

المحور : الدوال الأسية

الدالة الأسية

توجد دالة وحيدة f تحقق الشرطين $f' = f$ و $f(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية (النيبيرية) ويرمز لها بـ $\exp$ "إصطلاحاً: من أجل كل عدد حقيقي x نضع

$$\exp(x) = e^x :$$

نتائج: من التعريف نجد $\exp(0) = 1$ و $\exp'(x) = \exp(x)$

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين y, x و n عدد صحيح:

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 & e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ (e^x)' &= e^x & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\ e^x &> 0 & e^{nx} &= (e^x)^n \\ e^{x+y} &= e^x \times e^y \end{aligned}$$

نتيجة: من أجل كل عددين a و b من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$b < a : \text{معناه } e^b < e^a -$$

$$b = a : \text{معناه } e^b = e^a -$$

$$\boxed{(e^{g(x)})' = g'(x) \times e^{g(x)}} \quad \text{مشتقة الدالة الاسية}$$

دراسة إشارة بعض العبارات الأسية:

- إذا كانت العبارة تكتب من الشكل $g(x)e^{h(x)}$ فالإشارة من إشارة $g(x)$
- إذا كانت العبارة تكتب من الشكل $ae^{\alpha x + \beta} + b$ نميز ثلاث حالات :
 - 1- إذا كان a و b موجبان فإن $ae^{\alpha x + \beta} + b > 0$
 - 2- إذا كان a و b سالبان فإن $ae^{\alpha x + \beta} + b < 0$
 - 3- إذا كان a و b مختلفان فالإشارة فإنه يوجد حل وحيد x_0 بحيث

$$ae^{\alpha x + \beta} + b = 0$$

$$ae^{\alpha x + \beta} = -b$$

$$e^{\alpha x + \beta} = -\frac{b}{a} \dots \dots \dots -\frac{b}{a} > 0$$

$$\alpha x + \beta = \ln\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x = \frac{-\beta + \ln\left(-\frac{b}{a}\right)}{\alpha}$$

و الإشارة كمايلي :

x	x_0
حسب إشارة $a \cdot \alpha$	عكس إشارة $a \cdot \alpha$
إشارة $a \cdot e^{\alpha x + \beta} + b$	

دراسة إشارة العبارة الأسية من الشكل: $ae^{2x} + be^x + c$ بحيث $a \cdot b \cdot c \neq 0$:

- نستعمل طريقة تبديل المتغير نضع $e^x = t$ فنحصل على $at^2 + bt + c$
- ثم نعين قيم t إذا كانت المعادلة تقبل حلول
- نستنتج قيم x و ندرس إشارة العبارة مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

ملاحظة: العبارة $ae^{2x} + be^x + c$ تحلل من الشكل $a(e^x - t_1)(e^x - t_2)$ بحيث

$$at^2 + bt + c$$

نهايات الدالة الأسية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

سلسلة تمارين متنوعة للتدرب على خواص الدالة الأسية

التمرين الأول: بسط العبارات التالية:

$$\begin{aligned} & \boxed{1} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} \quad \boxed{2} \frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x} \quad \boxed{3} (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \quad \boxed{4} (e^x)^3 e^{-2x} \\ & \boxed{5} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \quad \boxed{6} \frac{e^{2x+1}}{e^{-x+1}} \quad \boxed{7} e^{-x} - e^{-2x} \quad \boxed{8} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

التمرين الثاني: أدرس إشارة العبارات التالية

$$\begin{aligned} & \boxed{1} 2e^{x+1} + 2 \quad \boxed{2} -2e^{x+1} - 2 \quad \boxed{3} \frac{1}{2}e^{2x-1} - 2 \quad \boxed{4} e^{2x} - 4 \\ & \boxed{5} -4e^{x+1} + 12 \quad \boxed{6} e^{2x} + e^x - 6 \quad \boxed{7} e^{2x} - 7e^x + 12 \quad \boxed{8} e^{2x} + 5e^x + 6 \\ & \boxed{9} (2x - 1)e^{-2x} \quad \boxed{10} -4e^{-2x} + (2x - 2)e^{-2x} \quad \boxed{11} e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} \quad \boxed{12} \frac{2e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}} \end{aligned}$$

التمرين الثالث :

أحسب نهايات الدالة f من أجل : $x \mapsto +\infty$

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 5x^3 + 2}{x^3}, f(x) = e^{2x} - 4x, f(x) = \frac{e^{x^3}}{x^3}, f(x) = e^{-x+1}, f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$$

$$f(x) = xe^{-5x}, f(x) = \frac{e^{x-2}}{x}$$

أحسب نهايات الدالة f من أجل $x \mapsto 0$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}, f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2}, f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{xe^x}, f(x) = \frac{-e^{-x} + 1}{x^2 - x}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{4x^2 + 6x}$$

أحسب نهايات الدوال التالية عند $+\infty; -\infty$

$$\begin{aligned} & \boxed{1} e^x + x + 1 \quad \boxed{2} e^x - x - 4 \quad \boxed{3} (x - 1)e^x + x + 2 \quad \boxed{4} (x - 1)e^{-x} + x - 3 \\ & \boxed{5} \frac{-e^x + 3}{e^x + 2} \quad \boxed{6} \frac{e^x + x - 1}{4x} \quad \boxed{7} e^{2x} - e^x + 2 \quad \boxed{8} \frac{x^3}{e^{-x} - 1} \quad \boxed{9} e^{2x} - e^x \quad \boxed{10} xe^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

التمرين الرابع : أدرس تغيرات الدوال التالية

$$D_f = \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad (3, D_f = \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^2 e^{-x}) \quad (2, D_f = \mathbb{R}, f(x) = 2 + (x - 1)e^{-x}) \quad (1$$

$$D_f = \mathbb{R}^*, f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - x \quad (6, D_f = \mathbb{R}^*, f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}) \quad (5, D_f = \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^x - e \quad (4$$

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = 2e^x - x^2 - x \quad (8, D_f = \mathbb{R}, f(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}) \quad (7$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \quad (10, D_f = \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}) \quad (9$$

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x} \quad (13, D_f = \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}) \quad (12, D_f = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-2}{e^x - 2x}) \quad (11$$

$$D_f = \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)} \quad (15, D_f = \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)(1 + 2e^{-x})) \quad (14$$

التمرين الخامس : f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

- 1/ أدرس تغيرات الدالة f بين 2 / بين أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة
- 3/ بين أن $A(0;1)$ مركز تناظر ثم أرسم (C_f)

4/ g دالة عددية حيث: $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$ / أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$

ب/ استنتج رسم (C_g) من رسم (C_f)

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-3)|e^x - 1| = 2e^x$

التمرين السادس :

I. لتكن g دالة عددية مُعرّفة على $]-2, +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+2)e^x$.

- 1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α بحيث $-0,5 < \alpha < -0,4$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

تربينات من بكالوريات تجريبية سابقة للأستاذ زايدي علاء الدين

التمرين الأول : لتكن الدالة f المعرفة على بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a و b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

1- عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة

$A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها

$x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- m وسيط حقيقي؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

I. **التمرين الثاني :** g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\ell^{-x}$$

1) أدرس تغيرات الدالة g مشكلا جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,35 < \alpha < 0,36$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\ell^{-x}$ و (C_f)

منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $(2cm)$.

1. أدرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها

2. بين أن: $f(\alpha) = \alpha(1 + 2\ell^{-\alpha})$ ، ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

3. استنتج معادلة للمستقيم (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس الوضع النسبي لهما.

4. أنشئ كلا من: (Δ) و (C_f) ، ثم عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m

بحيث تقبل المعادلة: $0 = (x^2 + 2)\ell^{-x} - m - 1$ حلا وحيد موجب.

التمرين الثالث: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x) = xe^{-x} - 1$$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x ، المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = (xe^{-x} - 1)^2 \quad (C_f)$$

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

(1) أ- أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ وأن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

ماذا تستنتج ؟

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = 2g(x)g'(x)$ ، ثم

استنتج إشارة $f'(x)$.

ب- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(4) أرسم: (T) و (C_f) .

التمرين الرابع :

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = (ax + b)e^{-x} + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية.

المنحنى (C_g) يمر من النقطتين $A(-2; 2)$

، $O(0; 0)$ و يقبل في النقطة $O(0; 0)$

مماسا (T) يمر من النقطة $B(-2; -2)$.

المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مواز لحامل

محور الفواصل معادلته: $y = 2$ بجوار $+\infty$.

(1) بقراءة بيانية عين كل من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ،

$$g(0), g(-2), g'(-1), g'(0)$$

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

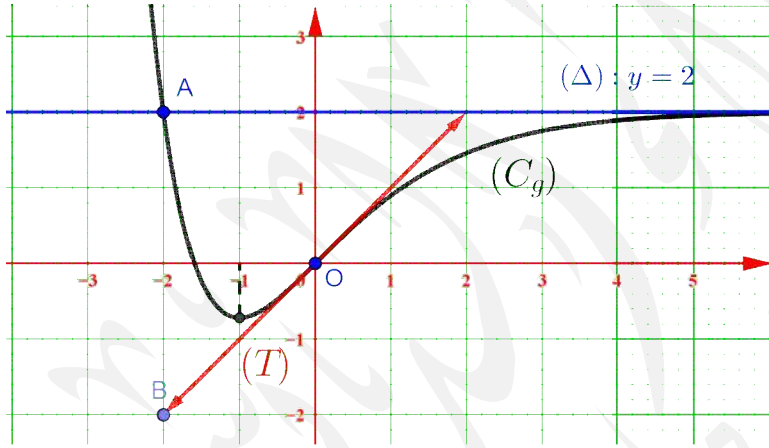
(3) أحسب عبارة $g'(x)$ بدلالة كل من العددين الحقيقيين a و b .

(4) باستعمال المعطيات السابقة عين كل من الأعداد الحقيقية a, b و c ثم

استنتج عبارة $g(x)$.

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$g(x) = mx \quad x \text{ التالية:}$$



التمرين الخامس: (07 نقاط)

II. لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2 - (2x + 1)e^{2x}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,1 < \alpha < 0,3$ ، ثم

استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

III. لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x - 1 - xe^{2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

(1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

(2) أثبت أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

(4) بين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{4\alpha^2}{2\alpha + 1}$ ، جد حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ) .

(5) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيث $xe^{2x} + 1 + m = 0$

IV. لتكن h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = |f(x)|$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

• اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f)

• أنشئ (C_h)

التمرين السادس

I نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $[0; +\infty[$ ، و عيّن نهاية g عند $+\infty$.

(2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[0; +\infty[$.

ب) تحقق أن: $1,14 < \alpha < 1,15$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty[$.

II نعرّف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، و ليكن

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x + 1) \times u(x)}{xe^x + 1}$ ،

حيث: $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة u على $[0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $u(x)$.

ج) استنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) والمنحني (C_f) ، الوحدة: 4cm.

هـ) ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$\frac{e^m - 1}{me^m + 1} - \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = 0$$

التمرين السابع: (07 نقاط)

I نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $[0; +\infty[$ ، و عيّن نهاية g عند $+\infty$.

(2) (أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]0; +\infty[$.

(ب) تحقق أن: $1,14 < \alpha < 1,15$.

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $].0; +\infty[$.

(II) نعرّف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، وليكن

(C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

(ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

(ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(ج) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصر العدد $f(\alpha)$.

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) (أ) تحقق أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$

حيث: $u(x) = e^x - xe^x - 1$

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة u على $[0; +\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $u(x)$.

(ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(د) أرسم كلا من (T) والمنحني (C_f) ، الوحدة : $4cm$.

التمرير الثامن :

الجزء الأول:

لتكن g دالةً عدديّةً معرفّةً على $\mathbb{R}$ و تُحقّق العلاقة

$$.g(x) - 2g(1 - x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (إرشاد: ضع $t = x$ تارةً و $t = 1 - x$ تارةً أخرى)

(2) أدرُس تَغْيِرات الدَّالَّةِ g ثُمَّ شَكْل جَدُول تَغْيِراتِها.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = 1 - g(-x)$.

(4) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث

$$.1,84 < \beta < 1,85 \text{ , } -1,15 < \alpha < -1,14$$

(5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x .

الجزء الثاني:

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها

البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

(1) أُحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسيًا النتائج.

(2) (أ) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f'(x) = \frac{e^x \times h(x)}{[1 + g(x)]^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أَحْسِبْ $f(0)$ ثُمَّ ارْسُمْ (C_f) .

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ وَالْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي هَدَانَا لِهَذَا وَمَا كُنَّا لِنَشْكُرَهُ إِلَّا بِهِ إِنَّ رَبَّنَا لَغَفُورٌ رَحِيمٌ

نَازِیْدِیْ عَلَیْهِ السَّلَامُ

التصحيح النموذجي لبعض تمارينات السلسلة

التمرين الأول صفحة 03

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$

مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

$$f(0) = -3 \text{ وهذا يعني } c = -3$$

ولدينا

$$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ ومنه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ ومنه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0 \text{ نجد } x = 2t$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة: $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من

إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 ومنه f متناقصة على

المجالين $[-1; 3]$ متزايدة على المجال $[3; +\infty[$ و $]-\infty; -1]$

و شكل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

3- كتابة معادلة (T) مماس المنحنى عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة

$$\text{المماس هي } y = 3x - 3$$

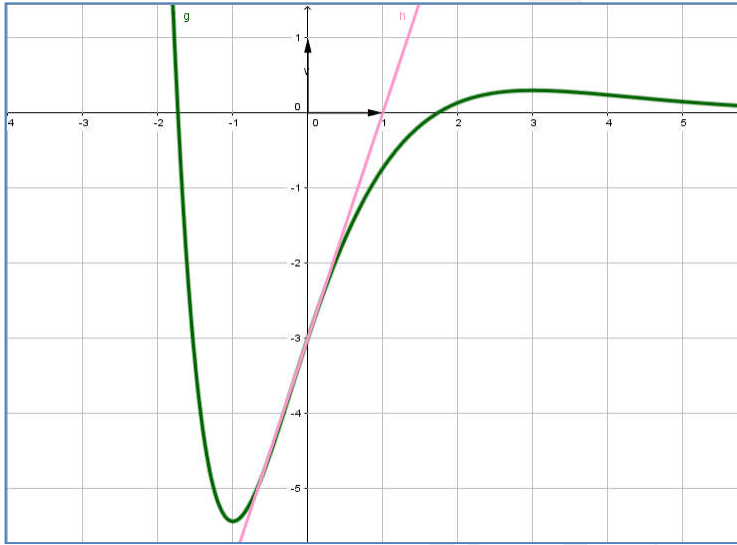
تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$$f(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - 3 = 0. \text{ أي أن } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \text{ نقطتي التقاطع}$$

$$\text{هما } B(\sqrt{3}; 0) \text{ و } C(-\sqrt{3}; 0)$$

4- رسم (T) و

$$(C_f)$$



5- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^2 - 3 + me^x = 0$$

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ

$$-m = f(x)$$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$$y = -m$$

المنافسة

لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول.

لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3 < -m < -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم والأخر سالب.

لما $-3 > -m \geq 0$ أي أن $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة.

لما $0 > -m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان وحل سالب.

لما $-\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $\frac{6}{e^3} > -m$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

تصحيح التمرين الثامن

الجزء الأول:

(1) من أجل $t = x$ يكون لدينا $g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$...

من أجل $t = 1-x$ يكون لدينا $g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t$... (2) بضرب المعادلة (2) في 2 والجمع مع المعادلة (1) طرفاً لطرف نجد أن

$g(t) = e^t - t - 1$ ، إذن الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = e^x - x - 1$.

(2) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty, 0]$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

تغيرات الدالة g موضحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $h'(x) = e^{-x} - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-

الدالة h متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$ ومتزايدة تماماً على $]-\infty, 0]$.

(i) الدالتان $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وعليه تكون الدالة

$$f(x) = \frac{e^x \times h(x)}{[e^x - x]^2}$$

قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)$.

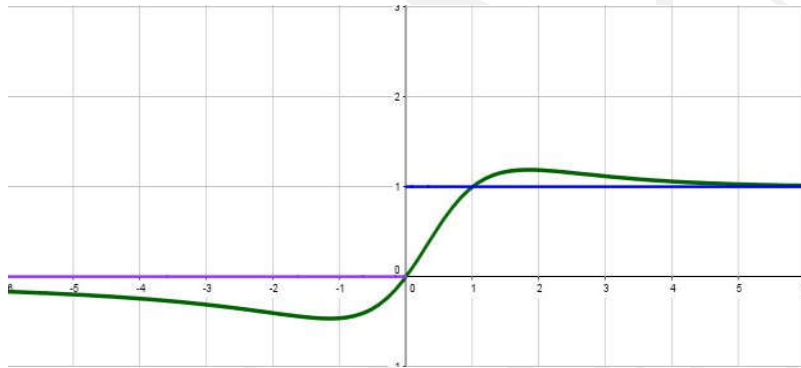
(ب) بما أن $\frac{e^x}{[e^x - x]^2} > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة

$h(x)$.

الدالة f متناقصة تماماً على $[\beta, +\infty[$ و متزايدة تماماً على $]-\infty, \alpha]$ و جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1	

(1) لدينا $f(0) = 0$ و (C_f) موضح في الرسم المرفق



بالتعاون مع الأستاذ المساعد الدكتور / محمد جعفر /

الأستاذ المساعد الدكتور / محمد جعفر /

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ ، وتغيرت الدالة h موضحة في

الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(4) الدالة h مستمرة ورتيبة تماماً على كل مجال من المجالين $]-1,15; -1,14[$ و

$1,84; 1,85[$ ولدينا $h(-1,15) \times h(-1,14) < 0$ و $h(1,84) \times h(1,85) < 0$

تقبل حلين α و β حيث $-1,15 < \alpha < -1,14$ و $1,84 < \beta < 1,85$.

(5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ موضحتان في الجدولين

x	$-\infty$	α		β	1
$h(x)$	-	0	+	0	-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

الجزء الثاني:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ومنه

المستقيمان $(\Delta): y = 1$ و $(\Delta'): y = 0$ مقاربان أفقيان لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.