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ،  $(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(1; 0; 2)$  وشعاع توجيهه  

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
  
 له  $\vec{u}(2; 1; -1)$  وليكن  $(\Delta')$  المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي :  
 (1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  .  
 ب- بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوي .  
 (2) أ- بين أن النقطة  $B(-1; 3; 1)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(\Delta')$  .  
 ب- تحقق أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على كل من المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .  
 ج- استنتج المسافة بين المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .  
 (3) لتكن  $N$  نقطة إحداثياتها  $(-2+t; 2+t; t)$  حيث  $t \in \mathbb{R}$  ولتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(t) = AN^2$  .  
 أ- بين أن النقطة  $N$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta')$  ، ثم أكتب عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$  .  
 ب- استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي تكون من أجلها المسافة  $AN$  أصغرا يمكن . ثم قارن بين القيمة الصغرى للدالة  $h$  والمسافة  $AB$  .

التمرين الثالث (5ن)

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $I = [0; 4]$  بـ :  $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$  .  
 (1) أ- بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$  .

- بـ بين أنه من أجل كل من المجال  $I$  ،  $f(x)$  ينتمي الى المجال  $I$  .
- (2) لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0 = 4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$  .  
 أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 4$  .  
 بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة .
- (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 0$  .
- (4) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$  .  
 أـ برهن أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  .  
 بـ أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  .
- جـ استنتج أن :  $u_n = \frac{52}{36n+13}$  وذلك من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

### التمرين الرابع (7)

- I الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$  . (العدد  $e$  هو أساس اللوغاريتم النيبيري)
- (1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,34 < \alpha < -0,33$  .
- (3) استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  على المجال  $]-1; +\infty[$  .
- II الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  .
- (1)  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
 أـ بين أن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  و أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، فسر النتيجة هندسيا .
- بـ بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$  .
- جـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- دـ أرسم المنحنى  $(C_f)$  . (نقبل أن :  $f(\alpha) = 3,16$ )
- (2) أـ بين أن الدالة  $\frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  هي دالة أصلية للدالة  $\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  على المجال  $]-1; +\infty[$  .  
 بـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما :  $x=0$  و  $x=1$  .
- (3) نعتبر الدالة العددية  $k$  المعرفة على  $]-1; 1[$  بـ :  $k(x) = f(-|x|)$  ،  $(C_k)$  تمثيلها لبياني في المعلم السابق .  
 أـ بين أن الدالة  $k$  زوجية .
- بـ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى  $(C_k)$  انطلاقا من المنحنى  $(C_f)$  ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة  $k$ )
- جـ ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $k(x) = m$  .

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(2; 1; -3)$ ،  $B(0; -1; 2)$ ،  $C(-3; -1; -1)$ .  
(1) أـ بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .

بـ بين أن المعادلة :  $2x - 7y - 2z - 3 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يشمل  $A$  ويعامد المستقيم  $(BC)$  .

(3) أـ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(D)$  تقاطع المستويين  $(ABC)$  و  $(P)$  .

بـ بين أن المستقيم  $(D)$  عمود في المثلث  $ABC$  .

(4) ليكن  $(\Delta)$  المتوسط المتعلق بالضلع  $[AC]$  في المثلث  $ABC$  .

$$\text{أـ بين أن الجملة } (k \in \mathbb{R}) \text{ ، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta) .$$

بـ بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(D)$  يتقاطعان في نقطة  $G$  يطلب تعيين إحداثياتها .

جـ بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين .

دـ ماذا تمثل النقطة  $G$  بالنسبة للمثلث  $ABC$  ؟

(5) عين طبيعة وعناصر المجموعة  $(E)$  للنقط  $M$  من الفضاء والتي تحقق :  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$  .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $(E) \dots\dots\dots 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$  .  
يشير الرمز  $\bar{z}$  إلى مرافق العدد المركب  $z$  .

(1) أـ أثبت أن المعادلة  $(E)$  تكافئ المعادلة :  $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$  .

بـ حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -\frac{5}{2} \quad , \quad z_C = -1 \quad , \quad z_B = \bar{z}_A \quad , \quad z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أـ أكتب كلا من العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي .

بـ أنشئ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  .

جـ أثبت أن :  $z_B - z_C = z_B (z_A - z_C)$  .

دـ إستنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  ولتكن  $F$  صورة  $A$  بالتحويل  $S$  .

أنشئ النقطة  $F$  ثم حدد طبيعة المثلث  $AFC$  .

(4) عين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $z + 1 = kz_B$  . لما يتغير  $k$  في المجموعة  $\mathbb{R}_+$  .

### التمرين الثالث (4,5)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أعبّر بدلالة  $n$  عن الحد العام  $v_n$  .

بـ استنتج عبارة الحد  $u_n$  العام بدلالة  $n$  .

جـ أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(3) أأحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  .

بـ تحقق أن :  $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$  وذلك من أجل كل عدد طبيعي  $n$  .

جـ أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$  .

### التمرين الرابع (6)

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$  .

(1) أأحسب  $g'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة  $g'$  (حيث  $g'$  هي مشتقة الدالة  $g$ )

بـ بين أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$

جـ أحسب نهايتي الدالة  $g$  عند كل من  $+\infty$  وعند  $-\infty$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1,37 < \alpha < -1,38$  .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أأحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

بـ بين أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$  (حيث  $f'$  هي مشتق الدالة  $f$ ) .

جـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أبين أن :  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$  ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .

بـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أنشئ المنحنى  $(C_f)$  . (تعطى  $f(\alpha) \approx 0,29$ )

حل مقترح التمرين الأول

(1) نضع من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ- التحقق :  $P(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$

ب- إيجاد العددين  $a$  و  $b$  :

$$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 2\sqrt{3})z^2 + (b - 2\sqrt{3}a)z - 2\sqrt{3}b$$

وبالمطابقة نجد :  $b = 12$  ،  $a = 2\sqrt{3}$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12) = 0 \text{ تكافئ } z = 2\sqrt{3} \text{ أو } z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$$

لنحل  $\mathbb{C}$  في المعادلة :  $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

لدينا :  $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 12 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 6i}{2} = -\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 6i}{2} = -\sqrt{3} - 3i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $P(z) = 0$  هي :  $S = \{2\sqrt{3}; -\sqrt{3} - 3i; -\sqrt{3} + 3i\}$

$$z_C = 2\sqrt{3} \text{ و } z_B = -\sqrt{3} - 3i \text{ ، } z_A = -\sqrt{3} + 3i \quad (2)$$

أ- كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} - (-\sqrt{3} + 3i)}{-\sqrt{3} - 3i - (-\sqrt{3} + 3i)} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{-6i} = \frac{3\sqrt{3}i + 3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب- تبيان أنه يوجد دوران  $R$  مركزه  $A$  و يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$  :

لدينا :  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  أي  $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$  وبالتالي النقطة  $C$  هي صورة

النقطة  $B$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

ج- استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ يعني : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

د- تعيين  $z_D$  :

$z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  معناه :  $z_D = z_C + z_{\overrightarrow{AB}}$

$$z_D = z_C + z_B - z_A = 2\sqrt{3} - 6i$$

طبيعة الرباعي  $ABDC$  :

لدينا  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  لأن النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  وبما أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع فإن الرباعي  $ABDC$  معين.

(3) تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة  $z$  بحيث :  $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$  تكافئ  $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = 2k\pi$  (نظيرة  $M'$  بالنسبة لحامل محور الفواصل)  
 ومنه المجموعة  $(\Gamma)$  هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة  $O$ .

### حل مقترح التمرين الثاني

$(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(1;0;2)$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}(2;1;-1)$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{و } (\Delta') \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي:}$$

(1) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$ :

$(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(1;0;2)$  و  $\vec{u}(2;1;-1)$  شعاع توجيهه ومنه تمثيل وسيطي لـ  $(\Delta)$  من الشكل :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوي :

لنثبت أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا متوازيين وليسا متقاطعين.

لندرس التوازي :

لدينا  $\vec{v}(1;1;1)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta')$  و  $\vec{u}(2;1;-1)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  ومنه  $\vec{v}$  و  $\vec{u}$  ليسا مرتبطين خطيا

لأن  $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}}$  و  $x_{\vec{u}} \neq x_{\vec{v}}$  وبالتالي المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع :

$$\begin{cases} t = -5 \\ \lambda = -9 \\ 7 \neq -7 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} 2t + 1 = \lambda \\ t = 4 + \lambda \\ -t + 2 = 2 + \lambda \end{cases}$$

الجملة لا تقبل حل وبالتالي المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا متقاطعين.

(2) أ- تبين أن النقطة  $B(-1;3;1)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(\Delta')$  :

يكفي إثبات أن  $B \in (\Delta')$  و  $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$ .

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{من أجل } \lambda = -1 \text{ نجد} \quad \text{ومنه } B \in (\Delta')$$

لدينا  $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$  و  $\vec{v}(1;1;1)$  ومنه  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 1 - 1 \times 1 = 0$  إذن  $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$ .

ب- التحقق أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على كل من المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 1 - 1 \times 1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -2 \times 2 + 3 \times 1 - 1 \times (-1) = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

ج- استنتاج المسافة بين المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  :

لدينا :  $B \in (\Delta')$  و  $A \in (\Delta)$  و  $(AB)$  عمودي على كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ومنه :  $d((\Delta), (\Delta')) = AB = \sqrt{14}$ .

(3) نقطة إحداثياتها  $(-2+t; 2+t; t)$  حيث  $t \in \mathbb{R}$  و  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(t) = AN^2$ .

أ- تبين أن النقطة  $N$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta')$  :

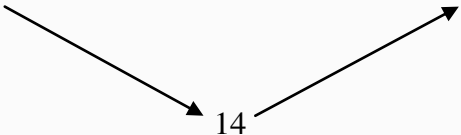
• كتابة عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$  :  
 بوضع  $\lambda = -2 + t$  نجد :  $\begin{cases} x = \lambda = -2 + t \\ y = 4 + \lambda = 4 - 2 + t = 2 + t \\ z = 2 + \lambda = 2 - 2 + t = t \end{cases}$  ومنه  $N \in (\Delta')$ .

$$h(t) = AN^2 = (t-3)^2 + (t+2)^2 + (t-2)^2 = 3t^2 - 6t + 17$$

بـ استنتاج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي تكون من أجلها المسافة  $AN$  أصغر ما يمكن :

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $t$  ،  $h'(t) = 6t - 6$  ،

جدول تغيرات الدالة  $h$  :

|         |                                                                                    |   |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | 1 | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | -                                                                                  | 0 | +         |
| $h(x)$  |  |   |           |

تكون المسافة  $AN$  أصغر ما يمكن من أجل  $t = 1$  و  $AN = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$  .

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة  $h$  والمسافة  $AB$  :

القيمة الحدية الصغرى للدالة  $h$  تساوي  $AB^2$  ، أو  $AB = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$  .

### حل مقترح التمرين الثالث

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $I = [0; 4]$  بـ :  $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$  .

(1) أـ تبين أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $I$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; 4]$  و  $f'(x) = \frac{13(9x + 13) - 9 \times 13x}{(9x + 13)^2} = \frac{169}{(9x + 13)^2}$  .

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; 4]$  ،  $f'(x) > 0$  ، ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; 4]$  .

بـ تبين أنه من أجل كل من المجال  $I$  ،  $f(x)$  ينتمي الى المجال  $I$  :

لدينا : الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; 4]$  ومنه من أجل كل  $x \in [0; 4]$  ،  $f(x) \in [f(0); f(4)]$  ،

أي :  $f(x) \in [0; \frac{52}{49}]$  ولدينا  $[0; \frac{52}{49}] \subset [0; 4]$  إذن : من أجل كل  $x \in [0; 4]$  ،  $f(x) \in [0; 4]$  ،

(2)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0 = 4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$  .

أـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 4$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 4$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 4$  ومنه  $0 \leq u_0 \leq 4$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 \leq u_n \leq 4$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 \leq u_{n+1} \leq 4$  .

لدينا حسب الفرض  $0 \leq u_n \leq 4$  ومنه  $0 \leq f(u_n) \leq 4$  (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي  $0 \leq u_{n+1} \leq 4$  .

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq u_n \leq 4$  .

بـ دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \frac{13u_n - u_n(9u_n + 13)}{9u_n + 13} = \frac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $-9u_n^2 \leq 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}$  .

■ المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 ، إذن فهي متقاربة .

(3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 0$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 0$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 4$  ومنه  $u_0 \neq 0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_n \neq 0$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} \neq 0$  .

لدينا حسب الفرض  $u_n \neq 0$  ومنه  $f(u_n) \neq 0$  (لأن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $I$  و  $f(0) = 0$ ) أي  $u_{n+1} \neq 0$

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \neq 0$  .

$$(4) \quad (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$$

أ- تبين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} = 2 + \frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n + 13}} = 2 + \frac{13(9u_n + 13)}{13u_n} = 2 + \frac{9u_n + 13}{u_n} = 2 + 9 + \frac{13}{u_n} = 9 + v_n$$

$$\text{ومن المتتالية } (v_n) \text{ حسابية أساسها } r = 9 \text{ وحدها الأول } v_0 = 2 + \frac{13}{u_0} = \frac{21}{4}$$

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n = v_0 + nr \text{ ، ومنه } v_n = \frac{21}{4} + 9n = \frac{21 + 36n}{4}$$

$$\text{ج- إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } u_n = \frac{52}{36n + 13}$$

$$\text{لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \text{ ، ومنه } \frac{13}{u_n} = v_n - 2 \text{ أي } u_n = \frac{13}{v_n - 2}$$

$$\text{إذن } u_n = \frac{13}{v_n - 2} = \frac{13}{\frac{21 + 36n}{4} - 2} = \frac{13}{\frac{21 + 36n - 8}{4}} = \frac{13 \times 4}{13 + 36n} = \frac{52}{36n + 13}$$

■ حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{52}{36n + 13} \right) = 0$$

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I)  $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$  : بـ :  $]-1; +\infty[$  المجال

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :  $g'(x) = e + \frac{2}{x+1}$

من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  ،  $g'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | -1        | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) تبين أنه للمعادلة  $g(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,34 < \alpha < -0,33$  .

الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $]-1; +\infty[$  و  $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$  أي  $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$  ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-0,34 < \alpha < -0,33$  .

(3) إشارة  $g(x)$  :

|        |    |          |           |
|--------|----|----------|-----------|
| $x$    | -1 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -  | 0        | +         |

(II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

(1) أ- تبين أن  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{e}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1) \right] = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المسقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x+1} \right) \left[ e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

التفسير البياني : المسقيم ذو المعادلة  $y = 0$  (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

ب- تبين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$  ،

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :

$$f'(x) = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(x)$  :

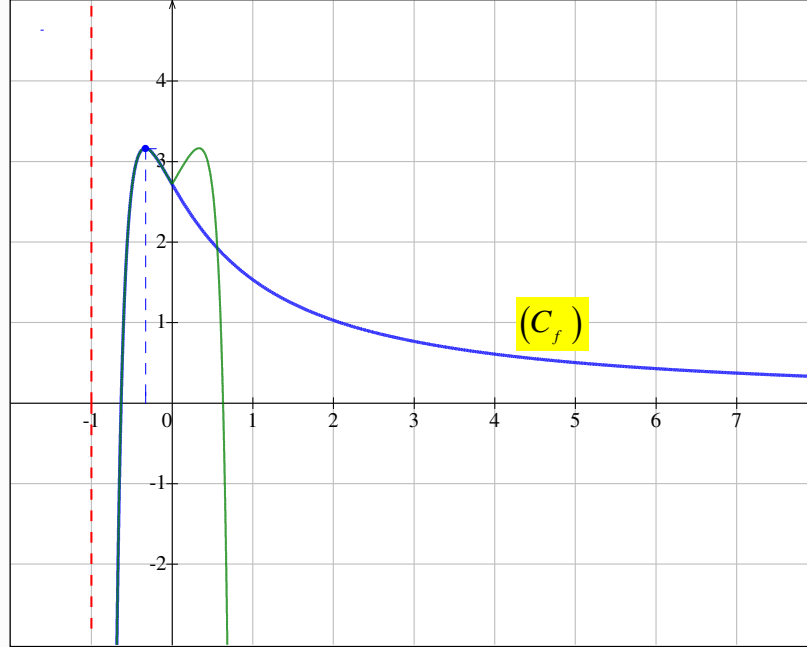
|         |    |          |           |
|---------|----|----------|-----------|
| $x$     | -1 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |    | 0        | -         |

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[\alpha; +\infty[$  ومتزايدة على المجال  $]-1; \alpha]$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | -1 | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|----|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |    | +           | 0 -       |
| $f(x)$  |    | $f(\alpha)$ | 0         |

د- الرسم:



(2) أ- تبيان أن الدالة  $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  هي دالة أصلية للدالة  $\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  على المجال  $]-1; +\infty[$

نضع:  $h(x) = \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ ، الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ومن أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$ :

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \left( \frac{1}{x+1} \right) \times \left( \frac{-1}{x+1} \right) = \frac{1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ب- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = 1$ :

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[ \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[ e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right]_0^1 = \frac{1 + (2e - 1) \ln 2}{2}$$

(3)  $k(x) = f(-|x|)$  : ب-  $]-1; 1[$  الدالة العددية المعرفة على

أ- تبيان أن الدالة  $k$  زوجية:

المجال  $]-1; 1[$  متناظر بالنسبة للصفر ومن أجل كل  $x \in ]-1; 1[$  :  $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$

وبالتالي الدالة  $k$  زوجية.

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى  $(C_k)$  انطلاقاً من المنحنى  $(C_f)$ :

$$k(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(x); x \in ]-1; 0] \\ f(-x); x \in [0; 1[ \end{cases}$$

إذن: من أجل  $x \in ]-1; 0]$ ،  $(C_k)$  ينطبق على  $(C_f)$  ونتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب

لكون  $k$  زوجية.

الرسم: أنظر الشكل.

### جـ- المناقشة البيانية :

- حلول المعادلة  $(x) = m$  هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_k)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = m$  .
- إذا كان  $m > f(\alpha)$  فإن المعادلة لا تقبل حولا .
- إذا كان  $m = f(\alpha)$  فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .
- إذا كان  $e < m < f(\alpha)$  فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .
- إذا كان  $m = e$  فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب وآخر موجب والثالث معدوم .
- إذا كان  $m < e$  فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

## تصحيح مقترح للموضوع الثاني

### حل مقترح التمرين الأول

- 1)  $A$  ،  $B$  و  $C$  النقطة من الفضاء بحيث :  $A(2;1;-3)$  ،  $B(0;-1;2)$  و  $C(-3;-1;-1)$  .
- أدبيان أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .
- لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$  و  $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$  .
- الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا لأن  $y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{AC}}$  لكن  $x_{\overrightarrow{AB}} \neq x_{\overrightarrow{AC}}$  ومنه النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .
- بـ- تبين أن المعادلة :  $2x - 7y - 2z - 3 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  :
- يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة .
- $2x_A - 7y_A - 2z_A - 3 = 2 \times 2 - 7 \times 1 - 2 \times (-3) - 3 = 0$  لأن  $A \in (ABC)$
- $2x_B - 7y_B - 2z_B - 3 = 2 \times 0 - 7 \times (-1) - 2 \times 2 - 3 = 0$  لأن  $B \in (ABC)$
- $2x_C - 7y_C - 2z_C - 3 = 2 \times (-3) - 7 \times (-1) - 2 \times (-1) - 3 = 0$  لأن  $C \in (ABC)$
- 2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يشمل  $A$  ويعامد المستقيم  $(BC)$  :
- المستوي  $(P)$  يشمل النقطة  $A$  و  $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$  شعاع ناظمي له ومنه معادلة  $(P)$  من الشكل :  $-3x - 3z + d = 0$
- وبما أن  $A \in (P)$  فإن :  $-3x_A - 3z_A + d = 0$  ومنه  $d = -3$  وبالتالي  $-3x - 3z - 3 = 0$  هي معادلة للمستوي  $(P)$  .
- 3) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$  تقاطع المستويين  $(ABC)$  و  $(P)$  :
- $$\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه بوضع } z = t \text{ نجد : } \begin{cases} 2x - 7y - 2z - 3 = 0 \\ -3x - 3z - 3 = 0 \end{cases}$$
- المستقيم  $(D)$  معرف بالجملة :
- بـ- تبين أن المستقيم  $(D)$  عمود في المثلث  $ABC$  :
- لدينا  $A \in (D)$  لأن  $A \in (P) \cap (ABC)$  ولدينا  $\vec{u}(-1;-\frac{4}{7};1)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(D)$  .
- وبما أن  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times (-3) + 0 \times \left(-\frac{4}{7}\right) + 1 \times (-3) = 0$  فإن  $\overrightarrow{BC} \perp (D)$  وبالتالي  $(D)$  عمود في المثلث  $ABC$  .
- 4)  $(\Delta)$  المتوسط المتعلق بالضلع  $[AC]$  في المثلث  $ABC$  .

$$\text{أ- تبيان أن الجملة } (k \in \mathbb{R}) \text{ ، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

( $\Delta$ ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة  $B$  والنقطة  $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -2\right)$  منتصف الضلع  $[AC]$ ، ومنه  $\vec{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$  شعاع

$$\text{توجيه لـ } (\Delta) \text{ وبالتالي تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل : } (k \in \mathbb{R}) \text{ ، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases}$$

ب- تبيان أن المستقيمين ( $\Delta$ ) و ( $D$ ) يتقاطعان في نقطة  $G$  مع تعيين إحداثياتها :

لدينا  $\vec{u}\left(-1; -\frac{4}{7}; 1\right)$  شعاع توجيه للمستقيم ( $D$ ) و  $\vec{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$  شعاع توجيه لـ ( $\Delta$ ) و  $\vec{u}$  و  $\vec{BI}$  ليسا مرتبطين خطيا .

وبالتالي المستقيمان ( $\Delta$ ) و ( $D$ ) إما ليسا من نفس المستوى أو متقاطعان .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} -t - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} = k \\ t = -2 - 4k \end{cases} \text{ فنجد } k = -\frac{1}{3}$$

وبتعويض قيمة  $k$  في الجملة نجد  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$  وهي إحداثيات النقطة  $G$  نقطة تقاطع المستقيمين

ج- تبيان أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين :

لدينا :  $\overline{AB}(-2; -2; 5)$  و  $\overline{AC}(-5; -2; 2)$  ومنه  $AC = AB = \sqrt{33}$  وبالتالي المثلث  $ABC$  متساوي الساقين .

د- ماذا تمثل النقطة  $G$  بالنسبة للمثلث  $ABC$  ؟

النقطة  $G$  هي مركز ثقل المثلث  $ABC$  ، لأنها نقطة تقاطع المتوسطات .

( $\Delta$ ) المتوسط المتعلق بالضلع  $[AC]$  و ( $D$ ) العمود والمتوسط المتعلق بالضلع  $[BC]$  و ( $\Delta$ ) و ( $D$ )  $(G \in (D) \cap (\Delta))$

$$(5) \text{ تعيين طبيعة وعناصر المجموعة } (E) \text{ للنقط } M \text{ من الفضاء والتي تحقق : } \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3 \text{ تكافئ } \|3\vec{MG}\| = 3 \text{ تكافئ } MG = 1 \text{ ومنه المجموعة } (E) \text{ هي سطح كرة مركزها } G$$

ونصف قطرها 1.

### حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية : ( $E$ ) .....  $2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$

$$(1) \text{ أ- إثبات أن المعادلة } (E) \text{ تكافئ المعادلة : } (2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$$

$$\text{لدينا : } (2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 2\bar{z}^3 - 2\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 5\bar{z}^2 - 5\bar{z} + 5 = 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5$$

$$\text{ومن المعادلة } (E) \text{ تكافئ المعادلة : } (2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$$

ب- حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة ( $E$ ) .

$$2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0 \text{ تكافئ } (2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0 \text{ أو } \bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$ .

لدينا:  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$$\bar{z}_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \bar{z}_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ومنهم } z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة ( $E$ ) هي:  $S = \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$$(2) \text{ لدينا: } z_D = -\frac{5}{2}, \quad z_C = -1, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أ- كتابة كلا من العددين  $z_B$  و  $z_A$  على الشكل الأسّي:

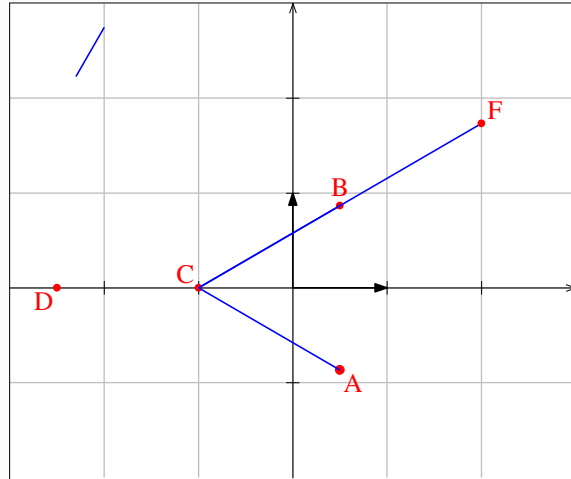
$$\text{لدينا: } z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنهم } |z_A| = 1$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنهم } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} \text{ ومنهم } z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب- الرسم:



$$\text{ج- إثبات أن: } z_B - z_C = z_B (z_A - z_C)$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = z_B$$

د- إستنتاج طبيعة المثلث  $ABC$ :

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .  
 لدينا :  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  يعني :  $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1$  و  $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3}$   
 وبالتالي المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع ومنه  $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3}$  و  $CB = CA$

النقطة  $F$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$  يعني :  $CF = 2CA$  و  $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CF}\right) = \frac{\pi}{3}$ .  
 طبيعة المثلث  $AFC$  :  
 المثلث  $AFC$  قائم في  $A$ .

(4) تعيين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $z + 1 = kz_B$  . لما يتغير  $k$  في المجموعة  $\mathbb{R}_+$ .

$$z + 1 = kz_B \text{ يكافئ } z - z_C = kz_B - z_C = ke^{i\frac{\pi}{3}} \text{ يكافئ } z - z_C = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ يكافئ } \arg(z - z_C) = \frac{\pi}{3}$$

يكافئ  $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ومنه المجموعة  $(\gamma)$  هي نصف مستقيم مبدؤه  $C$  وشعاع توجيهه  $\overrightarrow{w}$  بحيث  $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

### حل مقترح التمرين الثالث

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{2u_n + 2 - (u_n + 3)}{2u_n + 2 + 2(u_n + 3)} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{4}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$ .

(2) أكتابة عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه  $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

بـ استنتاج عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$  ومنه  $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$  ومنه  $v_n u_n + 2v_n - u_n = -1$

أي  $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$  وبالتالي  $u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$ .

$$u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} \text{ إذن :}$$

جـ حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} \right] = 1$$

(3) أ- حساب المجموع  $S_n$  :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left[ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = -\frac{1}{2} \times \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right] = -\frac{2}{3} \times \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$$

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \text{ ب- التحقق أن :}$$

$$u_n + 2 = \frac{3}{1 - v_n} \text{ ومنه } u_n + 2 = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} + 2 \text{ ومنه } u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}, n \text{ لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \text{ أي}$$

ج- حساب المجموع  $S'_n$  :

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}[(1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)] = \frac{1}{3}[n + 1 - S_n] \text{ ومنه}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left[ n + 1 + \frac{2}{3} \times \left( 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \right] = \frac{1}{9} \left[ 3n + 5 - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \text{ أي :}$$

### حل مقترح التمرين الرابع

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

(1) أ- الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$  ،

دراسة إتجاه تغير الدالة  $g'$  :

الدالة  $g'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$  ،

إشارة  $g''(x)$  :

|          |           |   |           |
|----------|-----------|---|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g''(x)$ | -         | 0 | +         |

الدالة  $g'$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  .

ب- تبيان أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$  ،

الدالة  $g'$  تقبل قيمة حدية صغرى على  $\mathbb{R}$  هي  $g'(0) = 1$  ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$  ،

ج-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$  ،

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-1,38 < \alpha < -1,37$ .

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و  $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$  أي  $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$  ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-1,38 < \alpha < -1,37$ .

(3) إشارة  $g(x)$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$ .

(1) أ- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

ب- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x \cdot g(x)$ :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0        | - | +         |

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[\alpha; 0]$  و متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; \alpha]$  و  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|---|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0           | - | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | 0 | $+\infty$ |

(2) أ- تبين أن:  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left( \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} \text{ ومنه } e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \text{ أي } g(\alpha) = 0 \text{ لدينا:}$$

$$\cdot f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1} \text{ أي:}$$

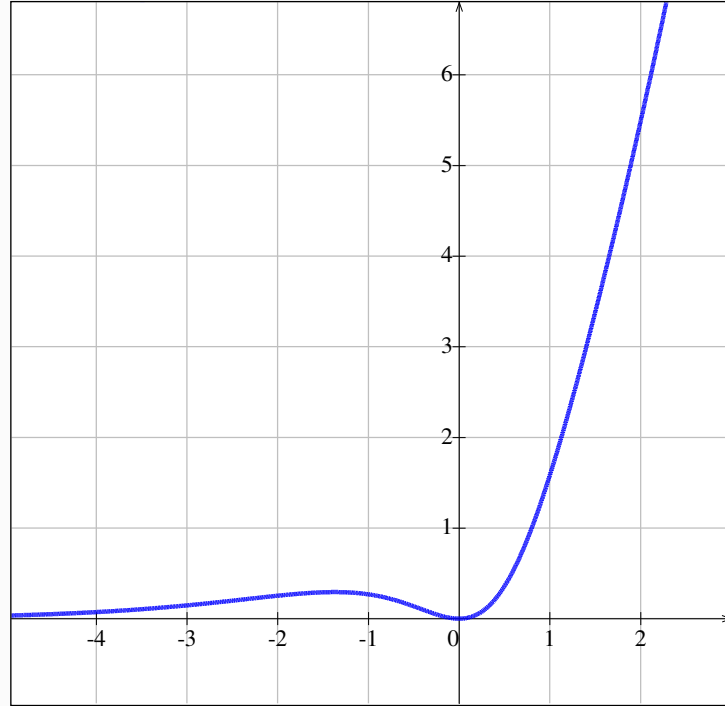
إستنتاج حصر للعدد  $f(\alpha)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{array} \right. \quad \text{لدينا : } -1,38 < \alpha < -1,37 \quad \text{يكافئ}$$

ومنه  $0,27 < f(\alpha) < 0,32$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \quad \text{بـ}$$

التفسير البياني : المنحنى  $(C_f)$  والمنحنى الممثل للدالة "مربع"  $(x \mapsto x^2)$  متقاربان عند  $+\infty$ .  
جــ الرسم :



الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة  $A(1; -1; 2)$  والمستوي  $(P)$  ذا المعادلة  $x - y + z + 2 = 0$ .
- والمستقيم  $(D)$  المعرف بـ: 
$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$
- (1) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(D)$ .
  - (2) جد معادلة ديكارتية للمستوي  $(P')$  الذي يشمل  $A$  ويوازي  $(P)$ .
  - (3) أثبت أن  $(D)$  يقطع  $(P')$  في النقطة  $A'(6; 3; 1)$ .
  - (4) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل  $A$  ويوازي  $(P)$  ويقطع  $(D)$ .

التمرين الثاني (4ن)

- $(u_n)$  و  $(v_n)$  متالتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  كما يلي:
- $u_0 = \frac{1}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$  و  $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ .
- (1) أ- برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n < 1$ .  
ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة.
  - (2) أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{5}{2}$  ثم عبّر عن حدها العام  $v_n$  بدلالة  $n$ .  
ب- أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

التمرين الثالث (5ن)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$ .
- (II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
- نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها:  $z_A = 2 - 2i$ ،  $z_B = \overline{z_A}$  و  $z_C = -2$ .
- (1) أكتب كلا من العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.
  - (2) عيّن  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  حتى تكون النقطة  $B$  مركز ثقل المثلث  $ACD$ .
  - (3)  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  (تختلف عن  $A$  و  $B$ ) بحيث:  $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$ .
- تحقق أن مبدأ المعلم  $O$  هو نقطة من  $(\Gamma)$  ثم عيّن طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  وأنشئها.
- (4) ليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه النقطة  $C$  ونسبته 2،  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحاكي  $h$ .  
عيّن طبيعة المجموعة  $(\Gamma')$  مع تحديد عناصرها المميزة.

## التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $D$  حيث  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(1)  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(2) بين أن الدالة  $f$  فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(3) أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f'(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$  .  
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$

(6) أ- بين المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة :  $y = \frac{2}{3}x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  ثم أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

(7) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

(8)  $m$  وسيط حقيقي ، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة :  $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

## الموضوع الثاني

## التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(3;0;0)$  ،  $B(0;2;0)$  و  $C(0;0;1)$  .

(1) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويًا ، ثم تحقق أن :  $2x + 3y + 6z - 6 = 0$  معادلة للمستوي  $(ABC)$  .

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  العمودي على المستوي  $(ABC)$  والذي يشمل المبدأ  $O$  .

(3) جد إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(ABC)$  .

(4) بين أن  $(BH)$  عمودي على  $(AC)$  ، ثم استنتج أن  $H$  هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث  $ABC$  .

## التمرين الثاني (4ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  و

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $[-4;1]$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

و  $(C_f)$  المنحنى الممثل لها ،  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$  .

(I) تحقق أن الدالة متزايدة تماماً على المجال  $[-4;1]$  . ثم بين أن :

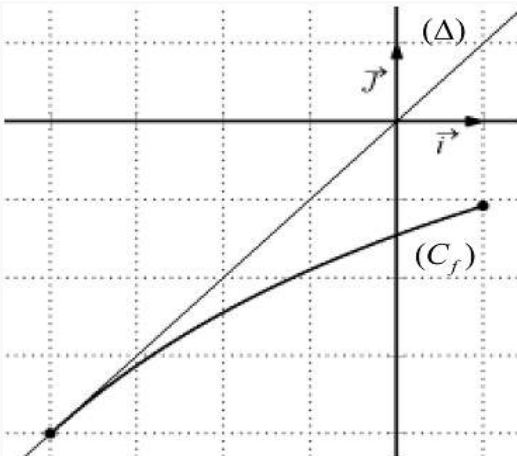
من أجل  $x \in [-4;1]$  فإن  $f(x) \in [-4;1]$  .

(II)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد

طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  دون حسابها .

ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها



(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $-4 \leq u_n \leq 0$  ،

ثم بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي :  $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $\frac{1}{7}$  ، ثم أحسب المجموع  $S$  حيث :  $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$  .

### التمرين الثالث (5)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

(1) مجموعة حلول المعادلة  $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$  في المجموعة  $\mathbb{C}$  هي :  $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$  .

(2) من أجل كل عدد مركب  $z$  ،  $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$  .

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$  .

(4)  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

صورة الدائرة  $(C)$  ذات المركز  $\omega(0;1)$  ونصف القطر 3 بالتشابه  $S$  هي الدائرة  $(C')$  ذات المركز  $\omega'(-2;-3)$  ونصف القطر 9

(5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان  $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$  فإن  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$  حيث  $k$  عدد صحيح .

### التمرين الرابع (7)

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$  .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  وأعط تفسيرا هندسيا للنتيجة ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

(2) أـ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$  ،

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة لـ  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = 1 - x e^{1-x}$  .

(1) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) \geq 0$  ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمماس  $(T)$  .

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,7 < \alpha < -0,6$  .

(3) أنشئ المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  على المجال  $[-1; +\infty[$  .

(4)  $F$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$  .

- تحقق أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(\mathcal{C}_f)$  ، حامل محور الفواصل

و المستقيمين اللذين معادليهما :  $x = 0$  و  $x = 1$  .

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة  $A(1; -1; 2)$  والمستوي  $(P)$  ذا المعادلة  $x - y + z + 2 = 0$  (1) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$ :

$$\begin{cases} x = -t + 9 \\ y = t \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نجد } y = t \text{ ومنه بوضع } y = t \text{ نجد } \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad (D) \text{ المستقيم المعرف بـ:}$$

تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$ .

(2) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي  $(P')$  الذي يشمل  $A$  ويوازي  $(P)$ :

$(P)$  يوازي  $(P')$  معناه  $\vec{n}(1; -1; 1)$  شعاع ناظمي لـ  $(P')$ ، ومنه لـ  $(P')$  معادلة من الشكل:  $x - y + z + d = 0$ .

ولدينا:  $A \in (P')$  يعني  $x_A - y_A + z_A + d = 1 - (-1) + 2 + d = 0$  أي  $d = -4$ .

إذن معادلة ديكارتية للمستوي  $(P')$  من الشكل:  $x - y + z - 4 = 0$ .

(3) إثبات أن  $(D)$  يقطع  $(P')$  في النقطة  $A'(6; 3; 1)$  حيث  $A'(6; 3; 1)$ :

$$\begin{cases} x = -t + 9 \\ y = t \\ z = -t + 4 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \text{يكافئ } (-t + 9) - t + (-t + 4) - 4 = 0 \quad \text{أي } t = 3$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(D)$  نجد  $(6; 3; 1)$  وهي إحداثيات النقطة  $A'$  تقاطع  $(D)$  و  $(P')$ .

(4) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل  $A$  ويوازي  $(P)$  ويقطع  $(D)$ :

$$\begin{cases} (D) \cap (P') \cap (\Delta) = \{A'\} \\ A \in (\Delta) \end{cases} \quad \text{لدينا:} \quad \text{ومنه } (\Delta) \text{ هو نفسه المستقيم } (AA').$$

$$\begin{cases} x = 5t' + 1 \\ y = 4t' - 1 \\ z = -t' + 2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{ولدينا } \overrightarrow{AA'}(5; 4; -1) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AA') \text{ من الشكل:}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_0 = \frac{1}{4}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$  و  $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$ .

(1) أ- البرهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n < 1$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$ ".

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$ ، لدينا  $u_0 = \frac{1}{4}$  ومنه  $0 < u_0 < 1$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي:  $0 < u_n < 1$ ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 < u_{n+1} < 1$ .

لدينا حسب الفرض  $0 < u_n < 1$  ومنه  $4 < u_n + 4 < 5$  ومنه  $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{4}$  ومنه  $\frac{-10}{5} < \frac{-10}{u_n + 4} < \frac{-10}{4}$ .

ومنه  $3 - \frac{10}{u_n + 4} < 3 - \frac{10}{4} < 1$  أي:  $0 < u_{n+1} < 1$ . وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n < 1$ .

بـ. تبين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{3(u_n + 4) - 10 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$. u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} \text{ ومنه :}$$

ولدينا :  $0 < u_n < 1$  ومنه  $1 - u_n > 0$  أي  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة .

(2) أـ. تبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{5}{2}$  :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{10}{u_n + 4} + 2}{1 - 3 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5 - \frac{10}{u_n + 4}}{-2 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5(u_n + 4) - 10}{-2(u_n + 4) + 10} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} v_n$$

ومن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{5}{2}$  .

$$. v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = 3 \text{ الحد الأول :}$$

• كتابة عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$. v_n = 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه}$$

$$u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} \text{ ، } n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$. v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \text{ ، } n \text{ من أجل كل عدد طبيعي} \text{ ومنه } v_n = -1 + \frac{3}{1 - u_n} \text{ ومنه } v_n + 1 = \frac{3}{1 - u_n}$$

$$. u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} \text{ وبالتالي :}$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty \text{ ، لأن :} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{v_n + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1}\right) = 1 \text{ لدينا :}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$  ..... (1)

$$. (z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0 \text{ تكافئ } z = -2 \text{ أو } z^2 - 4z + 8 = 0$$

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 4z + 8 = 0$  :

لدينا :  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$. z_2 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i \text{ و } z_1 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي :  $S = \{-2; 2 + 2i; 2 - 2i\}$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها:  $z_A = 2 - 2i$ ،  $z_B = \overline{z_A}$  و  $z_C = -2$

(1) كتابة كلا من العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي:

لدينا:  $z_A = 2 - 2i$  ومنه:  $|z_A| = 2\sqrt{2}$ .

$$k \in \mathbb{Z} \text{، حيث } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{، ومنه } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد } z_A \text{، يكون:}$$

$$\text{إذن: } z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } z_B = \overline{z_A}.$$

(2) تعيين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  حتى تكون النقطة  $B$  مركز ثقل المثلث  $ACD$ .

$B$  مركز ثقل المثلث  $ACD$  معناه  $B$  مرجح الجملة  $\{(A, 1); (C, 1); (D, 1)\}$ .

$$\text{ومنه: } z_D = 3z_B - z_C - z_A = \frac{z_D + z_C + z_A}{3}$$

$$\text{أي: } z_D = 3(2 + 2i) - (-2) - (2 - 2i) = 6 + 8i$$

$$(3) \quad (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ (تختلف عن } A \text{ و } B \text{) بحيث: } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$$

التحقق أن مبدأ المعلم  $O$  هو نقطة من  $(\Gamma)$ :

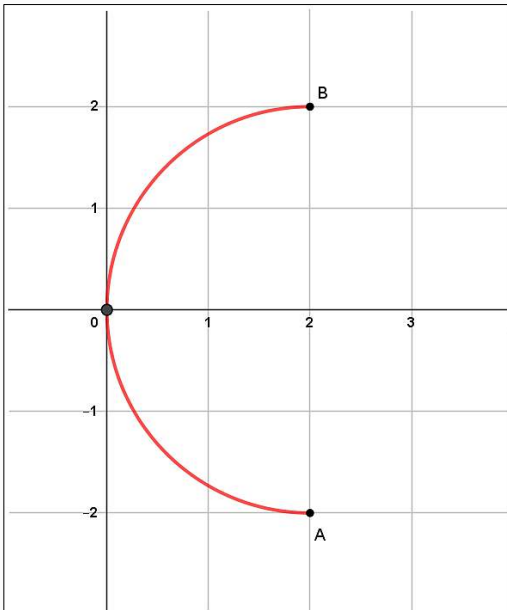
$$\text{لدينا: } \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

• تعيين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$ :

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ معناه } (MA; MB) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ / } k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } (\Gamma) \text{ هي نصف الدائرة المفتوحة التي}$$

حداها  $A$  و  $B$  وقطرها  $[AB]$  وتشمل النقطة  $O$ .

إنشاء  $(\Gamma)$ :



(4) العبارة المركبة للتحاكي  $h$  الذي مركزه النقطة  $C$  ونسبته 2 هي:

$$z' = 2z + 2$$

تعيين طبيعة المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحاكي  $h$  مع تحديد عناصرها

المجموعة  $(\Gamma')$  هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها  $A'$  و  $B'$  بحيث:  $A' = h(A)$  و  $B' = h(B)$ ، وتشمل النقطة التي

لاحقتها 2.

$$(z_{B'} = 2z_B + 2 = 6 + 4i \text{ و } z_{A'} = 2z_A + 2 = 6 - 4i)$$

$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  :  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  حيث  $f$  الدالة المعرفة على  $D$  (1) تبيان أن الدالة  $f$  فردية :

المجموعة  $D$  متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل  $x \in D$  ،  $-x \in D$ )  
ومن أجل كل  $x \in D$  ،

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم  $O$  مركز تناظر بالنسبة للمنحنى  $(C_f)$  .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[ \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتيهما :  $x = -1$  و  $x = 1$  .

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 : \text{لأن} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

(3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f'(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$  ،

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $D$  ، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left( \frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$$

إتجاه تغير الدالة  $f$  :

لدينا : من أجل كل  $x$  من  $D$  ،  $x^2-1 > 0$  ومنه  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $D$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         |           | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

(4) تبيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$  :

$$\begin{cases} f(1,9) \approx 0,10 \\ f(1,8) \approx -0,05 \end{cases} \quad \text{و} \quad ]1,8; 1,9[ \subset ]1; +\infty[ \quad \text{و} \quad ]1; +\infty[ \text{ المجال } f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على}$$

أي  $f(1,8) \times f(1,9) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]1; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$  .

$$(5) \text{ لدينا : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = 1 : \text{لأن} , \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

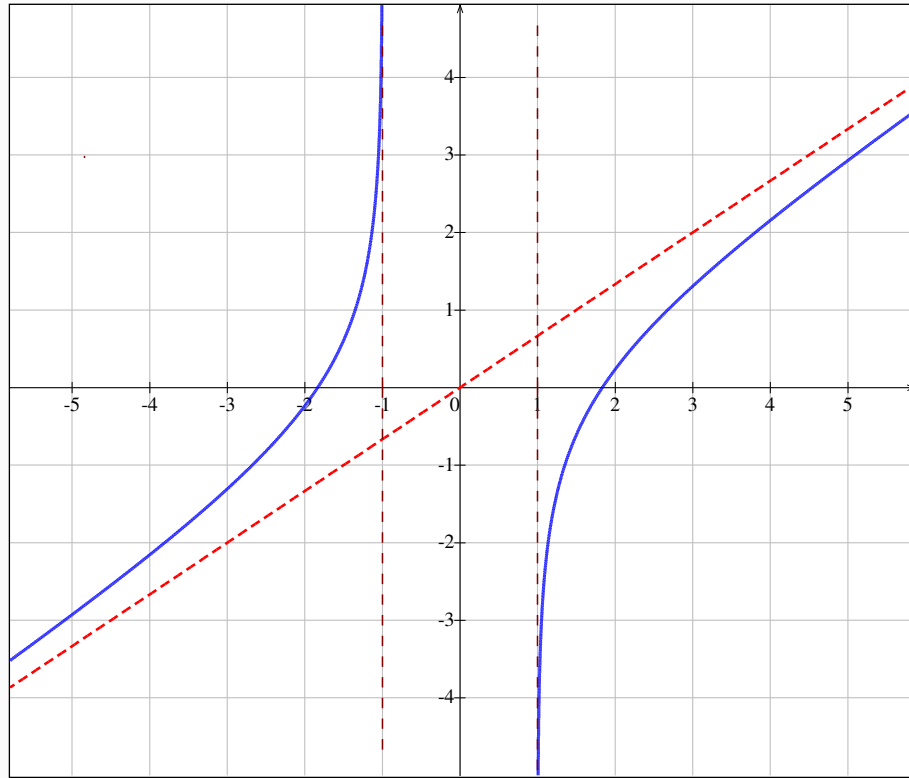
ومن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة :  $y = \frac{2}{3}x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  .

دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = f(x) - y = f(x) - \frac{2}{3}x$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

| $x$          | $-\infty$              | $-1$ | $1$                    | $+\infty$ |
|--------------|------------------------|------|------------------------|-----------|
| $f(x) - y$   | +                      |      | -                      |           |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |      | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |           |

(6) الرسم :



(7) المناقشة البيانية :

$\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x$  تكافئ  $2x - 3|m|x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$  تكافئ  $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$  أي  $f(x) = |m|x$  ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = |m|x$ .

(مناقشة دورانية)

إذا كان  $m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$  أي  $|m| \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$  فإن المعادلة تقبل حلين متميزين.

إذا كان  $m \in \left[-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$  أي  $|m| \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$  فإن المعادلة لا تقبل حلول.

حل مقترح التمرين الأول

$A$  ،  $B$  و  $C$  النقط من بحيث :  $A(3;0;0)$  ،  $B(0;2;0)$  و  $C(0;0;1)$

(1) تبيان أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$  و  $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

الشعاان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا لأن  $x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{AC}}$  لكن  $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\overrightarrow{AC}}$  ومنه النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

• التحقق أن :  $2x + 3y + 6z - 6 = 0$  معادلة للمستوي  $(ABC)$  :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة .

$$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 6 \times 0 - 6 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 6 \times 0 - 6 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C + 3y_C + 6z_C - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 6 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  العمودي على المستوي  $(ABC)$  والذي يشمل المبدأ  $O$  .

$(\Delta)$  يعامد المستوي  $(ABC)$  يعني أن  $\vec{n}(2;3;6)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  .

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{من الشكل :}$$

(3) إيجاد إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(ABC)$  :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

$$t = \frac{6}{49}$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(\Delta)$  نجد  $(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49})$  وهي إحداثيات النقطة  $H$  .

(4) تبيان أن  $(BH)$  عمودي على  $(AC)$  :

$$\overrightarrow{BH}(\frac{12}{49}; -\frac{86}{49}; \frac{36}{49}) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-3;0;1) \text{ لدينا :}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = -3 \times \frac{12}{49} + 0 \times (-\frac{86}{49}) + 1 \times \frac{36}{49} = 0 \text{ ومنه } (BH) \perp (AC) \text{ وبالتالي}$$

• استنتاج أن  $H$  هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث  $ABC$  .

$$\overrightarrow{AH}(-\frac{147}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}) \text{ و } \overrightarrow{BC}(0;-2;1) \text{ لدينا :}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \times (-\frac{147}{49}) - 2 \times (\frac{18}{49}) + 1 \times \frac{36}{49} = 0 \text{ ومنه } (AH) \perp (BC) \text{ وبالتالي}$$

إذن  $H$  هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث  $ABC$  .

$f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$  : كما يلي :  $f(x)$  المعرفة على المجال  $[-4;1]$  .  
(I) التحقق أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[-4;1]$  .

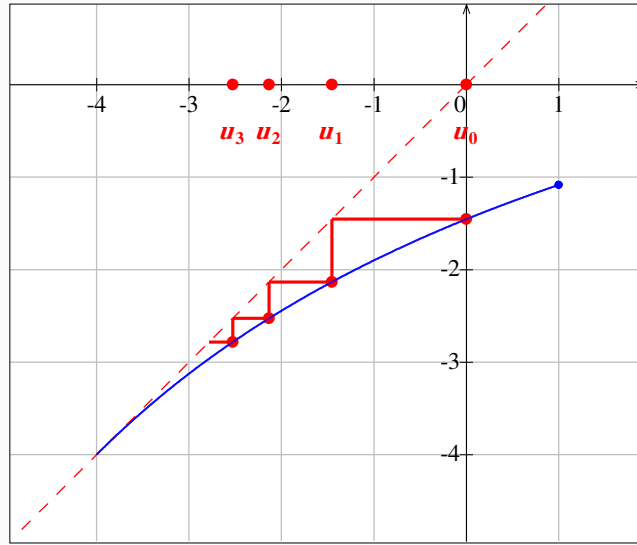
$$f'(x) = \frac{3(x+11) - (3x-16)}{(x+11)^2} = \frac{49}{(x+11)^2} \text{ و } [-4;1] \text{ على المجال}$$

لدينا : من أجل كل  $x \in [-4;1]$  ،  $f'(x) > 0$  ، وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[-4;1]$  .  
تبيان أنه من أجل  $x \in [-4;1]$  فإن  $f(x) \in [-4;1]$  :

لدينا : الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[-4;1]$  وبالتالي من أجل  $x \in [-4;1]$  فإن  $f(x) \in [f(-4); f(1)]$  أي :  $f(x) \in \left[-4; -\frac{13}{12}\right]$  و لدينا  $\left[-4; -\frac{13}{12}\right] \subset [-4;1]$  ومنه : من أجل كل  $x \in [-4;1]$  فإن  $f(x) \in [-4;1]$  .

(II)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بعدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أتمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية  $(u_n)$  متناقصة و متقاربة نحو العدد  $-4$  .

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $-4 \leq u_n \leq 0$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-4 \leq u_n \leq 0$  " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 0$  ومنه  $-4 \leq u_0 \leq 0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $-4 \leq u_n \leq 0$  ، و نبهن صحة  $P(n+1)$  أي  $-4 \leq u_{n+1} \leq 0$  .

لدينا حسب الفرض  $-4 \leq u_n \leq 0$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً فإن  $f(-4) \leq f(u_n) \leq f(0)$

$$\text{أي } -4 \leq u_{n+1} \leq -\frac{16}{11} \leq 1 \text{ وبالتالي } P(n+1) \text{ صحيحة .}$$

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $-4 \leq u_n \leq 0$  .

- تبيان أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{3u_n - 16 - u_n(u_n + 11)}{u_n + 11} = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11}$$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً .

(3) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي :  $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$  أي  $v_n = \frac{1}{u_n + 4}$ .

إثبات أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $\frac{1}{7}$  :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16 + 4(u_n + 11)}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4 + 7}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{7} + v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $\frac{1}{7}$  و  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول

• حساب المجموع  $S$  حيث :  $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا :  $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + \dots + (1 - 4v_{2016})$

ومنه :  $S = 2017 \times 1 - 4(v_0 + v_1 + \dots + v_{2016}) = 2017 - 4 \left[ \frac{2017}{2} (v_0 + v_{2016}) \right]$

$$S = 2017 - 4 \left[ \frac{2017}{2} \left( \frac{1}{4} + 288 \right) \right] = -1161792 \text{ أي :}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة :

(1) مجموعة حلول المعادلة  $\left( \frac{z+1-i}{z-i} \right)^2 = 1$  في المجموعة  $\mathbb{C}$  هي :  $S = \left\{ -\frac{1}{2} + i \right\}$  ← صحيح .  
التبرير :

$$\left( \frac{z+1-i}{z-i} \right)^2 = 1 \text{ تكافئ } (z+1-i)^2 = (z-i)^2 \text{ أو } \begin{cases} z+1-i = z-i \\ z+1-i = -(z-i) \end{cases} \text{ أي } z = -\frac{1}{2} + i$$

(2) من أجل كل عدد مركب  $z$  ،  $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$  ← صحيح .  
التبرير :

$$(z+2)(\bar{z}+2) = (z+2)(\overline{z+2}) = |z+2|^2$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $\left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n} = 1$  ← خطأ .  
التبرير :

$$\left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n} = \left( e^{i \frac{\pi}{3}} \right)^{3n} = \left[ \left( e^{i \frac{\pi}{3}} \right)^3 \right]^n = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$$

(4)  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

صورة الدائرة  $(C)$  ذات المركز  $\omega(0;1)$  ونصف القطر 3 بالتشابه  $S$  هي الدائرة  $(C')$  ذات المركز  $\omega'(-2;-3)$  ونصف القطر 9  
صحيح  
التبرير :

العبارة المركبة للتشابه  $S$  هي :  $z' = 3e^{i \frac{\pi}{2}}(z-1) + 1 = 3iz - 3i + 1$

لدينا :  $z_\omega = i$  ومنه  $z_{\omega'} = 3iz_\omega + 1 - 3i = -2 - 3i$

ولدينا :  $r' = |k| \times r = 3 \times 3 = 9$

(5) من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$  : إذا كان  $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$  فإن  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$  صحيح .

التبرير : حيث  $k$  عدد صحيح .

من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$  :

$$z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha) = i (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times (e^{-i\alpha})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-2i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)}$$

$$\text{ومنه } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$$

### حل مقترح التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$  .

$$(1) \text{ تبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$$

(2) أـ الدالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$f'(x) = -2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x)e^{1-x} = x(x-2)e^{1-x}$$

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x(x-2)$  :

|         |           |   |   |           |   |
|---------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | 0         | + |

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[0; 2]$  و متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; 0]$  و  $[2; +\infty[$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |           |   |   |           |             |  |   |
|---------|-----------|---|---|-----------|-------------|--|---|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |             |  |   |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | 0         | +           |  |   |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | 2 |           | $2-4e^{-1}$ |  | 2 |

(3) كتابة معادلة لـ  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا :  $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$  ومنه  $(T) : y = -x + 2$  .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = 1 - xe^{1-x}$  .

(1) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) \geq 0$  :

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$  ،

إشارة  $h'(x)$  :

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | -         | 0 | +         |

الدالة  $h$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 1]$  و متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$  .

الدالة  $h$  تقبل قيمة حدية صغرى على  $\mathbb{R}$  هي  $h(1) = 0$  ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) \geq 0$  .

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المماس  $(T)$  :

لدينا :  $f(x) - y = 2 - x^2 e^{1-x} + x - 2 = x(1-x)e^{1-x} = xh(x)$

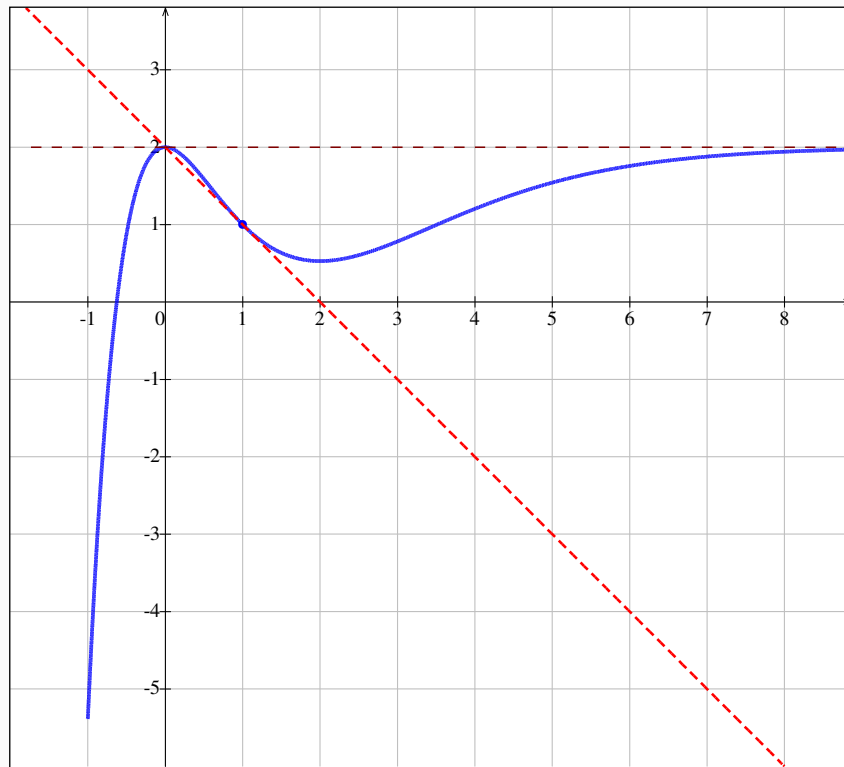
| $x$          | $-\infty$                  | 0 | 1                          | $+\infty$ |
|--------------|----------------------------|---|----------------------------|-----------|
| $f(x) - y$   | -                          | 0 | +                          | +         |
| الوضع النسبي | (C <sub>f</sub> ) تحت (T)  |   | (C <sub>f</sub> ) فوق (T)  |           |
|              | (C <sub>f</sub> ) يقطع (T) |   | (C <sub>f</sub> ) يقطع (T) |           |

(2) تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,7 < \alpha < -0,6$ .

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 0[$  و  $]-\infty; 0[ \subset ]-0,7; -0,6[$  و  $f(-0,7) \approx -0,7$   
 $f(-0,6) \approx 0,2$

أي  $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,7 < \alpha < -0,6$ .

(3) الرسم :



(4) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

- التحقق أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :

الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2 e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما :  $x = 1$  و  $x = 0$

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) u a$$

## الموضوع الأول

### التمرين الأول (4ن)

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) أحسب الحدين  $u_1$  و  $v_1$ .

(2) أكتب  $u_{n+2} - u_{n+1}$  بدلالة  $u_{n+1} - u_n$ .

بـ باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما والمتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $w_0$  ثم عبر عن  $w_n$  بدلالة  $n$ .

(4) بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

### التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(1;1;-1)$  ،  $B(2;-1;-1)$  و  $C(4;-4;-2)$ .

و المستوي  $(P)$  ذا المعادلة الديكارية  $x - 2y + 2z - 3 = 0$ .

(1) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا.

(2) بين المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  غير متوازيين.

(3) تحقق أن الجملة :  $(\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$  ،  $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$  تمثيل وسيطي للمستوي  $(ABC)$ .

(4) جد تمثيلا وسيطيا لـ  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$ .

### التمرين الثالث (5ن)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$ .

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  حيث :  $\|\vec{u}\| = 2\text{cm}$ .

نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها :  $z_A = 2$  ،  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$  و  $z_C = \overline{z_B}$

(1) أـ أكتب  $z_B$  على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب  $z_C$ .

بـ عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  ، ثم أنشئ النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$ .

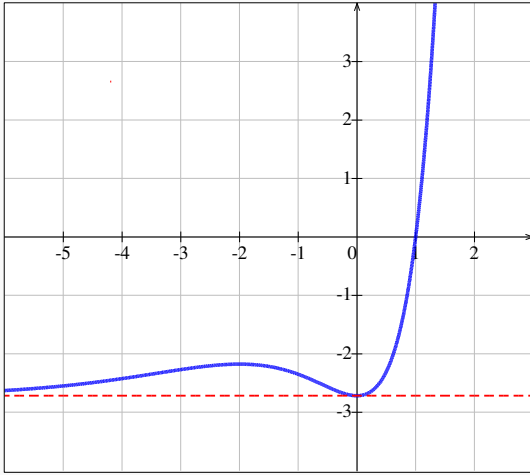
(2) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$  ولتكن  $F$  صورة  $A$  بالتحويل  $S$ .

أـ أكتب العبارة المركبة للتشابه  $S$  ثم عين لاحقة كل  $A'$  ،  $B'$  و  $C'$  من صور النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  على الترتيب بالتشابه  $S$ .

ثم أنشئ في المعلم السابق النقط  $A'$  ،  $B'$  و  $C'$ .

بـ أحسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث  $A'B'C'$ .

## التمرين الرابع (7ن)



(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = x^2 e^x - e$ .

$(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل)

- أحسب  $g(1)$ .

- بقراءة بيانية عين إشارة  $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة  $g(-x)$

- حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب النهايات الآتية:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) بين أن المنحنى  $(\gamma)$  الذي معادلته  $y = e^{-x} - 2$  و المنحنى  $(C_f)$  متقاربان بجوار  $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\gamma)$ .

(3) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ،  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$ .

(4) استنتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $[0; +\infty[$  و متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى  $(\gamma)$  انطلاقا من منحنى الدالة  $e^x$ ،  $x \mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من  $(\gamma)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم السابق.

(6) ليكن  $n$  عددا طبيعيا و  $A(n)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n.$$

أحسب العدد الحقيقي  $l$  حيث:  $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$ .

## الموضوع الثاني

## التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(-8; 0; -2)$ ،  $B(1; 2; 1)$ ،  $C(2; 3; -1)$  و  $E(1; 1; 4)$ .

و المستوي  $(P)$  ذا المعادلة  $2x + y - 3 = 0$ .

(1) أ- بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا.

ب- عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى يكون  $\vec{n}(1; \alpha; -1)$  شعاعا ناظما للمستوي  $(ABC)$  ثم عين معادلة ديكارتية له.

(2) بين أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ ، ثم تحقق أن  $E$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  و  $\vec{u}(1; -2; 7)$  شعاع توجيه له.

(3) لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; -2), (C; 3)\}$ ، نرمز بـ  $(\Gamma)$  إلى مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:

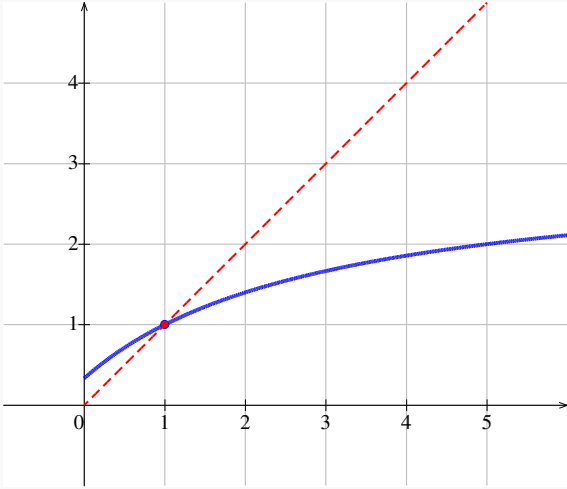
$$(\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$$

عين إحداثيات النقطة  $G$  ثم حدد طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  و أكتب معادلة ديكارتية لها.

(4) عين إحداثيات نقط تقاطع  $(P)$ ،  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$ .

### التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم



متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  و  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$

$\alpha$  عدد حقيقي موجب ،  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها

الأول  $u_0 = \alpha$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيم  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة .

(II) نضع في كل مايلي :  $\alpha = 5$

(1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود

$u_0, u_1, u_2, u_3$  دون حسابها .

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  يطلب تعيين حدها الأول .

ب- عبر بدلالة  $n$  عن  $v_n$  و  $u_n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(3) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$  .

ثم استنتج بدلالة  $n$  المجموع :  $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$  .

### التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها على الترتيب :  $z_A = -3 - 2i$  ،  $z_B = 1 + i$  و  $z_C = 4 - 3i$

(1) عين النسبة وزاوية للتشابه  $S$  المباشري المركز  $A$  والذي يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$  .

(2) أكتب على الشكل الأساسي العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(3) نرمز بـ  $G$  إلى مركز ثقل المثلث  $ABC$  وبـ  $I$  إلى منتصف القطعة  $[AC]$  .

عين كلا من  $z_G$  و  $z_I$  لاحقتي النقطتين  $G$  و  $I$  ، ثم بين أن النقط  $B$  ،  $G$  و  $I$  في إستقامة .

(4) نعتبر النقطة  $D$  نظيرة النقطة  $B$  بالنسب إلى  $I$  . حدد بدقة طبيعة الرباعي  $ABCD$  .

(5) نعتبر  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق :  $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$  .

أ- تحقق أن النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$  .

ب- عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  ثم أنشئها .

(I) نعتبر  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$  ثم فسر النتيجة بيانيا .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  ،  $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$  ، بـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) حل في المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  المعادلة  $f(x) = 0$  ، ثم استنتج إشارة  $f(x)$  .

(4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أنشئ  $(C_f)$  .

(II) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  كما يلي :  $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$  . (1) أـ أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

بـ بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث :  $1,2 < \alpha < 1,3$  . جـ استنتج إشارة  $g(x)$  .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماما من :  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$  .

أثبت أن : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  .

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتايتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) حساب الحدين  $u_1$  و  $v_1$  :

$$v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

(2) أـ كتابة  $u_{n+2} - u_{n+1}$  بدلالة  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) \quad , \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

بـ البرهان بالتراجع أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} \geq u_n$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} \geq u_n$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 1$  و  $u_1 = \frac{7}{4}$  و منه  $u_1 > u_0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_{n+1} \geq u_n$  ، و نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ .

لدينا حسب الفرض  $u_{n+1} \geq u_n$  و منه  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ولدينا مما سبق  $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

و منه  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$  وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} \geq u_n$  أي أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

- البرهان بالتراجع بين أن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_{n+1} \leq v_n$ "

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $v_0 = 6$  و  $v_1 = \frac{11}{2} = 5.5$  و منه  $v_1 < v_0$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $v_{n+1} \leq v_n$  ، و نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$ .

لدينا حسب الفرض  $v_{n+1} \leq v_n$  و منه  $v_{n+1} - v_n \leq 0$  ولدينا  $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$  و منه  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} \leq v_n$  وبالتالي المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماما .

(3) نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $w_n = u_n - v_n$

تبيان أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n : w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \left(\frac{3}{4}v_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$

ومنه المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  وحدها الأول  $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$

• كتابة عبارة الحد العام  $w_n$  بدلالة  $n$  :

من أجل كل عدد طبيعي  $n : w_n = w_0 \times q^n$  و منه  $w_n = -5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(4) تبيان أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان :

لدينا : المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما و المتتالية  $(v_n)$  متناقصة تماما .

و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$  و منه المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

### حل مقترح التمرين الثاني

$A$  ،  $B$  و  $C$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(1;1;-1)$  ،  $B(2;-1;-1)$  و  $C(4;-4;-2)$  .

و المستوي  $(P)$  ذا المعادلة الديكارسية  $0 = x - 2y + 2z - 3$  .

(1) تبيان أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(1;-2;0)$  و  $\overrightarrow{AC}(3;-5;-1)$  و  $\frac{3}{1} \neq \frac{-5}{-2}$  و منه الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطيا وبالتالي

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .

(2) تبين أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  غير متوازيين :

يكفي إثبات أن الشعاع الناطمي لـ  $(P)$  لا يعامد  $\overrightarrow{AB}$  ولا  $\overrightarrow{AC}$ .

لدينا :  $\vec{n}(1;-2;2)$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1+4+0=5$  و  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 3+10-2=11$  ومنه المستويان  $(P)$  و  $(ABC)$  غير متوازيين .

(3) التحقق أن الجملة :  $(\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$  ،  $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$  تمثيل وسيطي للمستوي  $(ABC)$  .

النقط  $A, B, C$  تعين مستويا وبالتالي يكفي التحقق أن إحداثيات النقط  $A, B, C$  تحقق الجملة .

$$A \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 1 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 1 = -2 + \alpha - 3\beta \\ 1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$$

$$B \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 2 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$$

$$C \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 4 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = -2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 4 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -4 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -2 = \beta \end{cases}$$

(4) إيجاد تمثيل وسيطي لـ  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  :

$$\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ -2 + \alpha - 3\beta - 2(6 - 2\alpha + 5\beta) + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}\beta \\ y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ \alpha = \frac{11}{5}\beta + \frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}\beta \\ y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل :}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$  .

$(z + 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$  تكافئ  $z = 2$  أو  $z^2 + 2z + 4 = 0$  .

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 + 2z + 4 = 0$  :

لدينا :  $\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2 = (2\sqrt{3}i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1+i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي:  $S = \{2; -1+i\sqrt{3}; -1-i\sqrt{3}\}$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  حيث:  $\|\vec{u}\| = 2\text{cm}$

نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لاحقاتها:  $z_A = 2, z_B = -1+i\sqrt{3}$  و  $z_C = \overline{z_B}$

(1) أ- كتابة  $z_B$  على الشكل الأسّي:

لدينا:  $z_B = -1+i\sqrt{3}$  ومنه:  $|z_B| = 2$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } \arg(z_B) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \begin{cases} \cos \theta_B = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B, \text{ يكون:}$$

$$\text{إذن: } z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا: } z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ ومنه } z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

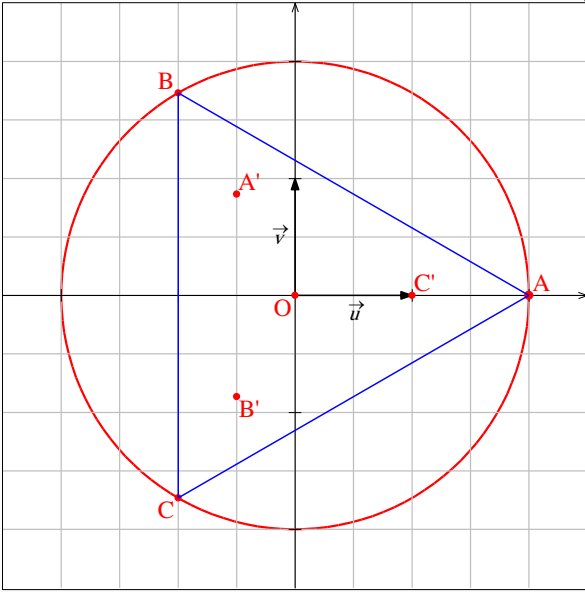
ب- تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$

لدينا:  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$  أي:  $OA = OB = OC = 2$

ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  هي النقطة  $O$

مبدأ المعلم ونصف قطرها 2.

إنشاء النقط  $A, B, C$



(2) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$  ولتكن  $F$  صورة  $A$  بالتحويل  $S$ .

$$\text{أ- العبارة المركبة للتشابه } S: (z - z_O) = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O) \text{ أي: } z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

تعيين لاحقات كل من  $A', B', C'$  من صور النقط  $A, B, C$  بالتشابه  $S$ :

$$z_{A'} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي: } z_{A'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_{B'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي: } z_{B'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_{C'} = 1 \text{ أي: } z_{C'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = 1$$

إنشاء النقط  $A', B', C'$ : أنظر الشكل السابق.

ب- حساب مساحة المثلث  $A'B'C'$ :

$$\text{لدينا: } S_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABC}$$

$$\text{ولدينا: } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = x^2 e^x - e$ .

-  $g(1) = e^1 - e = 0$ .

- إشارة  $g(x)$  :

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           | - | +         |

- إشارة  $g(-x)$  :

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $g(-x)$ |           | +  | -         |

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ .

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{e}{x} \right) = 0$  ومنه  $(C_f)$  والمنحنى  $(\gamma)$  ذي المعادلة  $y = e^{-x} - 2$  متقاربان عند  $-\infty$

دراسة وضعيّة المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\gamma)$  :

لدينا:  $f(x) - y = -\frac{e}{x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $-x$  :

|              |                           |   |                           |
|--------------|---------------------------|---|---------------------------|
| $x$          | $-\infty$                 | 0 | $+\infty$                 |
| $f(x) - y$   | +                         |   | -                         |
| الوضع النسبي | (C <sub>f</sub> ) فوق (γ) |   | (C <sub>f</sub> ) تحت (γ) |

(3) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ،  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر  $f$  الدالة: إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(-x)$  :

|         |           |    |   |           |
|---------|-----------|----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0  | + | +         |

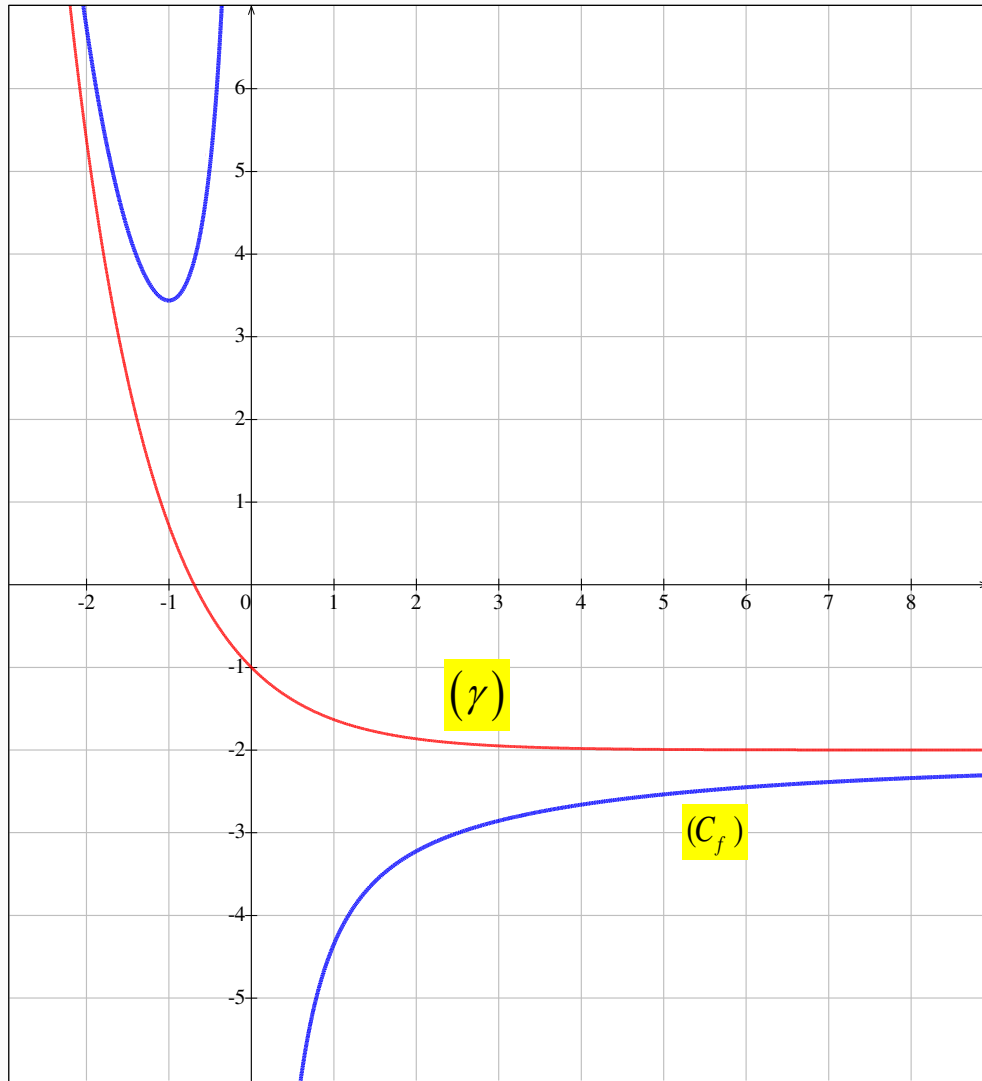
ومنه الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $[0; +\infty]$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -1]$ .

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

|         |           |          |           |           |
|---------|-----------|----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1       | 0         | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | 0        | +         | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $2e - 2$ | $+\infty$ | $-2$      |

(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى  $(\gamma)$  انطلاقاً من منحنى الدالة  $x \mapsto e^x$ :

لدينا:  $(\gamma)$  المنحنى ذي المعادلة  $y = e^{-x} - 2$  ومنه  $(\gamma)$  هو صورة  $(\Gamma)$  منحنى الدالة  $x \mapsto e^{-x}$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(0; -2)$ ، علماً أن  $(\Gamma)$  هو نظير منحنى الدالة  $x \mapsto e^x$  بالنسبة لحامل محاور الترتيب.  
الرسم:



(5)  $n$  عدد طبيعي و  $A(n)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما:  
 $x = -e^{n+1}$  و  $x = -e^n$ .

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( -\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( \frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي  $l : l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$ .

حل مقترح التمرين الأول

$A, B, C$  و  $E$  النقط من الفضاء بحيث :  $A(-8;0;-2)$  ،  $B(1;2;1)$  ،  $C(2;3;-1)$  و  $E(1;1;4)$ .

و المستوي  $(P)$  ذا المعادلة  $2x + y - 3 = 0$ .

(1) أ- تبين أن النقط  $A, B, C$  تعين مستويا :

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(9;2;3)$  و  $\overrightarrow{AC}(10;3;1)$

الشعاان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا لأن  $\frac{9}{10} \neq \frac{3}{2}$  ومنه النقط  $A, B, C$  ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

ب- تعيين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى يكون  $\vec{n}(1;\alpha;-1)$  شعاعا ناظما للمستوي  $(ABC)$  :

الشعاع  $\vec{n}(1;\alpha;-1)$  ناظمي للمستوي  $(ABC)$  معناه :  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$  و  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 9 + 2\alpha - 3 = 0 \\ 10 + 3\alpha - 1 = 0 \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 6 + 2\alpha = 0 \\ 9 + 3\alpha = 0 \end{array} \right. \text{ ومنه } \alpha = -3$$

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  :

لدينا  $\vec{n}(1;-3;-1)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  ومنه  $\perp (ABC)$  معادلة من الشكل :  $x - 3y - z + d = 0$ .

ولدينا  $A \in (ABC)$  ومنه  $d = 0 - (-2) - 3 \times 0 - 8 = -6$  أي  $d = 6$ .

إذن :  $x - 3y - z + 6 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .

(2) تبين أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $\vec{n}(1;-3;-1)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  و  $\vec{n}_P(2;1;0)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$ .

الشعاان  $\vec{n}$  و  $\vec{n}_P$  ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان  $(P)$  و  $(ABC)$  يتقاطعان وفق مستقيم.

• التحقق أن  $E$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  :

لدينا :  $E \in (P)$  لأن  $2 \times 1 + 1 - 3 = 0$  ، و  $E \in (ABC)$  لأن  $1 - 3 \times 1 - 4 + 6 = 0$ .

ومنه  $E \in (P) \cap (ABC)$  أي :  $E \in (\Delta)$ .

• التحقق أن  $\vec{u}(1;-2;7)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  :

يكفي إثبات أن :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  و  $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 0$

لدينا :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 - 3 \times (-2) - 1 \times 7 = 0$  و  $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 7 = 0$  ومنه  $\vec{u}(1;-2;7)$  شعاع

توجيه لـ  $(\Delta)$ .

(3) لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A;1), (B;-2), (C;3)\}$  ، نرمز بـ  $(\Gamma)$  إلى مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق :

$$(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

• تعيين إحداثيات النقطة  $G$  :

$$G\left(-2; \frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right) \text{ أي : } \left\{ \begin{array}{l} x_G = -2 \\ y_G = \frac{5}{2} \\ z_G = -\frac{7}{2} \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{1 \times (-8) - 2 \times 1 + 2 \times 3}{1 - 2 + 3} \\ y_G = \frac{1 \times 0 - 2 \times 2 + 3 \times 3}{1 - 2 + 3} \\ z_G = \frac{1 \times (-2) - 2 \times 1 + 3 \times (-1)}{1 - 2 + 3} \end{array} \right.$$

• تحديد طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  :

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ تكافئ } 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ تكافئ } (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

ومنه المجموعة  $(\Gamma)$  هي المستوي الذي يشمل النقطة  $G$  و  $\overrightarrow{CB}$  شعاع ناظمي له.

• كتابة معادلة ديكارتية للمجموعة  $(\Gamma)$  :

بما أن  $(\Gamma)$  يشمل النقطة  $G$  و  $\overrightarrow{CB}(-1; -1; 2)$  شعاع ناظمي له فإن للمستوي  $(\Gamma)$  معادلة

$$\text{من الشكل : } -x - y + 2z + \frac{15}{2} = 0$$

(4) تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(P)$ ،  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  :

$$\text{لدينا : } (ABC) \cap (P) \cap (\Gamma) = [(ABC) \cap (P)] \cap (\Gamma) = (\Delta) \cap (\Gamma)$$

لندرس تقاطع  $(\Gamma)$  و  $(\Delta)$  :

$$\text{لدينا تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل : } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 7t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ (تذكر أن } (\Delta) \text{ يشمل } E \text{ و } \vec{u} \text{ شعاع توجيه له)}$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 7t + 4 \\ -x - y + 2z + \frac{15}{2} = 0 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } -(t+1) - (-2t+1) + 2(7t+4) + \frac{15}{2} = 0 \text{ أي } t = -\frac{9}{10}$$

وبتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطي لـ  $(\Delta)$  نجد  $(\frac{1}{10}; \frac{14}{5}; -\frac{23}{10})$  وهي إحداثيات نقطة تقاطع  $(P)$ ،  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$ .

### حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

$\alpha$  عدد حقيقي موجب ،  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على بعدها الأول  $u_0 = \alpha$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

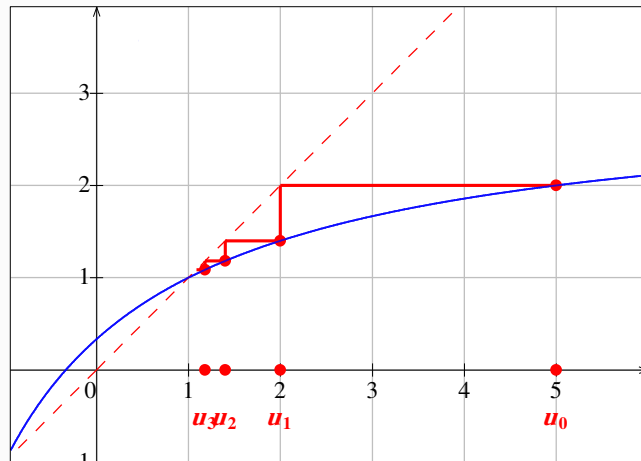
(1) تعيين قيم  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة.

$(u_n)$  متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ،  $u_{n+1} = u_n = u_0$

$$\text{أي نحل المعادلة } f(\alpha) = \alpha \text{ وهذا يكافئ } \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha \text{ يكافئ } \alpha^2 = 1$$

وبما أن  $\alpha$  عدد حقيقي موجب فإنه من أجل  $\alpha = 1$  تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة.

(2) أتمثيل الحدود :



ب- التخمين : المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1.

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

أ- تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 1 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 2}{4u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول}$$

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n \text{ أي } v_n = \frac{2}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \text{ ومنه } v_n u_n - u_n = -v_n - 1$$

$$\text{أي } u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} = \frac{\frac{2}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^n + 1}{1 - \frac{2}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^n} = \frac{3 + 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n} \text{ إذن : } u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$$

حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3 + 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n} \right) = 1$$

(4) حساب المجموع :  $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$  :

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016} = v_n \left[ \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2017} \right)$$

$$\text{استنتاج المجموع : } S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$$

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1} \text{ أي } \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2}$$

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1} = \frac{1 - v_n}{2} + \frac{1 - v_{n+1}}{2} + \dots + \frac{1 - v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2} (2017) - \frac{1}{2} S_n$$

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها على الترتيب:  $z_A = -3 - 2i$  ،  $z_B = 1 + i$  و  $z_C = 4 - 3i$  .  
 (1) تعيين النسبة وزاوية التشابه  $S$  المباشري المركز  $A$  والذي يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$  :

$$k = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| : \text{لدينا: } \begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \text{ ومنه } z_C - z_A = k e^{i\theta} (z_B - z_A) \text{ ومنه نسبة التشابه } S \text{ هي:}$$

$$\theta = \arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \text{ هي زاوية التشابه } S$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - 3i - (-3 - 2i)}{1 + i - (-3 - 2i)} = \frac{7 - i}{4 + 3i} = \frac{(7 - i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = 1 - i \text{ : لدينا}$$

$$\theta = \arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \text{ و } k = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |1 - i| = \sqrt{2} \text{ ومنه}$$

(2) كتابة العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 - 2i - (1 + i)}{4 - 3i - (1 + i)} = \frac{-4 - 3i}{3 - 4i} = \frac{-i(-4i + 3)}{3 - 4i} = -i \text{ : لدينا}$$

طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\begin{cases} BA = BC \\ \left( \overline{BC}; \overline{BA} \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ يكافئ}$$

ومن المثلث  $ABC$  قائم في  $B$  ومتساوي الساقين .

(3) نرمزب  $G$  إلى مركز ثقل المثلث  $ABC$  وب  $I$  إلى منتصف القطعة  $[AC]$  .

تعيين كلا من  $z_I$  و  $z_G$  لاحقتي النقطتين  $G$  و  $I$  :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3 - 2i + 4 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \text{ و } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-3 - 2i + 1 + i + 4 - 3i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$$

تبيان أن النقط  $B$  ،  $G$  و  $I$  في إستقامية :

$$\text{لدينا: } \frac{z_G - z_I}{z_B - z_I} = \frac{\left( \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \right)}{(1 + i) - \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \right)} = \frac{1}{3} \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{GI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BI} \text{ ومنه النقط } B \text{ ، } G \text{ و } I \text{ في إستقامية.}$$

(4) النقطة  $D$  نظيرة النقطة  $B$  بالنسبة إلى  $I$  .

طبيعة الرباعي  $ABCD$  :

الرباعي مربع لأن المثلث  $ABC$  قائم متساوي الساقين .

$$(5) \quad \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق:}$$

أ- التحقق أن النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$  :

$$\text{لدينا: } \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = AC = |z_C - z_A| = 5\sqrt{2} \text{ ومنه } C \in (\Gamma)$$

ب- تعيين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  ثم إنشائها :

$$\text{لدينا: } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \text{ تكافئ } \|2\overrightarrow{MI}\| = 5\sqrt{2} \text{ تكافئ } MI = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه المجموعة هي الدائرة التي مركزها } I$$

$$\text{ونصف قطرها } \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \quad \text{كما يلي : } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ المجال } f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } \quad \text{I}$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[ \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[ \left( \frac{1}{(2x+1)^2} \right) [1+2\ln(2x+1)] \right] = -\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة  $x = -\frac{1}{2}$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

$$(2) \text{ أ- الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ :$$

$$f'(x) = \frac{4}{2x+1} \times (2x+1)^2 - 4(2x+1)[1+2\ln(2x+1)] = \frac{(2x+1)[-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } -8\ln(2x+1) \text{ لأن } (2x+1)^3 > 0 \text{ من أجل } x \text{ من } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ :$$

|         |                |   |           |
|---------|----------------|---|-----------|
| $x$     | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |                | + | -         |

الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $\left] -\frac{1}{2}; 0 \right[$  ومتناقصة على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |                |   |           |
|---------|----------------|---|-----------|
| $x$     | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |                | + | -         |
| $f(x)$  |                | 1 | 0         |

$$(3) \text{ حل في المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ المعادلة } f(x) = 0 :$$

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } 1+2\ln(2x+1) = 0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1) = -\frac{1}{2} \text{ تكافئ } 2x+1 = e^{-\frac{1}{2}} \text{ أي } x = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$$

إشارة  $f(x)$  :

|        |                |                                                  |           |
|--------|----------------|--------------------------------------------------|-----------|
| $x$    | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |                | -                                                | +         |

(4) تبين المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثيها :

الدالة  $f'$  قابلة للإشتقاق على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال :

$$f''(x) = \frac{\frac{-8 \times 2}{2x+1} \times (2x+1)^3 - 3 \times 2(2x+1)^2 \times [-8 \ln(2x+1)]}{(2x+1)^6} = \frac{16(-1+3 \ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$$

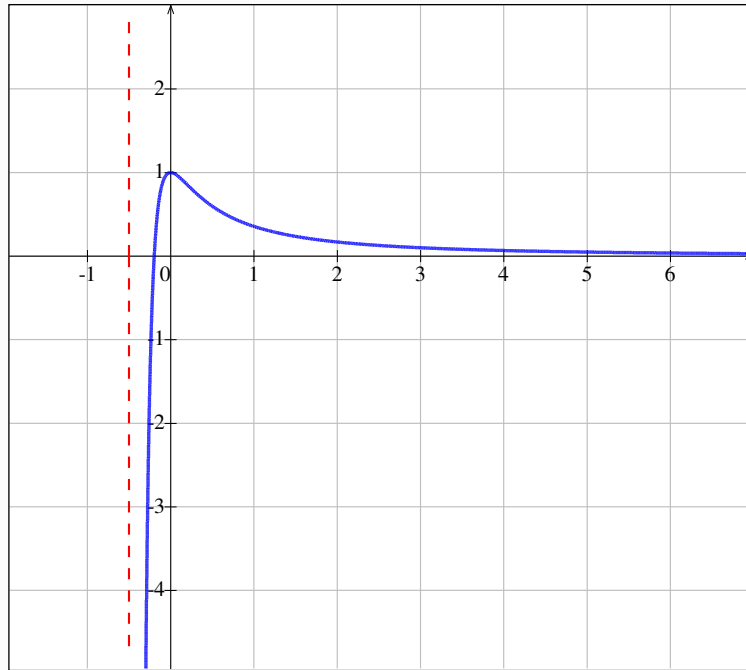
$$f''(x) = 0 \text{ تكافئ } -1+3 \ln(2x+1) = 0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1) = \frac{1}{3} \text{ تكافئ } 2x+1 = e^{\frac{1}{3}} \text{ أي } x = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

إشارة  $f''(x)$  :

| $x$      | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$ | $+\infty$ |
|----------|----------------|--------------------------------------------------|-----------|
| $f''(x)$ |                | - 0 +                                            |           |

إذن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف  $\omega$  إحداثيها :  $\left( \frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{2}; \frac{5}{3} e^{-\frac{2}{3}} \right)$ .

الرسم :



(II) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  كما يلي :  $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$ .

(1) أ-دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال :

$$g'(x) = 2 \left[ -1 + \frac{2}{2x+1} \right] = 2 \left[ \frac{-2x+1}{2x+1} \right]$$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-2x+1$  :

| $x$     | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|----------------|---------------|-----------|
| $g'(x)$ |                | + 0 -         |           |

الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  ومتناقصة على المجال  $[\frac{1}{2}; +\infty[$ .

بـ تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث  $1,2 < \alpha < 1,3$ .  
لدينا :  $g(0) = 0$ .

الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $[\frac{1}{2}; +\infty[$  و  $[\frac{1}{2}; +\infty[ \subset ]1,2;1,3[$  و  $\begin{cases} g(1,2) \approx 0,05 \\ g(1,3) \approx -0,04 \end{cases}$

أي  $g(1,2) \times g(1,3) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $[\frac{1}{2}; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,2 < \alpha < 1,3$ .

جـ- إشارة  $g(x)$  :

| $x$    | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|----------------|---|----------|-----------|
| $g(x)$ | -              | 0 | +        | -         |

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماما من 1 :  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ .

إثبات أن : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ .

لدينا : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $\frac{g(x)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{(2x+1)^2} - \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = f(x) - \frac{1}{2x+1}$ .

ولدينا : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $g(x) < 0$  وبالتالي  $f(x) < \frac{1}{2x+1}$ .

ومن جهة أخرى لدينا : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $f(x) > 0$ .

إذن : من أجل كل  $x \geq \frac{3}{2}$  ،  $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ .

استنتاج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

لدينا :  $0 < I_n < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$  ومنه  $0 < \int_n^{n+1} f(x) dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$ .

ولدينا  $0 < I_n < \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$  ومنه  $\int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1)\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ .

وبالتالي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0 = 1$  حيث  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$ .

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > -2$ .

بـ بين أن ( $u_n$ ) متتالية متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$  واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن ( $v_n$ ) حسابية أساسها  $\frac{1}{3}$  يطلب تعيين حدها الأول.

(3) عبر بدلالة  $n$  عن  $v_n$  و  $u_n$ ، وأحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين الثاني (4ن)

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرك بينها باللمس، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ: 1، 2، 2، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2، 2، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2، 3، 3.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين  $A$  : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني".

و  $B$  : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

(1) أـ أحسب:  $P(A)$  و  $P(B)$  احتمالي الحادثتين  $A$  و  $B$  على الترتيب.

بـ بين أن:  $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$  ثم استنتج  $P_A(B)$  و  $P(A \cup B)$ .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضياتي  $E(X)$ .

التمرين الثالث (5ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$A$ ،  $B$  و  $C$  ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب:  $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ،  $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $z_C = \overline{z_B}$ .

أكتب  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون:  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) أتحقق أن:  $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  و حدد طبيعة المثلث  $OBC$ .

بـ استنتج أن:  $B$  هي صورة  $C$  بدوران  $r$  يطلب تعيين عناصره المميزة.

(4) نسمي  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  التي تحقق :  $|z| = \left| \bar{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$  .

عين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$  ثم عين صورتها بالدوران  $r$  .

### التمرين الرابع (7ن)

I  $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$  كما يلي :

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0.38 < \alpha < -0.37$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

II نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

بـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta): y = 2x + 1$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون :  $f'(x) = g(x)$  ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(4) أنشئ  $(\Delta)$  ،  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  ( نأخذ  $f(\alpha) \approx 0,8$  ) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x : x = (1-m)e^x$  .

(6) أـ باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$  .

بـ أحسب العدد  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيميات التي معادلاتها :

$$y = 2x + 1 \quad \text{و} \quad x = 3 \quad , \quad x = 1$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4ن)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = 0$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$  .

(1) أحسب كلا من  $u_1, u_2, u_3$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(3)  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = 2n + 1$  .

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $e^{u_n} = v_n$  .

بـ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(4) أحسب المجموعين  $S_n$  و  $T$  حيث :  $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$  و  $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$  .

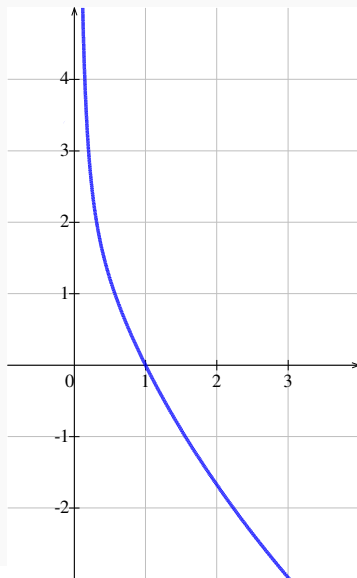
### التمرين الثاني (4ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقطة  $A(1; -2; 1)$  والمستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  اللذين معادلتيهما على الترتيب :  $-x + y + 2z + 1 = 0$  و  $-3x + y + z + 4 = 0$  .
- (1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $A$  و  $\vec{u}(1; 5; -2)$  شعاع توجيه له .
  - (2) بين أن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم  $(\Delta)$  .
  - (3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  الذي يشمل  $B(-1; 4; 0)$  و يعامد كلا من  $(P_1)$  و  $(P_2)$  ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  و  $(Q)$  .
  - (4) لتكن  $E(2; 3; -1)$  و  $H(0; 3; -2)$  نقطتان من الفضاء .  
أتحقق أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستوي  $(P_1)$  .  
بـ حدد طبيعة المثلث  $EBH$  ثم أحسب حجم رباعي الوجوه  $AEBH$  .

### التمرين الثالث (5ن)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$  (يرمز  $\bar{z}$  لمرافق العدد  $z$ )
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقتها على الترتيب :
- $$z_A = 2 + i , z_B = 4 + i , z_C = \bar{z}_A$$
- (1) تحقق أن :  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$  ثم عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$  تخيليا صرفا .
  - (2)  $D$  نقطة من المستوي لاحتقتها  $z_D$  بحيث : 
$$\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
- بين أن المثلث  $ABD$  متقايس الأضلاع وأحسب  $z_D$  .
- (3) أحسب  $z_G$  لاحقة النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABD$  ، ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ويحول  $G$  إلى  $D$  .
- (4) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  (  $M$  تختلف عن  $C$  ) بحيث :  $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$  .

### التمرين الرابع (7ن)



- (I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$  :  
 $(C_g)$  المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :  
 - أحسب  $g(1)$  ثم استنتج بيانيا إشارة  $g(x)$  .
- (II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$  :  
 $(C_f)$  و تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .
- (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
  - (2) أـ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$  .

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن  $y = \left( \frac{e^2}{e-1} \right)x - \frac{e}{e-1}$  هي معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم  
أرسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

(4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  بحيث تقبل المعادلة  $(e-1)f(x) = e^2x - me$  حلين متميزين .

(III) عدد طبيعي حيث  $n > 1$  ، مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين  
معادلتيهما  $x = n$  و  $x = 1$  .

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n > 1$  :  $I_n = \ln(1 + n \ln n)$  .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  .

## تصحيح مقترح للموضوع الأول

### حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بـ :  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$  .

(1) أـ البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > -2$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > -2$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 1$  ومنه  $u_0 > -2$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_n > -2$  ، و نبهرن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} > -2$  .

لدينا حسب الفرض  $u_n > -2$  ومنه  $u_n + 5 > -2 + 5$  ومنه  $\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$  ومنه  $-\frac{9}{u_n + 5} > -\frac{9}{3}$  .

أي  $1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$  أي :  $u_{n+1} > -2$  . وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > -2$  .

بـ تبين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n = \frac{u_n + 5 - 9 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n < 0$  ،

ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

ـ المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد  $-2$  ، إذن فهي متقاربة .

(2) المتتالية  $(v_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

ـ إثبات أن  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $\frac{1}{3}$  :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} = \frac{1}{\frac{3u_n + 6}{u_n + 5}} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2 + 3}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3} + v_n$$

ومن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $r = \frac{1}{3}$  وحدها الأول  $v_0$  حيث:  $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

(3) كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = v_0 + nr$  ومنه  $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(1+n)$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$ :  $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$  ومنه  $\frac{1}{v_n} = u_n + 2$  أي:  $u_n = \frac{1}{v_n} - 2$

ومنه:  $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)} - 2 = \frac{3}{1+n} - 2$

حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

لأن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{1+n} \right) = 0$  .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{1+n} - 2 \right) = -2$

(4) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

لدينا:  $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$  ومنه:  $u_n v_n + 2v_n = 1$  أي:  $u_n v_n = 1 - 2v_n$

لدينا:

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = (1 - 2v_0) + (1 - 2v_1) + \dots + (1 - 2v_n)$$

$$= 1 \times (n+1) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$= n+1 - 2 \left[ \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) \right]$$

$$= n+1 - \left[ (n+1) \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right) \right]$$

ومنه:  $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = (n+1) \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right) \right] = (n+1) \left( \frac{1-n}{3} \right) = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

### حل مقترح التمرين الثاني

عدد السحبات الممكنة هو:  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$

(1) أ- حساب الإحتمالات:

A: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض والأحمر والأخضر.

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

B: "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{120} = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

ب- تبين أن:  $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

A ∩ B: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم ومن ألوان مختلفة".

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي  $P_A(B)$ :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{6}$$

حساب  $P(A \cup B)$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{36}{120} + \frac{14}{120} - \frac{6}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

لدينا :  $X \in \{0; 1; 2; 3\}$  .

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{126} = \frac{50}{120}, \quad P(X=0) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{126} = \frac{10}{120}, \quad P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{126} = \frac{50}{120}$$

قانون الإحتمال:

|              |                |                |                |                |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $X_i$        | 0              | 1              | 2              | 3              |
| $P(X = X_i)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

ب- حساب الأمل الرياضي  $E(X)$ :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$  .

لدينا :  $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 = i^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(2) كتابة  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي :

لدينا :  $z_A = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$  ومنه :  $|z_A| = 1$  .

وبفرض  $\theta_A$  عمدة للعدد المركب  $z_A$  ، يكون :  $\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$  ومنه  $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ، حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

إذن :  $z_A = e^{i \frac{\pi}{3}}$  .

لدينا :  $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ومنه :  $|z_B| = 1$  .

وبفرض  $\theta_B$  عمدة للعدد المركب  $z_B$ ، يكون: 
$$\begin{cases} \cos \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 ومنه  $\arg(z_B) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .  
إذن:  $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

• تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

لدينا:  $\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$  ومنه

يكافئ  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  يكافئ  $e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  يكافئ  $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  مع  $n = 12k + 2$ ، مع  $k \in \mathbb{N}$ .

(3) أ. التحقق:  $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا:  $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  معناه:  $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$  ومنه المثلث  $OBC$  متقايس الأضلاع.

بـ. إستنتاج أن  $B$  هي صورة  $C$  بدوران  $r$  مع تعيين عناصره المميزة.

لدينا:  $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$  ومنه  $B$  هي صورة  $C$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $O$

وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

(4) تعيين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$ :

$|z| = \left| z - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$  تكافئ  $|z| = |z - z_B|$  تكافئ  $|z| = |\overline{z} - z_B|$  تكافئ  $|z| = |z - z_C|$

ومعناها:  $OM = CM$  وبالتالي  $(\gamma)$  هي محور القطعة  $[OC]$ .

• تعيين صورة  $(\gamma)$  بالدوران  $r$ :

بما أن:  $r(O) = O$  و  $r(C) = B$  فإن صورة  $(\gamma)$  بالدوران  $r$  هي محور القطعة  $[OB]$ .

#### حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

(1) حساب النهايات:

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + xe^{-x} - e^{-x}) = 2$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $e^{-x} > 0$  وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $2-x$ .

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | + | -         |

الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[2; +\infty[$  ومتزايدة على المجال  $]-\infty; 2]$ .

| $x$     | $-\infty$ | $2$          | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $g'(x)$ |           | $+$          | $-$       |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $2 + e^{-2}$ | $2$       |

جدول تغيرات الدالة  $g$ :

(3) أ- تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0.38 < \alpha < -0.37$ .

الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 2[$  و  $]-\infty; 2[ \subset ]-0.38; -0.37[$  و  $g(-0.38) \approx -0.017$   
 $g(-0.37) \approx 0.016$

أي  $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0.38 < \alpha < -0.37$ .

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ |           | $-$      | $+$       |

ب- إشارة  $g(x)$ :

(II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$   
 1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( 2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{ب- } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  بحيث:  $y = 2x + 1$ :  $(\Delta)$ .

لدينا:  $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $-x$ .

| $x$          | $-\infty$                                                                                    | $0$ | $+\infty$ |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $f(x) - y$   |                                                                                              | $+$ | $-$       |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ / $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;1)$ / $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |     |           |

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون:  $f'(x) = g(x)$ ،

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x - 1)e^{-x} = g(x)$$

- اتجاه تغير الدالة  $f$ :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ ، ومنه نستنتج أن: الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; \alpha]$  ومتزايدة على المجال  $[\alpha; +\infty[$

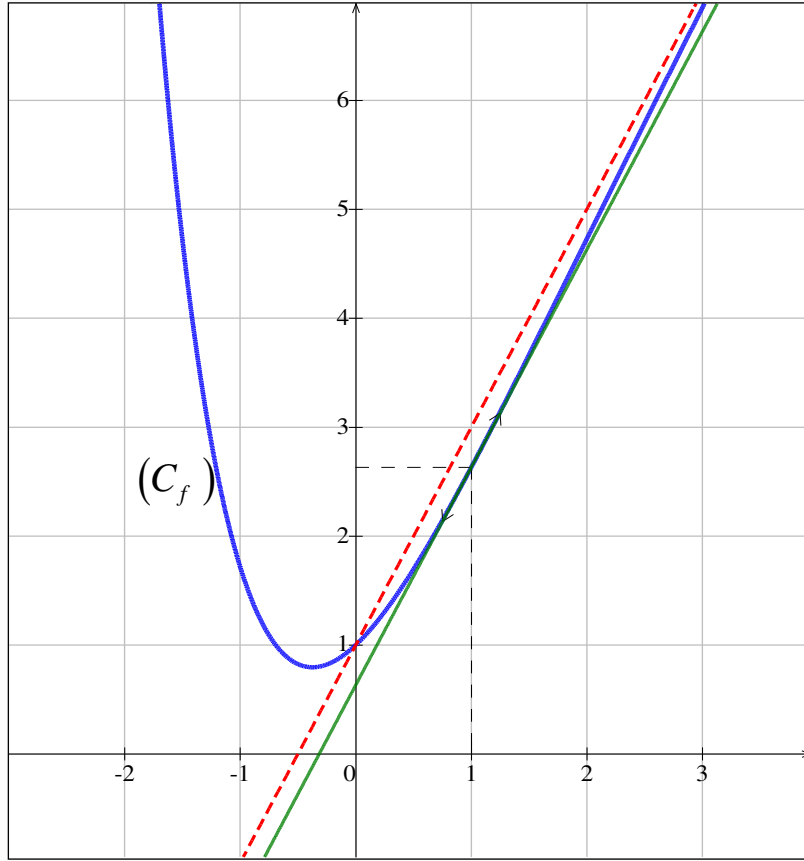
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$         | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C<sub>f</sub>) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا :  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  و منه  $y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$  هي معادلة لـ (T).

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

$x = (1-m)e^x$  تكافئ  $xe^{-x} = (1-m)$  تكافئ  $-xe^{-x} = m-1$  تكافئ  $2x + 1 - xe^{-x} = 2x + 1 + m - 1$

أي  $2x + 1 - xe^{-x} = 2x + m$  أي  $f(x) = 2x + m$  ← مناقشة مائلة.

إذا كان  $m \in ]-\infty; 1 - \frac{1}{e}]$  فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان  $m = 1 - \frac{1}{e}$  المعادلة تقبل حل مضاعف.

إذا كان  $m \in ]1 - \frac{1}{e}; 1]$  فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان  $m = 1$  فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم.

إذا كان  $m \in ]1; +\infty[$  فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما.

(6) أ. تعيين دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$ .

الدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  وبالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x te^{-t} dt \text{ كما يلي :}$$

نضع  $u(t) = t$  ،  $v'(t) = e^{-t}$  ومنه  $u'(t) = 1$  ،  $v(t) = -e^{-t}$  ، وبتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = \left[ -te^{-t} \right]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومن الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$  هي:  $F(x) = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$ .

$$\text{ب- حساب العدد } A \text{ مساحة الحيز : } A = \int_1^3 ((2x+1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} \text{ (u.a.)}$$

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ .

(1) حساب الحدود  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$ :

$$u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5 \quad , \quad u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3$$

$$u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \ln 7$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $2n+3 > 2n+1$  ومنه  $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$  (كذلك لاحظ أن:  $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$ ).

• اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ :

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right).$$

ونعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$  ومنه  $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$  أي  $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$ .

إذن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً.

(3) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = 2n+1$

أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $e^{u_n} = v_n$ .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $e^{u_n} = v_n$ ".

• نتحقق من صحة  $P(0)$ .

من أجل  $n=0$ ، لدينا  $u_0 = 0$  ومنه  $v_0 = e^{u_0} = 1$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة.

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي:  $e^{u_n} = v_n$ ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$ .

$$\text{لدينا } e^{u_{n+1}} = v_{n+1} \text{ ومنه } e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = (2n+1) \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$$

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $e^{u_n} = v_n$ .

ب- كتابة عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $e^{u_n} = v_n$  ومنه  $u_n = \ln(v_n) = \ln(2n+1)$ .

$$\text{حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$$

(4) حساب المجموعين:

$$\text{لدينا: } S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 - \ln v_1 + \dots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$$

ومنه:  $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n = u_n$ .

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \dots + v_{2018} = \frac{2018 - 1439 + 1}{2} (2(1439 + 2018) + 2) = 2005640$$

(1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$ :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{من الشكل: } (\Delta) \text{ يـشـمـل } A \text{ و } \vec{u}(1;5;-2) \text{ شعاع توجيه له ومنه فتمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل:}$$

(2) تبين أن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان:

$$\text{لدينا: } (P_1): -x + y + 2z + 1 = 0 \text{ و } (P_2): -3x + y + z + 4 = 0.$$

$$\text{ومنـه: } \vec{n}_1(-1;1;2) \text{ شعاع ناظمي لـ } (P_1) \text{ و } \vec{n}_2(-3;1;1) \text{ شعاع ناظمي لـ } (P_2).$$

$$\vec{n}_2 \text{ و } \vec{n}_1 \text{ ليسا مرتبطين خطيا لأن } y_{\vec{n}_1} = y_{\vec{n}_2} \text{ لكن } x_{\vec{n}_1} \neq x_{\vec{n}_2}, \text{ وبالتالي المستويان } (P_1) \text{ و } (P_2) \text{ متقاطعان وفق مستقيم.}$$

• التحقق أن تقاطع  $(P_1)$  و  $(P_2)$  هو المستقيم  $(\Delta)$ :

$$\text{يكفي إثبات أن } (\Delta) \subset (P_1) \text{ و } (\Delta) \subset (P_2).$$

$$\text{بتعويض التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta) \text{ في معادلة } (P_1) \text{ نجد: } -(t+1) + 5t - 2 + 2(-2t+1) + 1 = 0 \text{ (محقة)}$$

$$\text{ومنـه } (\Delta) \subset (P_1).$$

$$\text{بتعويض التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta) \text{ في معادلة } (P_2) \text{ نجد: } -3(t+1) + 5t - 2 + (-2t+1) + 4 = 0 \text{ (محقة)}$$

$$\text{ومنـه } (\Delta) \subset (P_2).$$

(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  الذي يشمل  $B(-1;4;0)$  و يعامد كلا من  $(P_1)$  و  $(P_2)$ :

$$(Q) \perp (P_1) \text{ و } (Q) \perp (P_2) \text{ معناه: } (Q) \perp (\Delta) \text{ ومنـه } \vec{u}(1;5;-2) \text{ شعاع ناظمي لـ } (Q).$$

$$\text{وبالتالي معادلة لـ من الشكل: } x + 5y - 2z + d = 0.$$

$$B \in (Q) \text{ يعني أن: } (-1) + 5 \times 4 - 2 \times 0 + d = 0 \text{ أي } d = -19 \text{ ومنـه ينتج: } (Q): x + 5y - 2z - 19 = 0.$$

• تقاطع المستويات الثلاثة  $(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(Q)$ .

$$\text{لدينا: } (P_1) \cap (P_2) = (\Delta) \text{ ومنـه يكفي دراسة تقاطع } (\Delta) \text{ و } (Q).$$

$$\text{نحل الجملة: } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -2t + 1 \\ x + 5y - 2z - 19 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{إذن } E(2;3;-1) \text{ هي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة } (P_1)، (P_2) \text{ و } (Q).$$

(4) لتكن  $E(2;3;-1)$  و  $H(0;3;-2)$  نقطتان من الفضاء.

أ- التحقق أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستوي  $(P_1)$ .

$$\text{يكفي إثبات أن } H \in (P_1) \text{ وأن } \vec{BH} \text{ و } \vec{n}_1 \text{ مرتبطين خطيا.}$$

$$\text{لدينا: } H \in (P_1) \text{ لأن: } 0 + 3 - 4 + 1 = 0. \text{ ولدينا: } \vec{BH}(1;-1;-2) \text{ ومنـه } \vec{BH} = -\vec{n}_1$$

$$\text{إذن: } H \in (P_1) \text{ و } \vec{BH} \text{ و } \vec{n}_1 \text{ مرتبطان خطيا وبالتالي } H \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } B \text{ على المستوي } (P_1).$$

ب- طبيعة المثلث  $EBH$ :

$$\text{لدينا: } H \in (P_1) \text{ و } E \in (P_1) \text{ و } B \notin (P_1) \text{ و } H \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } B \text{ على المستوي } (P_1) \text{ وبالتالي}$$

المثلث  $EBH$  قائم في  $H$ .

• حساب  $V$  حجم رباعي الوجوه  $AEBH$ .

$$V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h \text{ حيث: } h = d(A; (Q)). \text{ (يمكن التحقق أن } (Q) \text{ هو نفسه } (EBH)).$$

$$h = d(A; Q) = \frac{|1 + 5(-2) - 2 - 19|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2}} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30} \quad \text{و} \quad S_{EBH} = \frac{1}{2} EH \times HB = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$.V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \sqrt{30} = 5.uv \quad \text{ومنه:}$$

### حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$

$(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$  تكافئ  $\bar{z} - 4 + i = 0$  أو  $z^2 - 4z + 5 = 0$ .

$\bar{z} - 4 + i = 0$  معناه:  $\bar{z} = 4 - i$ ، أي:  $z = 4 + i$ .

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 4z + 5 = 0$ :

لدينا:  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$  ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$  و  $z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$  هي:  $S = \{4 + i; 2 + i; 2 - i\}$ .

(II) 1) التحقق أن:  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ .

لدينا:  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + i - (2 + i)}{2 - i - (2 + i)} = \frac{2}{-2i} = \frac{1}{-i} = i$  وهو المطلوب.

• تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$  تخيليا صرفا.

لدينا:  $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n = i^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$

$\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  أي:  $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  أي:  $n = 2k + 1$  مع  $k \in \mathbb{N}$

(2) تبيان أن المثلث  $ABD$  متقايس الأضلاع:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right\} \text{تكافئ} \left\{ \begin{array}{l} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

تكافئ  $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه المثلث  $ABD$  متقايس الأضلاع.

• حساب  $z_D$ .

لدينا:  $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$  أي:  $z_D = 3 + (1 + \sqrt{3})i$ .

(3) حساب  $z_G$ :

$G$  مركز ثقل المثلث  $ABD$  معناه  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1); (B, 1); (D, 1)\}$  ومنه  $z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}$

ومنه:  $z_G = 3 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$ .

•  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ويحول  $G$  إلى  $D$ ، يعني:  $z_D - z_A = a(z_G - z_A)$  أي:  $a = \frac{z_D - z_A}{z_G - z_A}$

ومنه:  $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ومنه نسبة التشابه هي:  $|a| = \sqrt{3}$ ، وزاوية التشابه هي:  $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$

(4) تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقاط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  ( $M$  تختلف عن  $C$ ) بحيث:  $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

لدينا:  $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$  يعني:  $(\overline{MC}; \overline{MG}) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

ومنه المجموعة  $(\Gamma)$  هي قطعة المستقيم المفتوحة  $]CG[$ .

### حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$

• حساب  $g(1)$ :  $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$

• إشارة  $g(x)$ :

|        |   |   |           |
|--------|---|---|-----------|
| $x$    | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g(x)$ |   | + | 0 -       |

(II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ :

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 : \text{تذكر أن} \right) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \ln x) = 1 \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

• تبين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ :

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{تذكر أن} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x} \right) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

(2) أ- تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (\ln x + 1)(1 + x \ln x)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1 + \ln x)^2}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2}$$

ومنه: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$

ب- اتجاه تغير الدالة  $f$ : إشارة من إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ .

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | + | 0 -       |

الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0;1[$  ومتناقصة على المجال  $[1;+\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | 0 | 1         | $+\infty$ |
|---------|---|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |   | +         | 0 -       |
| $f(x)$  |   | $-\infty$ | 1 0       |

(3) تبين أن  $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$  هي معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل:

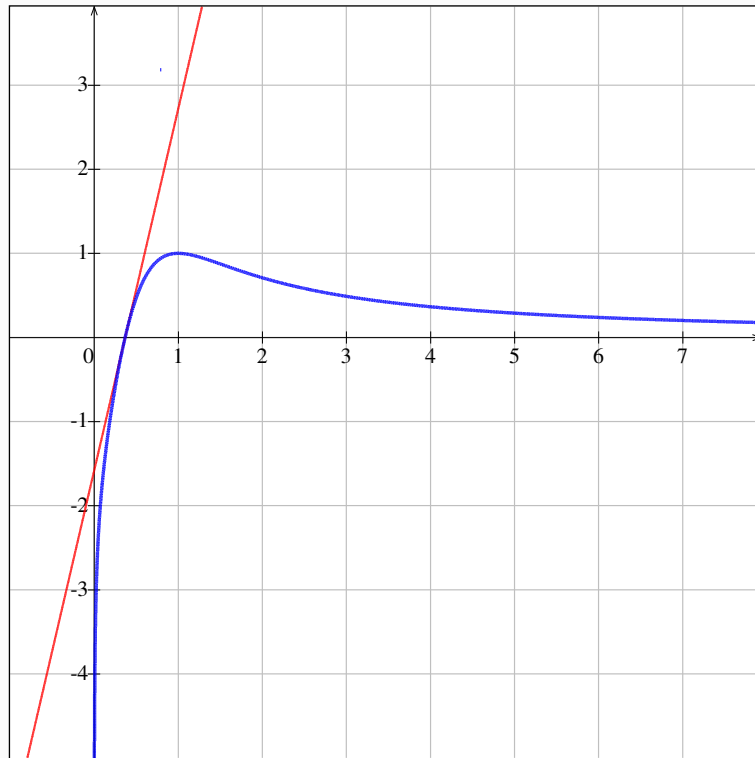
لتعيين نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل، نحل في المجال  $]0;+\infty[$  المعادلة:  $f(x) = 0$ .

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} = 0 \text{ تكافئ } 1+\ln x = 0 \text{ تكافئ } \ln x = -1 \text{ أي: } x = \frac{1}{e}.$$

معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{1}{e}$ :

$$\text{لدينا: } (T): y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right) \text{ ومنه } (T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}.$$

الرسم:



(4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  بحيث تقبل المعادلة  $(e-1)f(x) = e^2x - me$  حلين متمايزين.

$$(e-1)f(x) = e^2x - me \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

حلول المعادلة  $(e-1)f(x) = e^2x - me$  هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(T_m)$  ذي

$$\text{المعادلة } y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m.$$

من البيان: المعادلة تقبل حلين متمايزين لما  $-\frac{e}{e-1}m < -\frac{e}{e-1}$  أي  $m > 1$ .

(III)  $n$  عدد طبيعي حيث  $n > 1$  ،  $I_n$  مساحة الحيز من المستوى المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 1$  و  $x = n$  .

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n > 1$  :  $I_n = \ln(1 + n \ln n)$  .

$$. I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left( \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) dx = \left[ \ln(1 + x \ln x) \right]_1^n = \ln(1 + n \ln n) \text{ لدينا :}$$

( لاحظ أن  $f$  من الشكل :  $\frac{u'}{u}$  )

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  :

ندرس إشارة الفرق :  $I_{n+1} - I_n$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

ولدينا :  $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$  :  $n > 1$  ومن أجل 1 وبالتالي المتتالية  $(I_n)$  متزايدة تماما .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 13$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$  .

(1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .  
ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة .

(2) ( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \ln(u_n - 1)$  .  
- أثبت أن المتتالية ( $v_n$ ) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(3) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$  وأحسب عندئذ  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(4) بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$  .

التمرين الثاني (4ن)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . ( كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس )

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين  $A$  و  $B$  حيث :

$A$  : " سحب كرتيتين من نفس اللون " ،  $B$  : " سحب كرتيتين تحملان نفس الرقم "

(1) بين أن احتمال الحادثة  $A$  هو  $P(A) = \frac{31}{66}$  واحسب احتمال الحادثة  $B$  .

(2) علما أن الكرتيتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

(3) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .  
عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي وأحسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث (5ن)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$  .

(II) نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها :  
 $i$  ،  $2 - i$  و  $2 + i$  على الترتيب .

(1) أكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$  على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(2) من أجل كل عدد مركب  $z$  يختلف عن  $2 + i$  نضع :  $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$  .

أ- عين المجموعة ( $E$ ) للنقط  $M$  من المستوى ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق  $|f(z)| = \frac{1}{2}$  .

ب- بين أن العدد  $[f(i)]^{1440}$  حقيقي موجب .

(3) نعتبر الدوران  $r$  الذي مركزه النقطة  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

أ- عين لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $r$  وبين أن النقط  $A$  ،  $D$  و  $C$  في إستقامة .

ب- استنتج أن النقطة  $D$  هي صورة النقطة  $A$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

### التمرين الرابع (7ن)

1. الدالة العددية المعرفة على  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$  .  
 (تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ )  
 (1) أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  ثم فسر النتائج بيانياً .  
 بـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .  
 (2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .  
 (3) نسمي  $(\Gamma)$  المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية "  $\ln$  " في المعلم السابق .  
 أـ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$  ثم فسر النتيجة بيانياً .  
 بـ أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(\Gamma)$  .  
 (4) أرسم بعناية المنحنى  $(\Gamma)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  .  
 (5)  $H$  الدالة المعرفة على المجال  $]3; +\infty[$  بـ :  $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$  حيث  $t$  متغير حقيقي موجب تماماً .  
 أـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين عبارة  $H(x)$  بدلالة  $x$  .  
 بـ أحسب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و حامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين :  
 $x = 3$  و  $x = 4$  .  
 (6)  $g$  الدالة المعرفة على  $] -1; 0[ \cup ] -1; -\infty[$  بـ :  $g(x) = f(-2x)$  .  
 دون حساب عبارة  $g(x)$  حدد اتجاه تغير الدالة  $g$  على مجموعة تعريفها .

### الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4ن)

- يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .  
 ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .  
 (1) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ، ثم أحسب أمله الرياضياتي  $E(X)$  .  
 (2) بين أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو  $\frac{7}{24}$  .  
 (3) نسحب الآن من الصندوق كريتتين على التوالي دون إرجاع .  
 ما إحتمال الحصول على كريتتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداؤهما زوجي ؟

### التمرين الثاني (4ن)

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]4; 7[$  بـ :  $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$  .  
 (1) أـ بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $]4; 7[$  .  
 بـ استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]4; 7[$  فإن  $f(x) \in ]4; 7[$  .  
 (2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]4; 7[$  فإن  $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$  .  
 ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]4; 7[$  فإن  $f(x) - x > 0$  .

(3)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 \leq u_n < 7$  .  
ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم بين أنها متقاربة .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$  .

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$  ، ثم أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

### التمرين الثالث (5)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_C$  على الترتيب حيث :  $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$  ،  $z_B = \overline{z_A}$  و  $z_C = -2z_A$  .  
(1) أ- أكتب العدد المركب  $z_A$  على الشكل الأسّي .

ب- أحسب العدد  $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$  .

(2) أ- الإنسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $C$  ، عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالإنسحاب  $T$  .  
ب- استنتج طبيعة الرباعي  $ABDC$  .

(3) أكتب العدد المركب  $z_C - z_A$  على الشكل الأسّي .

(4) جد قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها العدد المركب  $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$  عددا حقيقيا .

(5) لتكن  $M$  نقطة كيفية من المستوي لاحقتها  $z$  حيث تختلف عن  $A$  وتختلف عن  $C$  .

عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  التي يكون من أجلها  $\frac{z_A - z}{z_C - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما .

### التمرين الرابع (7)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . تؤخذ وحدة الطول  $2cm$  .

$(C_f)$  و  $(C_g)$  التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$  و  $g(x) = e^x - ex$

(1) أ- أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

ب- استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  .

(3) أحسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  على  $\mathbb{R}$  .

(5) أرسم على المجال  $[0; 2]$  المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في نفس المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . (يعطى  $e^2 - 2e \approx 2$ )

(6) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  .

(7) الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي :  $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$  وليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- بين أن الدالة  $h$  زوجية .

ب- من أجل  $x \in [0; 2]$  أحسب  $h(x) + f(x)$  ثم استنتج كيفية رسم  $(\Gamma)$  إنطلاقا من  $(C_f)$  ثم أرسمه .

حل مقترح التمرين الأول

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 13$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$  .

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$  "

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 13$  ومنه  $u_0 > 1$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $u_n > 1$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} > 1$  .

لدينا حسب الفرض  $u_n > 1$  ومنه  $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5} \times 1$  ومنه  $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$  أي  $u_{n+1} > 1$  . وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1 - u_n)$  ،

ولدينا :  $u_n > 1$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، ومنه  $1 - u_n < 0$  أي  $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

- إستنتاج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة .

(2) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \ln(u_n - 1)$  .

- إثبات أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n$$

ومن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$  وحدها الأول :  $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 12$

(3) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = \ln 12 + \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right) \text{ أي } v_n = \ln 12 + n \ln\left(\frac{1}{5}\right) \text{ ومنه } v_n = v_0 + nr \text{ ، } n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

• تبين أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = \ln(u_n - 1)$  ومنه  $e^{v_n} = u_n - 1$  ومنه  $u_n = 1 + e^{v_n}$

$$\text{أي } u_n = 1 + e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = 1 + \frac{12}{5^n}$$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{5^n}\right) = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1$$

$$(4) \text{ تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n, (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left( \frac{12}{5^{\frac{n}{2}}} \right)^{n+1}$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $e^{v_n} = u_n - 1$ ، ومنه

$$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \left( \frac{n+1}{2} \right) (v_0 + v_n) = \left( \frac{n+1}{2} \right) \left( \ln 12 + \ln \frac{12}{5^n} \right) = \left( \frac{n+1}{2} \right) \ln \left( \frac{12^2}{5^n} \right) = (n+1) \ln \left( \frac{12^2}{5^n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = e^{S_n} = e^{\ln \left( \frac{12}{5^{\frac{n}{2}}} \right)^{n+1}} = \left( \frac{12}{5^{\frac{n}{2}}} \right)^{n+1} \text{ إذن : } S_n = \ln \left( \frac{12}{5^{\frac{n}{2}}} \right)^{n+1} \text{ أي :}$$

### حل مقترح التمرين الثاني

$$\cdot C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66 \text{ : عدد السحبات الممكنة}$$

$$(1) \text{ تبيان أن احتمال الحادثة } A \text{ هو } \frac{31}{66} : P(A) = \frac{31}{66}$$

$A$  : "سحب كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_7^2}{66} = \frac{10 + 21}{66} = \frac{31}{66}$$

• حساب احتمال الحادثة  $B$  :

$B$  : "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

$$P(B) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{66} = \frac{28 + 6}{66} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}$$

(2) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

$$\text{لدينا : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_4^2}{66} = \frac{15}{66} \text{ ومنه } P_A(B) = \frac{15}{31}$$

(3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

لدينا :  $X \in \{3; 4; 5\}$

$$P(X = 5) = \frac{C_7^2}{66} = \frac{21}{66}, \quad P(X = 4) = \frac{C_5^1 \times C_7^1}{66} = \frac{35}{66}, \quad P(X = 3) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66}$$

قانون الاحتمال:

| $X_i$        | 3               | 4               | 5               |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = X_i)$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{35}{66}$ | $\frac{21}{66}$ |

بـ حساب الأمل الرياضي  $E(X)$  :

$$E(X) = 3 \times \frac{10}{66} + 4 \times \frac{35}{66} + 5 \times \frac{21}{66} = \frac{275}{66}$$

(I) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$

$$(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0 \text{ تكافئ } z = i \text{ أو } z^2 - 4z + 5 = 0$$

لنحل  $\mathbb{C}$  في المعادلة  $z^2 - 4z + 5 = 0$ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = 4i^2 = (2i)^2 \text{ لدينا: } \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \text{ و } z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$  هي:  $S = \{2 - i; 2 + i; i\}$

(II) لدينا:  $z_A = i$  ،  $z_B = 2 - i$  و  $z_C = 2 + i$

(1) كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$  على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ و منه } \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{2 + i - i}{2 + i - (2 - i)} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$$

• استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = BC \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \right| = 1 \\ \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{array} \right.$$

ومنه المثلث  $ABC$  قائم في  $C$  ومتساوي الساقين.

$$(2) \text{ من أجل كل عدد مركب } z \text{ يختلف عن } 2 + i \text{ نضع: } f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$$

أ- تعيين المجموعة  $(E)$  للنقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق  $|f(z)| = \frac{1}{2}$ :

$$|z - z_B| = |z - z_C| \text{ يكافئ } \left| \frac{z - (2 - i)}{z - (2 + i)} \right| = 1 \text{ يكافئ } \frac{1}{2} \left| \frac{i(z + i - 2)}{z - 2 - i} \right| = \frac{1}{2} \text{ يكافئ } \left| \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i} \right| = \frac{1}{2}$$

ومنه المجموعة  $(E)$  هي محور القطعة  $[BC]$ .

ب- تبيان أن العدد  $[f(i)]^{1440}$  حقيقي موجب:

$$f(i) = \frac{i^2 - 1 - 2i}{2i - 4 - 2i} = \frac{-2 - 2i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ لدينا: } f(i) = \frac{i^2 - 1 - 2i}{2i - 4 - 2i} = \frac{-2 - 2i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$[f(i)]^{1440} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{1440} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} e^{i360\pi} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} e^{i(0+180 \times 2\pi)} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} \text{ ومنه}$$

(3) الدوران الذي مركزه النقطة  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ- تعيين لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $r$ :

$$z' - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C) : r \text{ الكتابة المختصرة للدوران}$$

$$z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C) \text{ ومنه } z_D - z_C = i(z_B - z_C) + z_C \text{ أي } z_D = i(-2i) + 2 + i = 4 + i$$

• تبيان أن النقط  $A$  ،  $D$  و  $C$  في إستقامة:

$$\text{لدينا: } \frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(4 + i) - (2 + i)}{i - (2 + i)} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \text{ ومنه النقط } A \text{ ، } D \text{ و } C \text{ في إستقامة.}$$

ب- استنتاج أن النقطة  $D$  هي صورة النقطة  $A$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة :

لدينا :  $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$  ومنه  $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$  هي صورة  $A$  بتحاك مركزه  $C$

ونسبته  $-1$  .

(أو بدوران مركزه  $C$  وزاويته  $\pi$  أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ  $C$  أو بتشابه مباشر مركزه  $C$  ونسبته  $1$  وزاويته  $\pi$ )

#### حل مقترح التمرين الرابع

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (حامل محور الترتيب) مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $x = 2$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{بـ}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x^2 - 5x + 4$  لكون  $x(x-2)^2 > 0$  من أجل كل  $x$  من  $]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .

• إشارة  $f'(x)$  :

|         |   |   |   |   |           |
|---------|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | 2 | 4 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | + | 0 | - | -         |
|         |   |   |   | 0 | +         |

ومنه : الدالة  $f$  متزايدة على المجالين  $]4; +\infty[$  و  $]0; 1[$  ومتناقصة على المجالين  $]1; 2[$  و  $]2; 4[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

|         |   |   |   |   |           |
|---------|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | 2 | 4 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | + | 0 | - | -         |
|         |   |   |   | 0 | +         |
| $f(x)$  |   |   |   |   |           |

$\begin{array}{ccc} & \nearrow -1 & \searrow \\ -\infty & & -\infty \end{array}$ 
 $\begin{array}{ccc} +\infty & & +\infty \\ \searrow & & \nearrow \\ & \frac{1}{2} + \ln 4 & \end{array}$

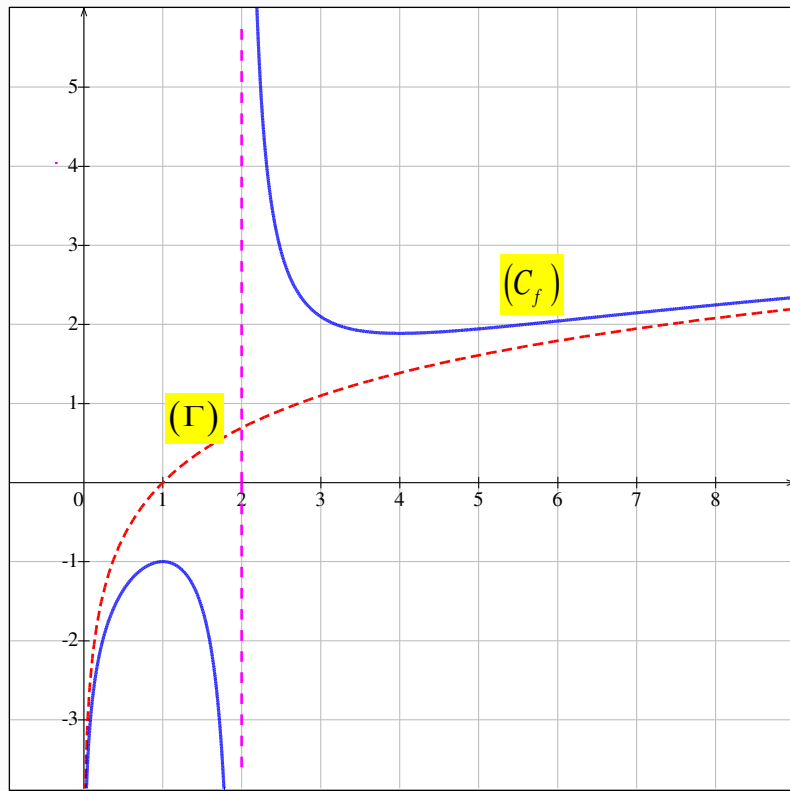
$$(3) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-2} \right) = 0$$

التفسير : المنحنى  $(\Gamma)$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ب- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(\Gamma)$  :

لدينا :  $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$  ومنه إشارة الفرق  $f(x) - \ln x$  من إشارة  $x-2$ .

على المجال  $]0; 2[$  :  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Gamma)$  وعلى المجال  $]2; +\infty[$  :  $(C_f)$  يقع فوق  $(\Gamma)$ .



(5) الدالة المعرفة على المجال  $]3; +\infty[$  بـ :  $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$  حيث  $t$  متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة  $H(x)$  بدلالة  $x$  .

$$\text{نضع } u(t) = \ln(t) , v'(t) = 1 \text{ و منه } u'(t) = \frac{1}{t} , v(t) = t$$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x) = [t \ln t]_3^x - \int_3^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 3 \ln 3 - \int_3^x dt = x \ln x - 3 \ln 3 - [t]_3^x$$

$$\text{ومنه } H(x) = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3 \text{ أي : } H(x) = x \ln x - 3 \ln 3 - (x - 3)$$

ب- حساب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين :  $x = 3$  و  $x = 4$  .

$$A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} + \ln x \right) dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} \right) dx + \int_3^4 \ln x dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x-2} \right) dx + H(4) = [\ln|x-2|]_3^4 + H(4)$$

$$\text{ومنه } A = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)(u.a) \text{ أي : } A = \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3$$

(6) الدالة المعرفة على  $] -1; 0[ \cup ] -1; -\infty[$  بـ :  $g(x) = f(-2x)$  .

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $] -1; 0[ \cup ] -1; -\infty[$  لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و  $g'(x) = -2f'(-2x)$  .

إتجاه تغيير الدالة  $g$  :

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ } f'(-2x) < 0 \text{ تكافئ : } \begin{cases} 1 < -2x < 2 \\ 2 < -2x < 4 \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -2 < x < -1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه الدالة } g \text{ متزايدة على } ] -1; -\frac{1}{2}[ \cup ] -2; -1[ \text{ و متناقصة على } ] -\frac{1}{2}; 0[ \cup ] -\infty; -2[ .$$

حل مقترح التمرين الأول

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

(1) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

لدينا :  $X \in \{0; 1; 2; 4; 8\}$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}, \quad P(X=0) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{64}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{120} = \frac{15}{120}$$

$$P(X=8) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}, \quad P(X=4) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{120} = \frac{30}{120}$$

قانون الاحتمال:

| $X_i$        | 0                | 1               | 2                | 4                | 8                |
|--------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| $P(X = X_i)$ | $\frac{64}{120}$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{15}{120}$ | $\frac{30}{120}$ | $\frac{10}{120}$ |

- حساب الأمل الرياضياتي  $E(X)$ :

$$E(X) = 0 \times \frac{64}{120} + 1 \times \frac{1}{120} + 2 \times \frac{15}{120} + 4 \times \frac{30}{120} + 8 \times \frac{10}{120} = \frac{231}{120}$$

(2) تبين أن احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو  $\frac{7}{24}$ .

A : "سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا"

$$P(A) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

(3) عدد السحبات الممكنة  $A_{10}^2 = 90$

B : "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي"

C : "سحب كريتين تحملان رقمين جداؤهما زوجي"

$$P(B \cap C) = \frac{A_7^2}{90} = \frac{42}{90}, \quad P(C) = \frac{2A_3^1 \times A_7^1 + A_7^2}{90} = \frac{84}{90}, \quad P(B) = \frac{2A_2^1 \times A_3^1 + 2A_3^1 \times A_5^1}{90} = \frac{42}{90}$$

احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي :

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{42}{90}}{\frac{84}{90}} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$f(x) = \sqrt{x+2} + 4 : \text{بـ} [4; 7]$$

(1) أتبين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[4; 7]$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \text{ و } [4; 7]$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[4; 7]$  ،  $f'(x) > 0$  ، ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[4; 7]$ .

بـ. استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[4; 7[$  فإن  $f(x) \in [4; 7[$ .

لدينا : الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[4; 7[$  ومنه من أجل كل  $x \in [4; 7[$  ،  $f(x) \in [f(4); f(7)[$  ،

أي :  $f(x) \in [4 + \sqrt{6}; 7[$  ولدينا  $[4 + \sqrt{6}; 7[ \subset [4; 7[$  ومنه : من أجل كل  $x \in [4; 7[$  ،  $f(x) \in [4; 7[$  ،

(2) لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[4; 7[$  :

$$f(x) - x = \sqrt{x+2} + 4 - x = \frac{[\sqrt{x+2} + (4-x)][\sqrt{x+2} - (4-x)]}{\sqrt{x+2} - (4-x)} = \frac{x+2 - (4-x)^2}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

الاستنتاج :

$$f(x) - x = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{(7-x)(x-2)}{x-4+\sqrt{x+2}} \quad : \text{لدينا : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [4; 7[$$

ومن أجل كل  $x \in [4; 7[$  ،  $x-4+\sqrt{x+2} > 0$  و  $(7-x)(x-2) > 0$  ومنه  $f(x) - x > 0$ .

(3)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = 4$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$  ،

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 \leq u_n < 7$  .

نسمي  $P(n)$  الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $4 \leq u_n < 7$ " .

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 4$  ومنه  $4 \leq u_0 < 7$  وبالتالي  $P(0)$  صحيحة .

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $4 \leq u_n < 7$  ، ونبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $4 \leq u_{n+1} < 7$  .

لدينا حسب الفرض  $4 \leq u_n < 7$  ومنه  $4 \leq f(u_n) < 7$  (حسب نتيجة السؤال 1 ب) أي  $4 \leq u_{n+1} < 7$  .

وبالتالي  $P(n+1)$  صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 \leq u_n < 7$  .

بـ. استنتاج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 \leq u_n < 7$  و  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$  ومنه  $u_{n+1} - u_n > 0$  .

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

■ تبرير تقارب المتتالية  $(u_n)$  :

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 7 ، إذن فهي متقاربة .

$$(4) \text{ أ. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n) .$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$7 - u_{n+1} = 7 - \sqrt{u_n + 2} - 4 = 3 - \sqrt{u_n + 2} = \frac{(3 - \sqrt{u_n + 2})(3 + \sqrt{u_n + 2})}{3 + \sqrt{u_n + 2}} = \frac{7 - u_n}{3 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$\text{ومن جهة أخرى : } 4 \leq u_n < 7 \text{ يكافئ } \frac{1}{3 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{4} \text{ ومنه } 7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$$

$$\text{بـ. استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ : } 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

• نتحقق من صحة  $P(0)$  .

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ ، لدينا } u_0 = 4 \text{ و } 7 - u_0 = 3 \text{ ومنه } 0 < 7 - u_0 \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^0 \text{ وبالتالي } P(0) \text{ صحيحة .}$$

• نفرض صحة  $P(n)$  من أجل عدد طبيعي  $n$  أي :  $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$  ونبرهن صحة  $P(n+1)$

$$\text{أي } 0 < 7 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

$$\text{لدينا حسب الفرض } 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ ولدينا } 7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n) \text{ منه } 0 < 7 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

بالتالي  $P(n+1)$  صحيحة.

$$\bullet \text{ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(يمكن استخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

$$\bullet \text{ حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

$$\text{لدينا: من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ ولدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} (7 - u_n) = 0$$

$$\text{أي: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7.$$

### حل مقترح التمرين الثالث

$$z_C = -2z_A \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

أ- كتابة العدد المركب  $z_A$  على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا: } z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \text{ ومنه: } |z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{ب- حساب العدد: } \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = e^{i673\pi} + e^{-i673\pi} = e^{i\pi} + e^{-i\pi} = -2$$

(2) أ- الإنسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $C$

تعيين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالإنسحاب  $T$ .

$$\text{الكتابة المختصرة للإنسحاب } T: z' = z + z_C - z_A \text{ أي: } z' = z - 3z_A$$

$$\text{ومنه } z_D = z_B - 3z_A \text{ ومنه } z_D = \overline{z_A} - 3z_A \text{ أي: } z_D = \sqrt{2} - i\sqrt{6} - 3(\sqrt{2} + i\sqrt{6}) = -2\sqrt{2} - 4i\sqrt{6}$$

ب- استنتاج طبيعة الرباعي  $ABDC$ :

لدينا: النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالإنسحاب  $T$  الذي شعاعه  $\overrightarrow{AC}$  أي:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$  ومنه الرباعي  $ABDC$  متوازي أضلاع.

(3) كتابة العدد المركب  $z_C - z_A$  على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا } z_C - z_A = -3z_A \text{ ومنه } z_C - z_A = 6\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)} \text{ أي: } z_C - z_A = 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

(4) إيجاد قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها العدد المركب  $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$  عددا حقيقيا :

$$\text{لدينا : } \left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

$$\frac{-n\pi}{3} = k\pi \text{ يكافئ } n = -3k \text{ ، مع } k \in \mathbb{Z}_-$$

(5) لتكن  $M$  نقطة كيفية من المستوي لاحقتها  $z$  حيث تختلف عن  $A$  وتختلف عن  $C$  .

تعيين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  التي يكون من أجلها  $\frac{z_A - z}{z_C - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما .

$$\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) \in \mathbb{R}^+ \text{ يكافئ } \arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = 0 + 2k\pi \text{ / } k \in \mathbb{Z} \text{ أي } (\overline{MC}; \overline{MA}) = 0 + 2k\pi$$

وبالتالي المجموعة  $(E)$  هي :  $(AC) - [AC]$  (المستقيم  $(AC)$  باستثناء القطعة  $[AC]$ )

#### حل مقترح التمرين الرابع

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = e^x - e$

من أجل  $x \in ]-\infty; 1]$  ، يكون  $e^x \leq e$  أي  $g'(x) \leq 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $] -\infty; 1]$  .

من أجل  $x \in [1; +\infty[$  ، يكون  $e^x \geq e$  أي  $g'(x) \geq 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$  .

ب- إستنتاج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  :

بما أن  $g(1) = 0$  والدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $] -\infty; 1]$  فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة  $g$  .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g(x) \geq 0$  .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$  .

(3) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e\right)\right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

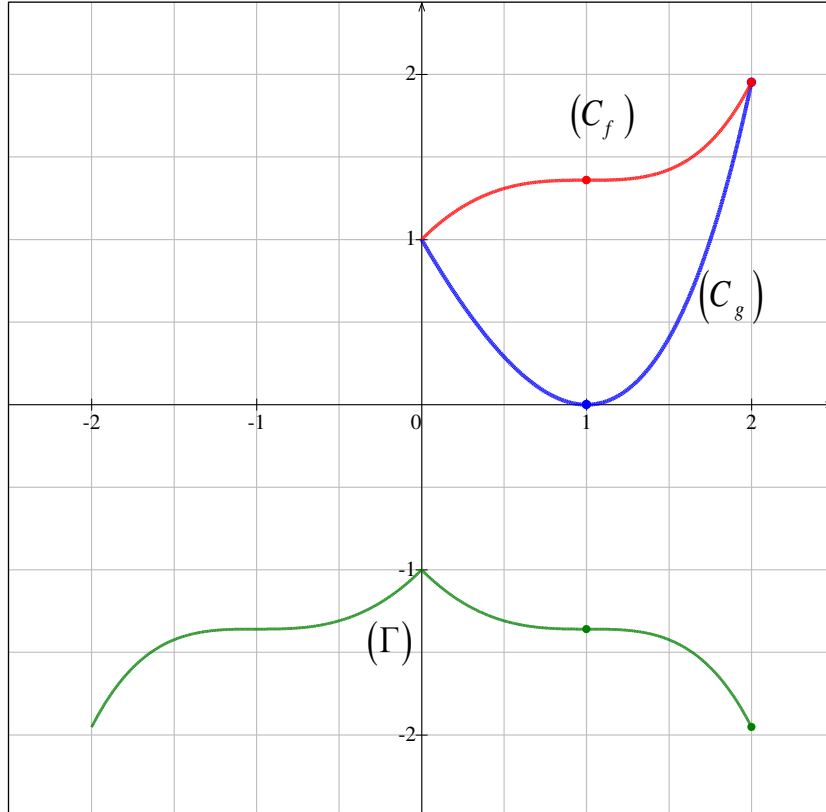
|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $+\infty$ |

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) : \text{من أجل كل عدد حقيقي } x$$

| $x$                               | $-\infty$                     | 0 | 2                        | $+\infty$            |   |
|-----------------------------------|-------------------------------|---|--------------------------|----------------------|---|
| $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ |                               | - | 0                        | +                    | - |
| الوضع النسبي                      | $(C_g)$ تحت $(C_f)$           |   | $(C_g)$ فوق $(C_f)$      | $(C_g)$ تحت $(C_f)$  |   |
|                                   | $(C_g)$ يقطع $(C_f)$          |   | $(C_g)$ يقطع $(C_f)$     | $(C_g)$ يقطع $(C_f)$ |   |
|                                   | في النقطة $A\left(0;1\right)$ |   | $B\left(2;e^2-2e\right)$ | في النقطة            |   |
|                                   |                               |   |                          |                      |   |

(5) الرسم :



(6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  :

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left( -\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[ -\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{6}e + 2e = \frac{2e}{3} \text{ (u a)}$$

$$\text{ومنه } A = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} \text{ cm}^2$$

(7) الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي:  $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$  .

$$\text{أ- من أجل كل } x \in [-2; 2], -x \in [-2; 2] \text{ و } h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x)$$

ومنه الدالة  $h$  زوجية .

$$\text{ب- من أجل } x \in [0; 2], h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$$

استنتاج كيفية رسم  $(\Gamma)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  :

من أجل  $x \in [0; 2], h(x) = -f(x)$  ، وبالتالي  $(\Gamma)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال  $[0; 2]$  .

ولرسم  $(\Gamma)$  على المجال  $[-2; 0]$  نستخدم كون الدالة  $h$  زوجية . الرسم : أنظر الشكل .

**لا تترددوا بتقديم ملاحظاتكم و إقتراحاتكم**

**[Bekhakecha.khaled@gmail.com](mailto:Bekhakecha.khaled@gmail.com)**