



تمارين شارالم في محور [الأعداد المركبة]

[شعبة: علوم تجريبية، رياضيات وتقني رياضي]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الأستاذ: قويسم الغليل
الشعبة: جميع الشعب العلمية



الغليل للرياضيات
المستوى: الثالثة ثانوي

تمرين شامل في محور (الأعداد المركبة)

(I) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32$$

① أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

② احسب $P(2i)$ و $P(2+2i)$

③ استنتج الجذور الأخرى لـ $P(z)$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقاط A, B, C, D و E التي

لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D, z_E

$$\text{حيث } z_E = \sqrt{3} - i \text{ و } z_D = \overline{z_A}, z_C = \overline{z_B}, z_B = 2i, z_A = 2 + 2i$$

① اكتب z_A, z_B, z_C, z_D, z_E على الشكل المثلثي ثم الأسّي

②

أ/ اكتب $\left(\frac{z_A}{z_E}\right)$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

③ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد المركب:

أ/ $(z_A)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

ب/ $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما

ج/ $(z_B)^n$ عددا تخيليا صرف

د/ $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب تماما

④ بيّن أن العدد L_1 ليس حقيقي، حيث: $L_1 = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1445} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1954}$

(III)

① أ/ عيّن لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/ بيّن أن النقاط A, B و F في إستقاميّة

② أ/ اكتب العدد المركب L_2 على الشكل الجبري، حيث: $L_2 = \frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}$

ب/ ما طبيعّة المثلث ACF

③ عيّن لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يحول F إلى A

4 عيّن لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$

(IV)

- 1 عيّن لاحقة النقطة J حتى يكون الرباعي $BJCI$ معيّن
- 2 بيّن أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان. هل (IC) و (DF) متعامدان؟ برر إجابتك.
- 3 بيّن أن المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان. هل (IB) و (DF) متوازيان؟ برر إجابتك.

4 أ/ اكتب العدد المركب L_3 على الشكل الأسّي، حيث: $L_3 = \frac{z_B}{z_J}$

ب/ ما طبيعة المثلث OBJ

(V)

- 1 تحقق أن النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$
 - 2 عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$
 - 3 عيّن (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي بحيث:
- $$(\Gamma_1): \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$$
- $$(\Gamma_2): (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$$
- $$(\Gamma_3): AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 4$$

(VI)

1 s التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة O إلى النقطة D ، عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر s

2 أ/ اكتب على الشكل الجبري ثم الأسّي، العدد L_4 حيث: $L_4 = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث ABC

ج/ عيّن لاحقة النقطة Ω منتصف القطعة $[AC]$

د/ بيّن أن النقط A و B ، C و D تنتمي إلى دائرة (C_1) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

3 لتكن (C_2) الدائرة التي تشمل النقط A ، D و F

أ/ عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (C_2) ، ثم احسب مساحتها

ب/ جد (C_3) صورة الدائرة (C_2) بالتشابه المباشر s ، ثم استنتج مساحة الدائرة (C_3)

4 نعتبر العدد المركب L_5 حيث: $L_5 = \frac{z_B - z_i}{z_A}$

أ/ اكتب L_5 على الشكل الجبري، ثم المثلي

ب/ استنتج طبيعة الرباعي $OIAB$

5 اكتب الصيغة المركبة للتحويل f المعروف بـ $f = t \circ h \circ s$

(VII) نعتبر النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z

1 عيّن المجموعة (Δ_1) للنقط M التي تحقق: $|iz - 2 - 2i| = |\bar{z} - 1 + \sqrt{3}i|$

2 عيّن المجموعة (Δ_2) للنقط M التي تحقق: $|2z - 4i| = 2$

3 عيّن المجموعة (Δ_3) للنقط M التي تحقق: $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ مع $(z \neq 2i)$

4 عيّن المجموعة (Δ_4) للنقط M التي من أجلها: $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ مع $(z \neq z_A)$

5 عيّن المجموعة (Δ_5) للنقط M التي من أجلها: $Q = \frac{z - 2i}{z - 2 + 2i}$ عددا حقيقيا سالبا تماما

⑥ عيّن المجموعة (Δ_6) للنقط M التي تحقق: $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ مع $\theta \in [0; 2\pi[$ مع (VIII) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $(z \neq 2i)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = \frac{-6i(z - 2 + 2i)}{z - 2i}$$

① تحقق من أن: $OM' = \frac{6DM}{BM}$

② استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[BD]$ فإن M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها مع تحديد عناصر الميزة

③ بين أن: $(\vec{u}; \overline{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overline{BM}; \overline{DM}) + 2k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$ و $z' \neq z_0$

④ استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ما عدا النقطتين B و D ، فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها مع تحديد عناصر الميزة

✓ إنتهى



بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الأستاذ: قويسم الغليل

نشر بتاريخ: 03 ماي 2023

للرياضيات

التصحيح المفصل للتمارين الشامل في الأعداد المركبة

جميع الشعب العلمية

المستوى: ثلاثة ثانوي

(I)

① إثبات أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ لدينا:

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32} \\ &= \bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 12\bar{z}^2 - 16\bar{z} + 32 \\ &= P(\bar{z})\end{aligned}$$

إذن: $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

② حساب $P(2i)$ و $P(2+2i)$

$$\begin{aligned}P(2i) &= (2i)^4 - 4(2i)^3 + 12(2i)^2 - 16(2i) + 32 \\ &= 16 - 4(-8i) + 12(-4) - 16(2i) + 32 \\ &= 0\end{aligned}$$

إذن: $P(2i) = 0$

$$\begin{aligned}P(2+2i) &= (2+2i)^4 - 4(2+2i)^3 + 12(2+2i)^2 - 16(2+2i) + 32 \\ &= -64 - 4(-16 + 16i) + 12(8i) - 16(2+2i) + 32 \\ &= 0\end{aligned}$$

إذن: $P(2+2i) = 0$

③ استنتاج جذور أخرى لـ $P(z)$

لدينا: $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

ومنه: $\overline{P(2i)} = P(\bar{2i})$

ومنه: $\overline{P(0)} = P(-2i)$

ولدينا: $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

ومنه: $\overline{P(2+2i)} = P(\bar{2+2i})$

ومنه: $\overline{P(0)} = P(2-2i)$

إذن حلول المعادلت (E) هي:

$$S = \{2i ; 2+2i ; 2-2i ; -2i\}$$

(II)

① كتابة z_A, z_B, z_C, z_D و z_E على الشكل المثلثي ثمر الأسي لدينا:

$$\begin{aligned}z_A &= 2+2i \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\bullet z_B = 2i$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet z_C = \overline{z_B}$$

$$= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet z_D = \overline{z_A}$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\bullet z_E = \sqrt{3} - i$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

② (i) كتابة $\left(\frac{z_A}{z_E}\right)$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_E} = \frac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2i + 2i\sqrt{3} - 2}{3 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

ولدينا:

$$\frac{z_A}{z_E} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{6})}$$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

(ب) استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا:

$$\begin{cases} \frac{z_A}{z_E} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{z_A}{z_E} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

③ إيجاد قيم العدد الطبيعي n

(i) $(z_A)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما:

لدينا: $(z_A)^n = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

يكون: $(z_A)^n$ حقيقيا موجبا:

لما: $\arg[(z_A)^n] = +2k\pi / k \in \mathbb{N}$

أي: $n \cdot \arg(z_A) = 2k\pi$

أي أن: $n \cdot \frac{\pi}{4} = 2k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي: $n = 8k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(ب) $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما؛

لدينا :

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n &= \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n \\ &= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n \\ &= \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)}\right)^n \\ &= e^{in\pi}\end{aligned}$$

يكون: $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

لما: $\arg\left[\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{N}$

أي: $n \cdot \arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = \pi + 2k\pi$

أي أن: $n \cdot \pi = \pi + 2k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي: $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$ (ج) $(z_B)^n$ عددا تخيليا صرفا؛

لدينا: $(z_B)^n = (2e^{i\frac{\pi}{2}})^n$

يكون: $(z_B)^n$ تخيليا صرفا

لما: $\arg[(z_B)^n] = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}$

أي: $n \cdot \arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

أي أن: $n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي: $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(د) $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيلي سالبا؛

لدينا :

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n &= \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n \\ &= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n \\ &= e^{in\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

يكون $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيليا صرفا جزؤه التخيلي سالب تماما

لما: $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n\right] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$

أي: $n \cdot \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$

أي أن: $n \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{N}^*$

يكافئ: $\frac{n}{2} = -\frac{1}{2} + 2k/k \in \mathbb{N}^*$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي: $n = 4k - 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

4 تبين أن العدد L_1 ليس حقيقي

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2} \right)^{1445} + \left(\frac{z_C}{2} \right)^{1962} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}} \right)^{1954} \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} \right)^{2024} + \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} \right)^{1445} + \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} \right)^{1962} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} \right)^{1954} \\
 &= e^{i506\pi} + e^{i\frac{1445\pi}{2}} + e^{i981\pi} + e^{i\frac{1954\pi}{4}} \\
 &= e^{i0\pi} + e^{i(722\pi + \frac{\pi}{2})} + e^{i\pi} + e^{i(488\pi + \frac{\pi}{2})} \\
 &= 1 + e^{i(0\pi + \frac{\pi}{2})} - 1 + e^{i(0\pi + \frac{\pi}{2})} \\
 &= 1 + i - 1 + i \\
 &= \boxed{2i} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

ومنه العدد L_1 تخيلي صرف (III)

1 (i) تعيين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا : $z_F - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}} (z_A - z_O)$
 أي $z_F = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$
 يكافئ $z_F = i(2 + 2i)$
 ومنه $z_F = -2 + 2i$

(ب) تبين أن النقط A ، B و F في استقامية
 لدينا :

$$\begin{aligned}
 \frac{z_A - z_F}{z_B - z_F} &= \frac{2 + 2i - (-2 + 2i)}{2i - (-2 + 2i)} \\
 &= \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2i + 2 - 2i} \\
 &= \frac{4}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ومنه : $\vec{FA} = 2\vec{FB}$

إذن : النقط A ، B و F في استقامية

2 (i) كتابة العدد المركب L_2 على الشكل الجبري
 لدينا :

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} \\
 &= \frac{2 + 2i - (-2i)}{-2 + 2i - (-2i)} \\
 &= \frac{2 + 2i + 2i}{-2 + 2i + 4i} \\
 &= \frac{2 + 4i}{-2 + 4i} \\
 &= \frac{(1 + 2i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} \\
 &= \boxed{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}
 \end{aligned}$$

(ب) تعيين طبيعة المثلث AFC

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} \right| = \left| \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1 \text{ لدينا}$$

$$\frac{AC}{FC} = 1 \text{ ومنه:}$$

$$\tan(\theta) = -\frac{4}{3} \text{ إذن: } AC = FC \text{ و } \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}\right) = \theta \text{ حيث:}$$

$$\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} = e^{i\theta} \text{ ومنه:}$$

وبالتالي المثلث AFC متقايس الساقين

③ **تعيين لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يحول النقطة F إلى النقطة A**

$$z_A - z_H = -\frac{1}{3}(z_F - z_H) \text{ لدينا}$$

$$z_H = \frac{3}{4}z_A + \frac{1}{4}z_F \text{ بعد الحساب نجد}$$

$$z_H = 1 + 2i \text{ وعليه:}$$

④ **تعيين لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$**

$$z_B - z_F = \beta \text{ لدينا}$$

$$z_I = z_O + (z_B - z_F) \text{ بالتعويض في العبارة العامة للتحويلات النقطية نجد:}$$

$$z_I = z_B - z_F \text{ أي}$$

$$z_I = 2 \text{ بالتعويض نجد}$$

(IV)

① **إيجاد لاحقة النقطة J حتى يكون الرباعي BJCI معين**

$$\text{حتى يكون الرباعي BJCI معين يجب أن يكون: } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC} \text{ و } BJ = BI$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC} \text{ لدينا}$$

$$z_J - z_B = z_C - z_I \text{ معناه}$$

$$z_J = z_C - z_I + z_B \text{ ومنه}$$

$$z_J = -2 \text{ ومنه بعد التعويض نجد:}$$

$$BJ = BI \text{ الآن نتحقق من أن:}$$

$$BI = \sqrt{8} \text{ و } BJ = \sqrt{8} \text{ وللتحقق لدينا:}$$

$$z_J = -2 \text{ إذن لاحقة النقطة J هي:}$$

② **تبين أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان:**

لإثبات أن المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أن شعاعي توجيههما متعامدان أي إثبات أن $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{DF}$ لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{z_J - z_B}{z_F - z_D} &= \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - (2 - 2i)} \\ &= \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} \\ &= \frac{-2 - 2i}{-4 + 4i} \\ &= \frac{-(1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} \\ &= \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\arg\left(\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ واضح أن}$$

$$(\overrightarrow{DF}; \overrightarrow{BJ}) = \frac{\pi}{2} \text{ وعليه}$$

إذن $\vec{BF} \perp \vec{DF}$ **هل (IC) و (DF) متعامدان ؟**إنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان.
التبرير :هنا نغير قليلا ونستعمل الجداء السلمي أي لإثبات أنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أنّ $\vec{IC} \perp \vec{DF}$ أي نبيّن أنّ $\vec{IC} \cdot \vec{DF} = 0$.لدينا : $\vec{IC} (-2; -2)$ و $\vec{DF} (-4; 4)$ إذن : $\vec{IC} \cdot \vec{DF} = -2(-4) - 2(4) = 8 - 8 = 0$ وبالتالي : $\vec{IC} \perp \vec{DF}$ يمكنك استعمال الخاصية التي تقول :
" كل مستقيمان متوازيان هما عموديان على نفس المستقيم "
وذلك باستعمال أنّ الرباعي BJCI معيّن**③ تبين أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان:**لإثبات أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان يكفي إثبات أنّ شعاعي توجيههما مرتبطان خطيًا .
لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{z_J - z_C}{z_F - z_D} &= \frac{-2 - (-2i)}{-2 + 2i - (2 - 2i)} \\ &= \frac{-2 + 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} \\ &= \frac{-2 + 2i}{-4 + 4i} \\ &= \frac{(-1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

لدينا : $\arg \left(\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D} \right) = 0$ وعليه $(\vec{DF}; \vec{CJ}) = 0$ ومنه : $\vec{DF} \parallel \vec{CJ}$ **هل (IB) و (DF) متوازيان ؟**إنّ المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان.
التبرير :لدينا $\vec{CJ} = \vec{IB}$

لأنّ الرباعي BJCI معيّن

معناه الشعاعان $\vec{CJ}$ و $\vec{IB}$ مرتبطان خطيًاوكذلك مما سبق وجدنا أنّ الشعاعان $\vec{DF}$ و $\vec{CJ}$ مرتبطان خطيًاإذن بالتعدي نجد $\vec{IB}$ و $\vec{DF}$ مرتبطان خطيًا

ومنه : المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان

④ (i) كتابة L_3 على الشكل الأسّي

$$\begin{aligned} \frac{z_B}{z_J} &= \frac{2i}{-2} \\ &= -i \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(ب) استنتاج طبيعة المثلث OBJ

$$\frac{z_B}{z_J} = -i$$

لدينا: $\frac{z_B}{z_J} = -i$ هذا معناه أن $(\vec{OJ}; \vec{OB}) = -\frac{\pi}{2}$ و $OB = OJ$

إذن: المثلث OBJ قائم في O ومتقايس الساقين (V)

① التحقق من أن النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD) لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_D}{2} &= \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2} \\ &= 2 \\ &= z_I \end{aligned}$$

ومنه: I منتصف قطعة المستقيم (AD)

② تعيين لاحقة النقطة G لدينا :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{z_A + 2z_B - 2z_C}{1 + 2 - 2} \\ &= 2 + 2i + 2(2i) - 2(-2i) \\ &= 2 + 10i \end{aligned}$$

③ تعيين (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) مجموعة النقط M من المستوي • تعيين (Γ_1) :

$$\begin{aligned} \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC}\| &= \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MD}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \frac{1}{2} \|2\vec{MI}\| \\ &\Rightarrow MG = MI \end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Γ_1) هي: محور قطعة المستقيم (GI) • تعيين (Γ_2) :

$$\begin{aligned} (\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC}) \bullet (\vec{MA} + \vec{MD}) &= 0 \Rightarrow \vec{MG} \bullet 2\vec{MI} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{MG} \bullet \vec{MI} = 0 \end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Γ_2) هي: الدائرة التي قطرها [GI]"يمكنك استعمال الشكل التحليلي حتى تجد $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ " • تعيين (Γ_3) :

$$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{BM}^2 - \overrightarrow{CM}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{BM}^2 - \overrightarrow{CM}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM})^2 - 2(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM})^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} + 2(\overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM}) - 2(\overrightarrow{CG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GM}) = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{BG}^2 + 2\overrightarrow{GM}^2 + 4\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM} - 2\overrightarrow{CG}^2 - 2\overrightarrow{GM}^2 - 4\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GM} = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{BG}^2 - 2\overrightarrow{CG}^2 + 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{CG}) = 4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2\overrightarrow{BG}^2 - 2\overrightarrow{CG}^2 + 2\overrightarrow{GM} \cdot \vec{0} = 4$$

$$\Leftrightarrow AG^2 + GM^2 + 2BG^2 - 2CG^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = 4 - AG^2 - 2BG^2 + 2CG^2$$

لدينا:

$$AG^2 = |z_G - z_A|^2$$

$$= |(2 + 10i) - (2 + 2i)|^2$$

$$= |8i|^2$$

$$= \sqrt{0^2 + 8^2}$$

$$= 64$$

$$BG^2 = |z_G - z_B|^2$$

$$= |(2 + 10i) - (2i)|^2$$

$$= |2 + 8i|^2$$

$$= \sqrt{2^2 + 8^2}$$

$$= 68$$

$$CG^2 = |z_G - z_C|^2$$

$$= |(2 + 10i) - (-2i)|^2$$

$$= |2 + 12i|^2$$

$$= \sqrt{2^2 + 12^2}$$

$$= 148$$

إذن:

$$GM^2 = 4 - AG^2 - 2BG^2 + 2CG^2$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = 4 - 2(64) - 2(68) + 2(148)$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow GM = 6$$

ومنه المجموعة (Γ_3) هي: الدائرة التي نصف قطرها 6 ومركزها النقطة G

(VI)

1 تعيين نسبة وزاوية S

$$\begin{cases} z_D = \alpha z_O + \beta \quad \dots (1) \\ z_A = \alpha z_A + \beta \quad \dots (2) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\alpha = \frac{z_D - z_A}{z_O - z_A} \quad \text{ب طرح (2) من (1) نجد}$$

بالتعويض نجد $\alpha = 1 + i$

وعليه:

نسبة S هي: $k = |\alpha| = \sqrt{2}$

وزاويته هي: $\theta = \arg(\alpha) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

② (أ) كتابة العدد L_4 على الشكل الجبري، ثم الأسّي

لدينا:

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \\ &= \frac{(2 + 2i) - (2i)}{(-2i) - (2i)} \\ &= \frac{2}{-4i} \\ &= \frac{2i}{-4ii} \\ &= \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \end{aligned}$$

(ب) ستنتج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $L_4 = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{CB} = \frac{1}{2} \neq 1 \\ (\vec{BC}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{ومنه:}$$

إذن: المثلث ABC قائم في B

(ج) تعيين لاحقة النقطة Ω منتصف القطعة $[AC]$

لدينا:

$$\begin{aligned} z_\Omega &= \frac{z_A + z_C}{2} \\ &= \frac{2 + 2i - 2i}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن: $z_\Omega = 1$

(د) تبين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى دائرة (C_1)

لدينا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) \cdot \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \right) &= \left(\frac{(2 + 2i) - (-2i)}{(2i) - (-2i)} \right) \cdot \left(\frac{(2i) - (2 - 2i)}{(2 + 2i) - (2 - 2i)} \right) \\ &= \left(\frac{2 + 4i}{4i} \right) \cdot \left(\frac{-2 + 4i}{4i} \right) \\ &= \frac{-4 + 8i - 8i - 16}{-16} \\ &= \frac{5}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

هذا معناه أن الزاويتان $(\vec{CA}; \vec{CB})$ و $(\vec{DB}; \vec{DA})$ متكاملتان

وعليه: النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C_1)

• بما أن المثلث ABC قائم في B، والنقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة

إذن النقطة B تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AC]
إذن مركز الدائرة (C₁) هو منتصف القطعة [AC]

أي مركز الدائرة (C₁) هو النقطة Ω ونصف قطرها هو: $\frac{AC}{2} = \frac{|z_A - z_C|}{2} = \sqrt{5}$ إذن: $C_1(\Omega; \sqrt{5})$

③ (أ) تعيين مركز الدائرة (C₂) ونصف قطرها ، وحساب مساحتها

• لدينا : $\vec{AD} (0; -4)$ ، $\vec{AF} (-4; 0)$ و $\vec{DF} (-4; 4)$

ومنه: $AD = 4$ ، $AF = 4$ و $DF = \sqrt{32}$

وعليه : $AD^2 = 16$ ، $AF^2 = 16$ و $DF^2 = 32$

وعليه حسب نظرية فيثاغورس العكسية فإن المثلث AFD قائم في النقطة A .

• بما أن الدائرة (C₂) تشمل النقط A ، D و F

فإنها تكون محيطية بالمثلث القائم AFD ويكون وتره، القطعة [DF] هو قطر الدائرة (C₂)

• إيجاد مركز الدائرة (C₂)

$$\frac{z_D + z_F}{2} = \frac{2 - 2i - 2 + 2i}{2} = 0 = z_O$$

إذن مركز الدائرة (C₂) هو مبدأ المعلم

$$r = \frac{DF}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ هو نصف قطرها}$$

أي: $C_2(O; 2\sqrt{2})$

ومساحتها (C₂) هي : $S_{(C_2)} = \pi r^2 = \pi (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ cm}^2$

(ب) إيجاد (C₃) صورة الدائرة (C₂) بالتشابه المباشر S ، واستنتاج مساحة الدائرة (Γ')

لدينا العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' - z_A = (1 + i)(z - z_A)$

ومنه $z' = (1 + i)z + 2 - 2i$

لدينا $r' = kr = \sqrt{2}(2\sqrt{2})$

أي $r' = 4$

ولدينا $z_D = (1 + i)z_O + 2 - 2i$

ومنه: $z_D = 2 + 2i$

ومنه (C₃) صورة الدائرة (C₂) بالتشابه المباشر s هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها هو $r' = 4$ أي:

$C_3(D; 4)$

ومساحتها هي : $S_{(C_3)} = k^2 S_{C_2} = (\sqrt{2})^2 \times 8\pi = 16\pi \text{ cm}^2$

④ (أ) كتابة العدد المركب L₅ على الشكل الجبري ثم المثلثي

لدينا :

$$\begin{aligned} L_5 &= \frac{z_B - z_I}{z_A} \\ &= \frac{(2i) - (2)}{2 + 2i} \\ &= \frac{-2 + 2i}{2 + 2i} \times \frac{2 + 2i}{2 + 2i} \\ &= i \end{aligned}$$

ومنه:

$$L_5 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(ب) استنتاج طبيعة الرباعي OIAB

• لدينا $\left| \frac{z_B - z_I}{z_A} \right| = \left| \frac{z_B - z_I}{z_A - z_O} \right| = |i| = 1$

ومنه: $|z_B - z_I| = |z_A - z_O|$

ومنه: IB = OA

ولدينا: $\arg\left(\frac{z_B - z_I}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_O}\right) = (\vec{OA}; \vec{IB}) = \frac{\pi}{2}$

لدينا: $\frac{z_A + z_O}{2} = \frac{z_I + z_B}{2} = 1 + i$
من هنا نؤكد أن قطرا الرباعي OIAB متناصفان ومتعامدان ومتساويان
إذن: OIAB مربع

5 كتابة الصيغة المركبة للتحويل f

العبارة المركبة للانسحاب t هي: $z' = z + 2$
العبارة المركبة للتعاكس h هي: $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$
العبارة المركبة للتشابه المباشر هي: $z' = (1 + i)z + 2 - 2i$
لنعرف الآن التركيب ونستعمل نفس الفكرة في تركيب الدوال فنجد:
العبارة المركبة للتحويل t o h كمايلي: $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{10}{3} + \frac{8}{3}i$
وعليه العبارة المركبة للتحويل f هي: $z' = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)z + \frac{8}{3} + \frac{10}{3}i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right) \in \mathbb{C} \\ \left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{3} \neq 1 \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

إذن f يمثل تشابه مباشر:
نسبته هي: $k_f = \left| -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$
وزاويته هي: $\theta_f = \pi + \frac{\pi}{4}$
ولا حقة مركزه هي: $z_{\Omega'} = \frac{42}{17} + \frac{32}{17}i$

(VII)

1 تعيين المجموعة (Δ₁)

لدينا:

$$\begin{aligned} |iz - 2 - 2i| &= |\bar{z} - \sqrt{3} - i| \Rightarrow \left| i \left(z - \frac{2}{i} - 2 \right) \right| = |\bar{z} - \sqrt{3} - i| \\ &\Rightarrow \left| i \left(z - \frac{2i}{ii} - 2 \right) \right| = |z - \sqrt{3} + i| \\ &\Rightarrow |i(z + 2i - 2)| = |z - \sqrt{3} + i| \\ &\Rightarrow |i||z + 2i - 2| = |z - \sqrt{3} + i| \\ &\Rightarrow |z - (2 - 2i)| = |z - (\sqrt{3} - i)| \\ &\Rightarrow |z - z_D| = |z - z_E| \\ &\Rightarrow DM = EM \end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ₁) مجموعة النقط M من المستوي هي:
محور القطعة المستقيمة [DE]

2 تعيين المجموعة (Δ₂)

$$\begin{aligned} |2z - 4i| &= 2 \Rightarrow |2(z - 2i)| = 2 \\ &\Rightarrow |2||z - 2i| = 2 \\ &\Rightarrow |z - 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - z_B| = 1 \\ &\Rightarrow BM = 1 \end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ₂) مجموعة النقط M من المستوي هي:

الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $r = 1$

3) تعيين المجموعة (Δ_3)

لدينا

$$\begin{aligned}\arg(z - 2i) &= \arg(z - z_B) \\ &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ومنه:

$$(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$$

ومنه المجموعة (Δ_3) مجموعة النقط M من المستوي هي:

نصف المستقيم الذي مبدؤه B ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل في الاتجاه المباشر، باستثناء النقطة B (لأن عمدة الصفر غير معيّنة)

4) تعيين المجموعة (Δ_4)

لدينا:

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_A}\right) &= 2k\pi \Rightarrow \arg(z - z_A) - \arg(\overline{z - z_A}) = 2k\pi \\ &\Rightarrow \arg(z - z_A) - (-\arg(z - z_A)) = 2k\pi \\ &\Rightarrow 2\arg(z - z_A) = 2k\pi \\ &\Rightarrow \arg(z - z_A) = k\pi \\ &\Rightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = k\pi\end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ_4) مجموعة النقط M من المستوي هي:

المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A

5) تعيين المجموعة (Δ_5)

$$Q = \frac{z - 2i}{z - 2 + 2i} = \frac{z - z_B}{z - z_D}$$

لدينا:

$$\arg(Q) = (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$$

وعليه الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطيا وفي اتجاهين متعاكسين
ومنه المجموعة (Δ_5) مجموعة النقط M من المستوي هي:
القطعة المستقيمة $]BD[$

6) تعيين المجموعة (Δ_6)

لدينا:

$$\begin{aligned}z &= 2 - 2i - 9e^{i\theta} \Rightarrow z - (2 - 2i) = -9e^{i\theta} \\ &\Rightarrow z - z_D = -9e^{i\theta} \\ &\Rightarrow |z - z_D| = 9 \\ &\Rightarrow DM = 9\end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ_6) مجموعة النقط M من المستوي هي:

الدائرة التي مركزها النقطة D وطول نصف قطرها هو $r = 9$

(VIII)

1) التحقق من أن: $OM' = 6 \frac{DM}{BM}$

$$z' = \frac{-6i(z - 2 + 2i)}{z - 2i} = \frac{-6i(z - (2 - 2i))}{z - 2i}$$

لدينا

$$z' - z_O = -6i \left(\frac{z - z_D}{z - z_B} \right) \quad \text{ومنه:}$$

$$|z' - z_O| = 6 \left| \frac{z - z_D}{z - z_B} \right| \quad \text{ومنه:}$$

$$OM' = 6 \times \frac{DM}{BM} \quad \text{ومنه:}$$

② استنتاج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[BD]$ فإن M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها

لدينا: M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB)

معناه: $DM = BM$

ومنه: $OM' = 6$

إذن: M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها هو $r = 6$

$$\textcircled{3} \quad \text{تبين أن } (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$$

لدينا

$$\begin{aligned} z' - z_O &= -6i \left(\frac{z - z_D}{z - z_B} \right) \Rightarrow \arg(z' - z_O) = \arg\left(-6i \left(\frac{z - z_D}{z - z_B} \right)\right) \\ &\Rightarrow \arg(z' - z_O) = \arg(-6i) + \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_B}\right) \\ &\Rightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

④ استنتاج إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ فإن M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها

لدينا: M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ما عدا النقطتين B و D

معناه: $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

ومنه: $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi$

ومنه: $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = 3k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $M' \neq O$

أي أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطين خطياً

ومنه M' تنتمي إلى حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O