

تمرين (01)

(v_n) متتالية حسابية حيث : $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

(1) عين أساس المتتالية وحدها الأول v_0 .

(2) أحسب v_n بدلالة n . ثم عين العدد الطبيعي n حيث : $v_n = 50$.

(3) أحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + \dots + v_{94}$.

حل التمرين (01)

(1) تعيين أساس المتتالية وحدها الأول v_0 :

لدينا $v_n = v_p + (n-p)r$ من أجل $n=8$, $p=4$ لدينا $v_8 = v_4 + (8-4)r$ ومنه $7 = 5 + 4r$ أي $4r = 2$ وبالتالي $r = \frac{1}{2}$

• حساب v_0 : من أجل $n=4$, $p=0$ نجد : $v_4 = v_0 + (4-0)r$ ومنه $5 = v_0 + 4 \times \frac{1}{2}$ أي $5 = v_0 + 2$ وبالتالي $v_0 = 3$

(2) حساب v_n بدلالة n :

لدينا $v_n = v_p + (n-p)r$ من أجل $p=0$ لدينا : $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = 3 + \frac{1}{2}n$

• تعيين العدد الطبيعي n حيث $v_n = 50$: $v_n = 50$ معناه $3 + \frac{1}{2}n = 50$ ومنه $\frac{1}{2}n = 47$ أي $n = 47 \times 2$ وبالتالي $n = 94$

(3) حساب المجموع : $S = v_6 + v_7 + \dots + v_{94}$: $S = \frac{94-6+1}{2}(v_6 + v_{94})$

ولدينا $v_6 = 3 + \frac{1}{2} \times 6 = 3 + 3 = 6$, $v_{94} = 50$ ومنه $S = \frac{89}{2}(6 + 50) = 2492$

تمرين (02)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$.

(1) عين أساس المتتالية الحسابية (u_n).

(2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

(4) أحسب المجموع : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

حل التمرين (02)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$.

(1) تعيين أساس المتتالية الحسابية (u_n):

لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$ من أجل $n=2$, $p=0$ نجد : $u_2 = u_0 + (2-0)r$ ومنه $u_2 = 2 + 2r$(1)

من أجل $n=5$, $p=0$ نجد : $u_5 = u_0 + (5-0)r$ ومنه $u_5 = 2 + 5r$(2)

بجمع (1) و (2) نجد : $u_2 + u_5 = 2 + 2r + 2 + 5r$ ومنه $25 = 4 + 7r$ أي $7r = 25 - 4$ ومنه $7r = 21$ وبالتالي $r = 3$

(2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$ من أجل $p=0$ نجد $u_n = u_0 + (n-0)r$ ومنه $u_n = 2 + 3n$

(3) حساب قيمة الحد الذي رتبته 11 :

لدينا: بما أن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الذي رتبته 11 هو u_{10} ومنه $u_{10} = 2 + 3(10) = 2 + 30 = 32$ وبالتالي $u_{10} = 32$

(4) حساب المجموع : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$:

$S_n = \frac{10-1+1}{2}(u_1 + u_{10})$ ولدينا $u_{10} = 32$ و $u_1 = 2 + 3 = 5$ ومنه $S_n = \frac{10}{2}(5 + 32)$ وبالتالي $S_n = 185$

تمرين (03)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$

(1) أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية .

(2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(4) أوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 27$.

حل التمرين (03)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$

(1) حساب الأساس والحد الأول u_0 : لدينا $u_n = u_p + (n - p)r$

من أجل $n = 3$, $p = 0$ نجد : $u_3 = u_0 + (3 - 0)r$ ومنه $u_3 = u_0 + 3r$ بإضافة u_0 للطرفين نجد $u_0 + u_3 = 2u_0 + 3r$ ومنه $18 = 2u_0 + 3r \dots (1)$

ومن أجل $n = 2$, $p = 0$ نجد : $u_2 = u_0 + (2 - 0)r$ ومنه $u_2 = u_0 + 2r \dots (2)$

ومن أجل $n = 5$, $p = 0$ نجد : $u_5 = u_0 + (5 - 0)r$ ومنه $u_5 = u_0 + 5r \dots (3)$

بجمع (2) و (3) طرفا لطرف نجد : $u_2 + u_5 = 2u_0 + 7r$ ومنه $34 = 2u_0 + 7r \dots (4)$

بضرب (1) في -1 والجمع مع (4) نجد : $34 - 18 = 2u_0 - 2u_0 + 7r - 3r$ ومنه $16 = 4r$ وبالتالي $r = 4$ بتعويض قيمة r في (1)

نجد : $18 = 2u_0 + 3 \times 4$ ومنه $18 = 2u_0 + 12$ ومنه $2u_0 = 18 - 12$ أي $2u_0 = 6$ وبالتالي $u_0 = 3$

(2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا $u_n = u_p + (n - p)r$ من أجل $p = 0$ نجد $u_n = u_0 + (n - 0)r$ ومنه $u_n = 3 + 4n$

(3) حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(10 + 4n) = 5n + 2n^2$: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n-1+1}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(10 + 4n) = 5n + 2n^2$

(1) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 27$: لدينا $S_n = 27$ معناه $5n + 2n^2 = 27$ ومنه $5n + 2n^2 - 27 = 0$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 241$ حيث : $a = 2$, $b = 5$, $c = -27$ ومنه يوجد حلين هما : $n_1 = \frac{-5 - \sqrt{241}}{4} \notin \mathbb{N}$

$n_2 = \frac{-5 + \sqrt{241}}{4} \notin \mathbb{N}$ (مرفوض) ومنه لا توجد قيم ل n بحيث $S_n = 27$.

التمرين (04)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب - أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n

ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة .

نضع : $\alpha = \frac{3}{2}$.

أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين (04)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

أ- تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \alpha \left(u_n + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \alpha v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول v_0 حيث $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1}$

ب- كتابة بدلالة n و α ، عبارة v_n : نعلم أن $v_n = v_0 \times \alpha^n$ وبما أن $q = \alpha$ و $v_0 = 6 + \frac{1}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد $v_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n$

استنتاج بدلالة n و α ، عبارة u_n : لدينا $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$ وعليه $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$ إذن $u_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n - \frac{1}{\alpha-1}$

ج- تعيين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة.

(u_n) متقاربة لما $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$ وهذا من أجل $0 < \alpha < 1$.

$$\text{نضع: } \alpha = \frac{3}{2} \text{ نجد } v_0 = 6 + \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 6 + 2 = 8$$

حساب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n : حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 8 \left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)} \right) = -16 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \right)$$

حساب T_n : لدينا $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$ أي $u_n = v_n - 2$ وعليه $u_n = v_n - 2$

ومنه $u_0 = v_0 - 2$ و $u_1 = v_1 - 2$ و $u_2 = v_2 - 2$ وهكذا

$$T_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + (v_2 - 2) + \dots + (v_n - 2) = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (-2 - 2 - 2 - \dots - 2)$$

$$= S_n + (-2)(n+1) = S_n - 16 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \right) - 2(n+1)$$

بالتعويض في T_n نجد

التمرين (05)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ والمتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) أحسب v_1 ، v_0 .

(2) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

(3) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

(4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_n - u_0$. ثم استنتج أن : $u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1$.

(5) أحسب $\lim (u_n)$.

حل التمرين (05)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ والمتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) أحسب v_1 ، v_0 .

$$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2}(1) = \frac{5}{2} \text{ لأن } v_1 = u_2 - u_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \text{ و } v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$$

(2) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$:

$$q = \frac{1}{2} \text{ متتالية هندسية أساسها } (v_n) \text{ وعليه } v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

(3) تعبير عن v_n بدلالة n : نعلم أن $v_n = v_0 \times q^n$ وبما أن $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = 1$ بالتعويض نجد $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

استنتاج المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

(4) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_n - u_0$.

لدينا $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ وبما أن $v_n = u_{n+1} - u_n$ أي $v_0 = u_1 - u_0$ و $v_1 = u_2 - u_1$ و $v_2 = u_3 - u_2$ و $\dots$ و $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

بالتعويض في S_n نجد $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$.

$$S_n = u_n - u_0 \text{ لدينا } u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1 \text{ وعليه } u_n = S_n + u_0 \text{ ومنه } u_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1$$

$$\text{حساب } \lim(u_n) : \lim(u_n) = \lim \left[2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 1 \right] = 3 : \text{ لأن } \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ (} -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{)}$$

التمرين (06)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عين حدها الأول v_1 .

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

ج) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3$.

د) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ما هي نهايتها؟

حل التمرين (06)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 1 = \frac{2}{3}(3) - 1 = 1 \text{ و } u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 1 = \frac{2}{3}(1) - 1 = -\frac{1}{3}$$

(2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) وعين حدها الأول v_1 .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - \frac{2}{3}u_{n-1} + 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}u_{n-1} = \frac{2}{3}(u_n - u_{n-1}) = \frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_1 = u_1 - u_0 = 1 - 3 = -2$

(ب) تعبر عن v_n بدلالة n .

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_1 = -2$ فإن $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ وعليه $v_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(ج) عبر عن v_n بدلالة u_n :

$$v_n = \frac{-1}{2}u_n - \frac{3}{2} \quad \text{لدينا} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \quad \text{ومنه} \quad \frac{2}{3}v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{معناه} \quad \frac{2}{3}v_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n \quad \text{معناه} \quad \frac{2}{3}v_n = \frac{-1}{3}u_n - 1 \quad \text{معناه} \quad v_n = \frac{-1}{2}u_n - \frac{3}{2}$$

• استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3$.

$$\text{لدينا} \quad v_n = \frac{-1}{2}u_n - \frac{3}{2} \quad \text{معناه} \quad \frac{1}{2}u_n = -v_n - \frac{3}{2} \quad \text{معناه} \quad u_n = -2v_n - 3 \quad \text{وبما أن} \quad v_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{أي}$$

$$u_n = -2 \left(-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) - 3 = 2^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3 = 2^2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} - 3 = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3$$

(د) تعين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ما هي نهايتها؟

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1-1}} - 3 \right) - \left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - 3 \right) = \frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1-1}} - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \right) \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = \left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \right) \left(\frac{-1}{3} \right)$$

بما أن $\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} > 0$ و $\frac{-1}{3} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 0 \quad \text{أي} \quad -1 < \frac{2}{3} < 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -2v_n - 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} -2 \left(-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) - 3 = -3$$

التمرين (07)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1. أحسب u_1, u_2 .

2. بين أن (u_n) ليست حسابية.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

• أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

• احسب المجموع S حيث $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021}$

حل التمرين (07)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.1 حساب u_2, u_1 .

لدينا $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$ ومن أجل $n = 0$: $u_1 = 1 - \frac{9}{1 + 5} = \frac{-1}{2}$

من أجل $n = 1$: $u_2 = 1 - \frac{9}{u_1 + 5} = 1 - \frac{9}{\frac{-1}{2} + 5} = 1 - \frac{9}{\frac{9}{2}} = 1 - 2 = -1$

2. تبين أن (u_n) ليست حسابية : $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ إذن (u_n) ليست حسابية.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

• إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{1}{u_n + 2} \times \frac{3}{3} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{3}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0 حيث $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

• تعبير عن v_n بدلالة n : نعلم أن $v_n = v_0 + nr$ وبما أن $r = \frac{1}{3}$ و $v_0 = \frac{1}{3}$ بالتعويض نجد $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n$

• استنتج u_n بدلالة n .

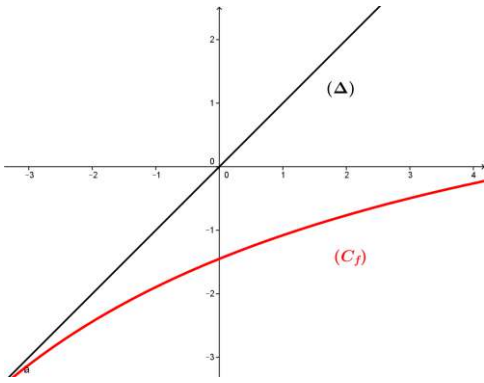
لدينا $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ يكافئ $v_n(u_n + 2) = 1$ يكافئ $v_n u_n + 2v_n = 1$ يكافئ $v_n u_n = 1 - 2v_n$ يكافئ $u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n}$

$$u_n = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{n}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{n}{3}} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{n}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{n}{3}} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{n}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{n}{3}}$$

• حساب المجموع S حيث $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021}$

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021} = (2021 - 0 + 1) \left(\frac{v_0 + v_{2021}}{2} \right) = (2022) \left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2021}{3}}{2} \right) = (2022) \left(\frac{2023}{6} \right) = 681751$$

التمرين (08)



المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي:

$f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

1. تحقق أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[-4; 1]$ ثم بين أن من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

2. (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = f(u_n)$ انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_3; u_2; u_1; u_0$ ، ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \times v_n = 1 - 4v_n$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- احسب المجموع S حيث $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

حل التمرين (08)

f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

1. التحقق أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[-4; 1]$ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-4; 1]$ ومن أجل كل x من المجال

$$f'(x) = \frac{49}{(x+11)^2} \quad ; \quad [-4; 1]$$

$49 > 0$ و $(x+11)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[-4; 1]$

تبين أن من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

لدينا $x \in [-4; 1]$ معناه $-4 \leq x \leq 1$ وبما أن f متزايدة تماماً على المجال $[-4; 1]$ فإن

$$f(-4) \leq f(x) \leq f(1)$$

وبما أن $f(-4) = -4$ و $f(1) = \frac{-13}{12}$ وعليه $-4 \leq f(x) \leq \frac{-13}{12}$ وعليه $f(x) \in [-4; 1]$

2. (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = f(u_n)$

تمثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_3; u_2; u_1; u_0$

تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) : من تمثيل الحدود $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ وعليه نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \times v_n = 1 - 4v_n$

$v_n = \frac{1}{u_n + 4}$ يكافئ $v_n(u_n + 4) = 1$ يكافئ $u_n \times v_n + 4v_n = 1$ يكافئ $u_n \times v_n = 1 - 4v_n$: حسابية أساسها (v_n) إثبات أن المتتالية

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 4} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{\frac{7u_n + 28}{u_n + 11}} - \frac{1}{u_n + 4} \\ &= \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} - \frac{1}{u_n + 4} \times \frac{7}{7} = \frac{u_n + 11 - 7}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 4} = \frac{1}{4}. \text{ حيث } v_0 \text{ وحدها الأول } \frac{1}{7} \text{ حسابية أساسها } (v_n) \text{ ومنه}$$

$$\bullet \text{ تعبر عن } v_n \text{ بدلالة } n : \text{ نعلم أن } v_n = v_0 + nr \text{ وبما أن } r = \frac{1}{7} \text{ و } v_0 = \frac{1}{4} \text{ بالتعويض نجد } v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}n$$

$$\bullet \text{ استنتج } u_n \text{ بدلالة } n.$$

$$u_n = \frac{-16n}{7+4n} \text{ و عليه } u_n = \frac{-4n}{7+4n} \text{ ومنه } u_n = \frac{1-4\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{7}\right)}{\frac{1}{4} + \frac{n}{7}} \text{ يكافئ } u_n = \frac{1-4v_n}{v_n} \text{ يكافئ } u_n \times v_n = 1 - 4v_n \text{ لدينا}$$

$$\bullet \text{ دراسة اتجاه تغير المتتالية } (u_n):$$

$$g(x) = \frac{-16x}{7+4x} \text{ بـ } [0; +\infty[\text{ المعرفة على المجال } (u_n) \text{ الدالة المرفقة بالمتتالية } g \text{ حيث } u_n = g(n) \text{ أي } u_n = \frac{-16n}{7+4n} \text{ لدينا}$$

$$g'(x) = \frac{-112}{(7+4x)^2} \text{ من المجال } [0; +\infty[\text{ من أجل كل } [0; +\infty[\text{ قابلة للاشتقاق على المجال } g \text{ الدالة}$$

$$(u_n) \text{ متناقصة تماما. إذن المتتالية } [0; +\infty[\text{ متناقصة تماما على المجال } g \text{ وعليه الدالة } g'(x) < 0 \text{ ومنه } (7+4x)^2 > 0 \text{ و } -112 < 0$$

$$\bullet \text{ حساب المجموع } S \text{ حيث } S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n-0+1) \left(\frac{v_0 + v_n}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n}{7}}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{7+2n}{28} \right)$$

تمرين(09)

$$(u_n) \text{ متتالية حسابية حدها الأول } u_1 \text{ وأساسها } r.$$

$$1. \text{ احسب حدها الثاني } u_2 \text{ علما أن: } u_1 + u_3 = 16 \text{ و الحد الرابع } u_4 \text{ علما أن: } u_3 + u_4 + u_5 = 42.$$

$$2. \text{ عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول } u_1$$

$$3. \text{ اكتب الحد العام } u_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم عين } n \text{ بحيث يكون } u_n = 2012$$

$$4. \text{ نضع } v_n = u_{5n+1}, \text{ أ. بين أن } (v_n) \text{ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول } v_0$$

$$\text{ب. احسب المجموع: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ واستنتج حساب: } S_n = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} \dots + u_{5n+1}.$$

تمرين(10)

$$\text{لتكن المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بحدها أول } u_0 \text{ و } u_{n+1} = -2u_n + 3.$$

$$(1) \text{ عين قيمة } u_0 \text{ حتى تكون متتالية ثابتة}$$

$$(2) \text{ نضع: } u_0 = 2 \text{ مثل الحدود } u_0, u_1, u_2, u_3 \text{ و } u_4 \text{ على حامل محور الفواصل. ثم خمن حول اتجاه تغير المتتالية } (u_n)$$

$$(3) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = u_n - \alpha$$

$$\text{أ. عين قيمة } \alpha \text{ حتى تكون المتتالية } (v_n) \text{ متتالية هندسية.}$$

$$\text{ب. عبر عن } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم استنتج عبارة } u_n \text{ بدلالة } n.$$

$$\text{ج. أحسب المجموعين التاليين: } S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n, \text{ } S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$