

Bac²⁰²¹

من اعداد الأستاذ شعبان أسامة



مجلة 5min Maths



الأعداد المركبة Complex Number

تمارين أجنبية

تطبيقات

ملخص شامل

بكالوريات

تمارين محلولة

شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق

Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تواصلنا - 0775737163
www.dzexams.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اليك أمها الطالب " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور الأعداد المركبة

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,
في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

الأستاذ شعبةان أسامة



أهدي هذا العمل المتواضع لعائتي الكريمة أولا



و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

”

شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد و الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق على تعاونهم معي
في انجاز هذا العمل المتواضع

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة
بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس + تطبيقات

2. تمارين محلولة

3. تمارين البكالوريا محلولة شعبة علوم

4. تمارين البكالوريا شعبة تقني رياضي

ابراهيم دي موافر، ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م. « ابراهيم دي موافر » من أصدقاء « اسحاق نيوتن »، حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « مبدأ الفرص ». في سنة 1707م اكتشف « ابراهيم دي موافر » دستور الشهير:

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$


Abraham de Moivre

1.

ملخص الدرس

أمثلة تطبيقية محلولة

تعريف

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$

ملاحظات و ترميز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Re } z$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Im } z$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت).
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.
- أي $z = 0$ يعني $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

مثال: $z = 1 + 2i$ و $z = -3i$

تساوي عددين مركبين

يكون عدنان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$: $z = z'$ معناه ($x = x'$ و $y = y'$)

التمثيل الهندسي لعدد مركب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

- إلى كل عدد مركب $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ ، $y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$) نرفق النقطة M

إحداثياتها x, y ، النقطة

M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .

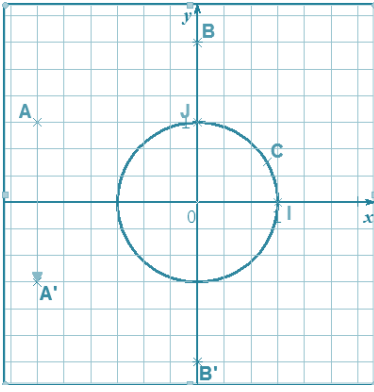
- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي، لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور الترتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور الترتيب
- المستوي يسمى المستوي المركب.

تطبيق 1:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

لتكن النقط A, B, C من المستوي التي لواحقها $-2 + i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ على الترتيب.



- (1) أنشئ النقاط A, B, C في المعلم $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.
- (2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B' .
- (3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A' .

حل التطبيق 1:

(1) صورة العدد $-2+i$ إذن $A -2;1$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B 0;2$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ إذن $C \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

(2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$.

و منه $B' 0;-2$ و لاحقة B' هي $-2i$.

(3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A'

و لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A' -2;-1$

و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'} 0;-2$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$.

مرافق عدد مركب.

$z = x + iy$ حيث $(x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R})$. العدد المركب $x - iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة: $\bullet 2+8i = 2-8i$ ، $\bullet 3-11i = 3+11i$ ، $\bullet 4i = -4i$ ، $\bullet -2 = -2$.

التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

$z = x + iy$ عدد مركب حيث

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M'

لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M'

متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

مجموع وجداء عددين مركبين.

$z = x + iy$ حيث $(x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R})$ و $z' = x' + iy'$ عدد مركب حيث

$(x' \in \mathbb{R} \text{ و } y' \in \mathbb{R})$.

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z + z' = x + x' + i(y + y')$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة: $\bullet 2-i + -7+4i = 2-7 + i -1+4 = -5+3i$.

$\bullet 3-2i -4-7i = -12-21i+8i+14i^2 = -26-13i$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

$z = x + iy$ عدد مركب و $z' = x' + iy'$ عدد مركب .

المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث: $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$.

$\vec{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\vec{OM}$ و $\vec{OM'}$.

ملاحظات: • إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ،

فإن $z + z'$ هو لاحقة $\vec{u} + \vec{v}$.

• إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda \vec{u}$.

• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

□ تطبيق 2:

n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) أكتب على الشكل الجبري كل من: $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$.

(2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

حل التطبيق 2:

$$i^8 = 1, i^7 = -i, i^6 = -1, i^5 = i^4 \times i = i, i^4 = i^2 \times i^2 = 1, i^3 = i^2 \times i = -i$$

(2) نلاحظ أن $i^4 = 1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k} = 1$.

$$\text{كذلك : } i^{4k+1} = i^{4k} \times i = i$$

$$i^{4k+2} = i^{4k} \times i^2 = -1$$

$$i^{4k+3} = i^{4k} \times i^3 = -i$$

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$.

□ تطبيق 3:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

$$(1) z_1 = 1 - i^4, (2) z_2 = -2 + i\sqrt{3} - 3 - 5i + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + 4i\right), (3) z_3 = -7 - 2i - 6 - 4i^2$$

حل التطبيق 3:

$$(1) z_1 = 1 - i^4 \text{ و منه } z_1 = 1 - i^2 - 1 - i^2 = -2i - 2i \text{ إذن } z_1 = 4i^2 = -4$$

$$z_2 = -2 + i\sqrt{3} - 3 - 5i + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + 4i\right)$$

$$\text{و منه } z_2 = -6 + 3i\sqrt{3} + 10i - 5i^2\sqrt{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}i + 4i - 2i^2$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} + 5\sqrt{3} + \left(\frac{53}{4} + 3\sqrt{3}\right)i$$

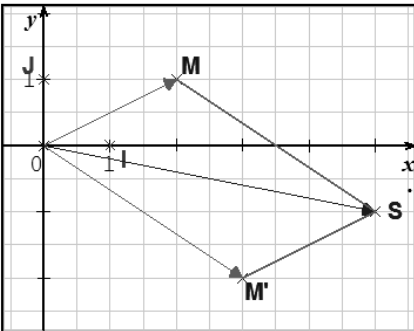
$$(3) z_3 = -7 - 2i - 6 - 4i^2 \text{ و منه}$$

$$z_3 = -7 - 2i - 36 - 48i + 16i^2 = -7 - 2i - 20 - 48i$$

$$\text{إذن } z_3 = -140 + 336i - 40i + 96i^2 = -236 + 296i$$

□ تطبيق 4:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :



$$z_3 = \frac{3+2i}{1+i-6-5i} \quad (3) \quad , \quad z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i} \quad (2) \quad , \quad z_1 = \frac{5}{1-2i} \quad (1)$$

حل التطبيق 4:

$$(1) \quad z_1 = \frac{5}{1-2i} \quad \text{بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:}$$

$$z_1 = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5(1+2i)}{1-4i^2} = \frac{5(1+2i)}{1+4} = \frac{5(1+2i)}{5} = 1+2i \quad \text{أي } z_1 = \frac{5(1+2i)}{1-2i}$$

$$(2) \quad z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i} \quad \text{بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:}$$

$$z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i} = \frac{-7+4i}{4-7i} \cdot \frac{4+7i}{4+7i} = \frac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49} = \frac{-56-33i}{65} = -\frac{56}{65} - \frac{33}{65}i \quad \text{أي } z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i}$$

$$(3) \quad z_3 = \frac{3+2i}{1+i-6-5i} \quad \text{نقوم أولاً بكتابة المقام على الشكل الجبري:}$$

$$z_3 = \frac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2} = \frac{3+2i}{-1-11i}$$

$$z_3 = \frac{-25+31i}{122} = -\frac{25}{122} + \frac{31}{122}i \quad \text{أي } z_3 = \frac{3+2i}{-1-11i} = \frac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$$

خواص مرافق عدد مركب.

$$\begin{aligned} & \bullet \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z \quad \bullet \quad \overline{\bar{z}} = z \\ & \bullet \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z \quad \bullet \quad z \bar{z} = \operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2 \\ & \bullet \quad \overline{z'} = \bar{z} \quad \text{عدد مركب و مرافقه } z' \quad \bullet \quad \overline{z'} = \bar{z} \quad \text{عدد مركب و مرافقه } z' \\ & \bullet \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \bullet \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad \bullet \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad n \in \mathbb{N}^* \\ & \bullet \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad \bullet \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{مع } z \neq 0 \end{aligned}$$

تطبيق 5:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين:

$$(1) \quad z - 26 = 0 \quad z - 3i$$

$$(2) \quad z - 21i = -14 + i\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

حل التطبيق 5:

$$(1) \quad z - 26 = 0 \quad z - 3i \quad \text{أي } z = 26 \quad \text{و بالتالي } z = \frac{26}{2-3i}$$

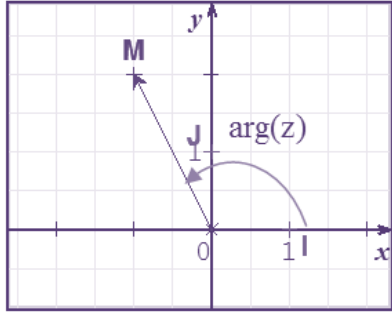
$$z = \frac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{26(2+3i)}{4+9} = \frac{26(2+3i)}{13} = 4+6i \quad \text{بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على}$$

$$S = 4+6i \quad \text{لتكن } S \text{ مجموعة الحلول}$$

$$(2) \quad z - 21i = -14 + i\frac{\sqrt{3}}{2}z \quad \text{نضرب الطرفين في 2 نحصل على } 2z - 42i = -28 + i\sqrt{3}z$$

$$2z - i\sqrt{3}z = -28 + 42i \quad \text{أي } z(2-i\sqrt{3}) = -28 + 42i$$

$$z = \frac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}} \quad \text{وبالتالي}$$



$$z = \frac{-28 + 42i}{2 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{2 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} \text{ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على}$$

$$z = \frac{-28 + 42i}{2 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{2 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{-56 - 28i + 84i - 42}{4 - 3} = \frac{-56 + 56i - 42}{1} = -98 + 56i$$

$$S' = \{-98 + 56i\} \text{ لتكن } S' \text{ مجموعة الحلول}$$

□ تطبيق 6:

ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعروف كما يلي :

$$P(z) = z^3 + z^2 - 2$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

(2) احسب $P(1-i)$ و $P(-1-i)$.

(3) استنتج جذرا آخر لـ $P(z)$.

حل التطبيق 6:

$$(1) \overline{P(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = P(\overline{z})$$

$$\text{بتطبيق خاصية المجموع .}$$

$$\overline{P(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = P(\overline{z})$$

$$\text{بتطبيق خاصية الأس .}$$

$$\text{إذن } \overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

$$(2) P(1-i) = 0$$

$$P(-1-i) = (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2 = -1 - i^3 + -1 - i^2 - 2 = -1 - i + -1 - 1 - 2 = -5 - i$$

$$P(-1-i) = 2i - 1 - i + 2i - 2 = 0$$

$$(3) P(-1-i) = 0 \text{ و } P(-1-i) = 0 \text{ وبالتالي } \overline{P(-1-i)} = 0 \text{ أي } P(-1+i) = 0$$

$$\text{إذن } -1+i \text{ جذر لـ } P(z)$$

طويلة عدد مركب.

$z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان) حيث :

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\bullet |2+8i| = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} \quad \bullet |-4-3i| = \sqrt{16+9} = 5 \quad \bullet |-7i| = \sqrt{49} = 7$$

ملاحظات : • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

$$\bullet z = 0 \text{ يعني } |z| = 0 \quad \bullet |z|^2 = x^2 + y^2$$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

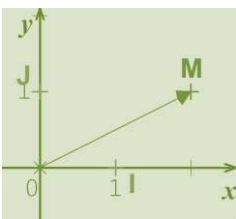
$z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

خواص طويلة عدد مركب.

خواص : من أجل كل عددين مركبين z و z' .

$$\bullet |\overline{z}| = |z| \quad \bullet |-z| = |z|$$

$$\bullet |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \bullet \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ مع } z' \neq 0$$



$$\bullet \bullet |z^n| = |z|^n \bullet |z + z'| \leq |z| + |z'| \bullet \text{ (المتباينة الثلاثية) }.$$

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$.

□ تطبيق 7:

عين طولية العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

$$\bullet z = \left(\frac{1-i^6}{-8-6i^2} \right)^3 \quad (4) \quad , \quad z = -3+4i^4 \quad (3) \quad , \quad z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \quad (2) \quad , \quad z = 2+i \quad -5+3i \quad (1)$$

حل التطبيق 7:

$$(1) \quad z = 2+i \quad -5+3i$$

$$\bullet |z| = \sqrt{5} \times \sqrt{34} = \sqrt{170} \text{ أي } |z| = |2+i \quad -5+3i| = |2+i| |-5+3i|$$

$$z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \quad (2)$$

$$\bullet |z| = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}} = \frac{5}{2} \text{ أي } |z| = \left| \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \right| = \frac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$$

$$z = -3+4i^4 \quad (3)$$

$$\bullet |z| = \sqrt{9+16}^4 = 5^4 = 625 \text{ أي } |z| = |-3+4i^4| = |-3+4i|^4$$

$$z = \left(\frac{1-i^6}{-8-6i^2} \right)^3 \quad (4)$$

$$\bullet |z| = \left(\frac{8}{100} \right)^3 = \frac{8}{15625} \text{ أي } |z| = \left| \left(\frac{1-i^6}{-8-6i^2} \right)^3 \right| = \left(\left| \frac{1-i^6}{-8-6i^2} \right| \right)^3 = \left(\frac{|1-i^6|}{|-8-6i^2|} \right)^3$$

🔗 عهددة عدد مركب غير معدوم.

$z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان) .

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg z$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}$.

🔗 الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

$z = r \cos \theta + i \sin \theta$ يكتب على الشكل z .

$r = |z|$ و $\theta = \arg z$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .

ملاحظة: • إذا كان $z = x + iy$ ، $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

خاصية:

* يكون عدنان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا فقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

* إذا كان $z = \lambda \cos \theta + i \sin \theta$ و كان $\lambda > 0$ فإن $\lambda = |z|$ و $\theta = \arg z$.

🔗 خواص عهددة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

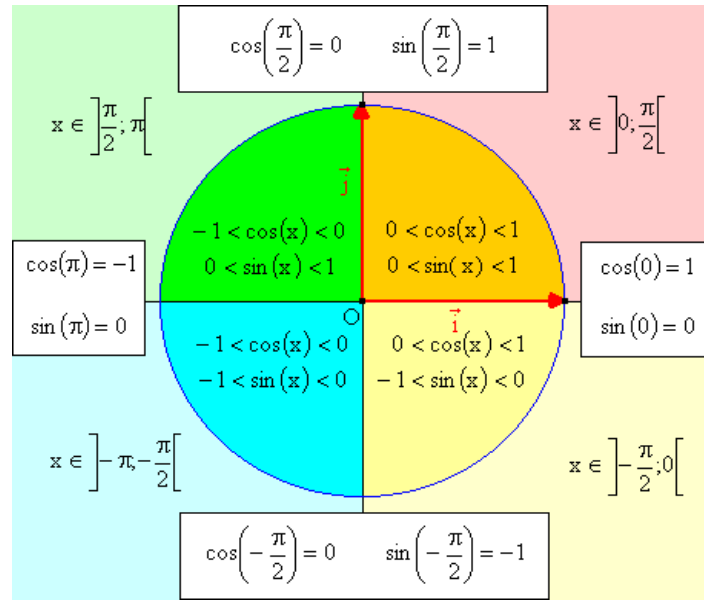
• $\arg z \cdot z' = \arg z + \arg z'$

• $\arg \left(\frac{z}{z'} \right) = \arg z - \arg z'$

$n \in \mathbb{N}^*$ • $\arg z^n = n \arg z$

دستور موافر: $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

معارف سابقة



تطبيق 8:

عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين:

(1) $z = 1 + i$ (2) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

حل التطبيق 8:

(1) $z = 1 + i$. $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لـ

z .

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ

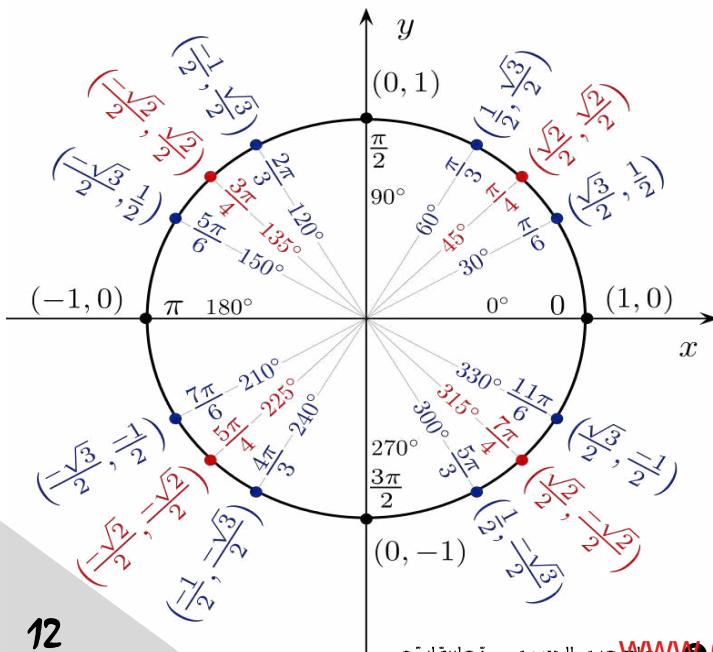
أي $z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

(2) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

ليكن θ عمدة لـ z . $|z| = |\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ و $\sin \theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



ومنه $z = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$ أي $z = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$

□ تطبيق 9:

ليكن العددين المركبان $Z_1 = 1+i$ و $Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$ ،
(1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري. (2) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

حل التطبيق 9:

(1) $Z_1 = 1+i$ و $Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$ ،

$Z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ ، $Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}+i-1+\sqrt{3}}{4}$

(2) $-1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$ ، $1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$Z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right)$

$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right) \right)$

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم.

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم : العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$.
هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

خواص: θ و θ' عدنان حقيقيان.

• $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ، • $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$ ،
• $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

أمثلة : $z_1 = 1+i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ،
 $z_1 = 1-i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

دستور هوافر

خواص: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له . من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $e^{i\theta n} = e^{in\theta}$.

□ تطبيق 10:

(1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسّي :

$z_0 = -7i$ ، $z_1 = -3-3i$ ، $z_2 = 1-i^8$ ، $z_3 = \sqrt{3}+i^6$

حل التطبيق 10:

$$\bullet z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad (1)$$

$$\bullet z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \text{ أي}$$

$$\bullet z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bullet z_1 = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2} \text{ أي}$$

$$\bullet z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\bullet z_2 = 5 \cdot 0 + i \cdot 5 = 5i \text{ أي}$$

$$\bullet z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_3 = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3} \text{ أي}$$

$$\bullet z_0 = -7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (2)$$

$$\bullet z_1 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bullet z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ أي}$$

$$\bullet z_2 = 1 - i^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8$$

$$\bullet z_2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = \left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8 = 16e^{-2i\pi} \text{ أي}$$

$$\bullet z_3 = \sqrt{3} + i^6 = \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6$$

$$\bullet z_3 = 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 64 \cos \pi + i \sin \pi \text{ أي}$$

$$\bullet z_3 = 64e^{i\pi} \text{ إذن}$$

المعادلات من الدرجة الثانية.

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و b و c أعداد مركبة و $a \neq 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ مميزها .}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \Delta = 0 \text{ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا } z = -\frac{b}{2a}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \Delta \neq 0 \text{ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :}$$

$$z'' = \frac{-b+\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z' = \frac{-b-\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لـ Δ .

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$a z^2 + b z + c = a z z' z - z''$$

مثال: • حلا المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$ هما $z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z'' = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ω عدد مركب. يسمى حلا المعادلة $z^2 = \omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

أمثلة: • الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

• الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران.

تطبيق 11:

عين الجذرين التربيعيين للعدد $z = -8 + 6i$

حل التطبيق 11:

ليكن $\omega = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ z . أي $z = \omega^2$.

$$\omega^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|z| = |-8 + 6i| = \sqrt{-8^2 + 6^2} = 10, \quad |\omega^2| = |\omega|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \quad \text{يعني } z = \omega^2$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 10 - x^2 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

أي $(x=1 \text{ و } y=3)$ أو $(x=-1 \text{ و } y=-3)$ لأن $xy > 0$

إذن $\omega = 1 + 3i$ أو $\omega = -1 - 3i$.

تطبيق 12:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z

$$z^2 + (3-2i)z + 5-5i = 0$$

حل التطبيق 12:

نحسب المميز: $\Delta = 3-2i^2 - 4(1-5i) = 3-2i^2 - 4 + 20i = -15 + 8i$

$$\Delta = 9 - 12i + 4i^2 - 20 + 20i = -15 + 8i$$

ليكن $\omega = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ .

$$\omega^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|\Delta| = |-15 + 8i| = \sqrt{-15^2 + 8^2} = 17, \quad |\omega^2| = |\omega|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \quad \text{يعني } z = \omega^2$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 16 \\ xy = 4 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 17 - x^2 \\ xy = 4 \end{cases} \text{ أي}$$

أي ($x=1$ و $y=4$) أو ($x=-1$ و $y=-4$) لأن $xy > 0$

إذن $\omega = 1+4i$ أو $\omega = -1-4i$.

نضع $\Delta = 1+4i^2$.

$$z'' = \frac{-3+2i+1+4i}{2} = -1+3i \quad \text{و} \quad z' = \frac{-3+2i-1-4i}{2} = -2-i$$

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$

f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z' = az + b \text{ مع } a \in \mathbb{R}^* \text{ أو } a \in \mathbb{C} \text{ و } |a| = 1. \text{ ونكتب } M' = f(M) \text{ يعني } z' = az + b.$$

1. الحالة الأولى $a = 1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = z + b$

(b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b .

□ تطبيق 13:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

$t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} - 2; 1$

1. عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.

2. A النقطة التي لاحقتها $3 - i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

حل التطبيق 13:

(1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \text{ يعني } z' = z - 2 + i$$

$$(2) A = A' \text{ يعني } t_{\vec{u}}(A) = A \text{ و } z_{A'} = z_A - 2 + i \text{ منه } z_{A'} = 3 - i - 2 + i = 1$$

2. الحالة الثانية $a \in \mathbb{R}^* - 1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$

مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة

$$\frac{b}{1-a} \text{ ونسبته } a.$$

□ تطبيق 14:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

h التحاي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1 + 2i$ و نسبته 3.

1. عين العبارة المركبة للتحاي h .

2. B النقطة التي لاحقتها $-3 - 2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاي h .

حل التطبيق 14:

(1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاي h .

$$M' = h(M) \text{ يعني } z' = 3z + b \text{ بما أن النقطة } A \text{ هي مركز التحاي فإن } A = A' \text{ و منه } z_A = 3z_A + b$$

$$\text{أي } b = -1 + 2i - 3(-1 + 2i) = 2 - 4i \text{ و منه } z' = 3z + 2 - 4i \text{ إذن } z' = 3z + 2 - 4i$$

$$(2) h(B) = B' \text{ يعني } z_{B'} = 3z_B + 2 - 4i \text{ و منه } z_{B'} = 3(-3 - 2i) + 2 - 4i = -7 - 10i$$

3. الحالة الثالثة $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$

مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة

$\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

تطبيق 15:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته θ حيث $\frac{\pi}{3}$ أحد أقياسها .

1. عين العبارة المركبة للدوران r .

2. B النقطة التي لاحتقتها $1 - i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r .

حل التطبيق 15:

(1) لتكن M نقطة من المستوي لاحتقتها z و M' لاحتقتها z' صورتها بالدوران r .

$r M = M'$ يعني $z' = az + b$ حيث $|a| = 1$ و $\arg a = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

و منه $a = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h A = A$ و منه $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A + b$

نعلم أن $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و منه $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + b = e^{i\frac{5\pi}{3}} + b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + b$ و $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$

إذن $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$ أي $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1$

(2) $r B = B'$ يعني $z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B - 1$ أي $z_{B'} = 1$

التشابه المباشر

تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات وعلى الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M, N, P, Q من المستوي و $M \neq N$ ، صورها M', N', P', Q' على الترتيب فإن:

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN} \text{ و } (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$$

خاصية: إذا كان S تشابهها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k .

العدد k يسمى نسبة التشابه S .

حالة خاصة

إذا كان $k = 1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي S . يحافظ على الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$.

و منه الزاوية $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N

هذه الزاوية $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \neq 0$ و b عدنان مركبان و $a \neq 0$.

خاصية: a و b عدنان مركبان حيث $a \neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

ملاحظة:

حالات خاصة:

- (1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = z + b$ و هو من الشكل $z' = az + b$ مع $a = 1$ ، نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1.
- (2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1، نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.
- (3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي، طويلته تساوي 1، زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$.

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين وزاويته مجموع الزاويتين.

التحليل القانوني للتشابه المباشر

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k ($k \in \mathbb{R}_+^*$) و زاويته θ ($\theta \in \mathbb{R}$).

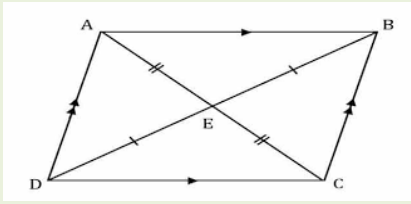
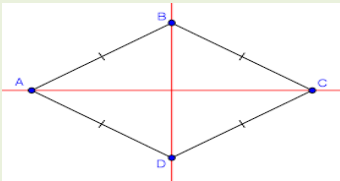
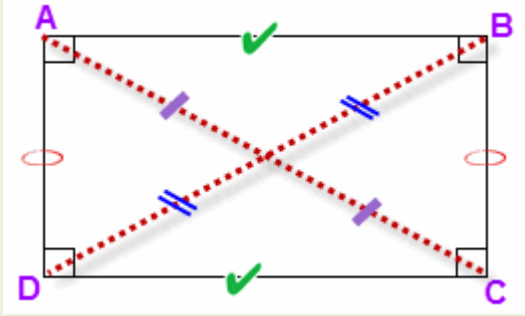
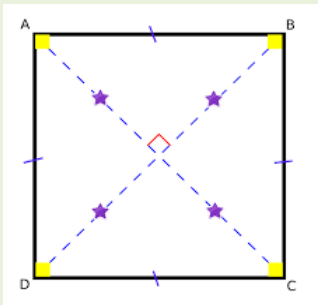
- إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$ التشابه S انسحاب.
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها ω و $S = h \circ r = r \circ h$ حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

خاصية: إذا كانت A, B, A', B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

نتائج:

- S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a = \frac{\overline{z_{B'}} - \overline{z_{A'}}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} = 1$.
- إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\frac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. مركزه النقطة الصامدة.

أهم الطرق للتعرف على طبيعة رباعي

بالأعداد المركبة	إذا كان :	يكون الرباعي ABCD
أي: $z_D - z_A = z_C - z_B$ أي: $z_A + z_C = z_B + z_D$	1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ أو: للقطرين $[BD]$, $[AC]$ نفس المنتصف .	متوازي الأضلاع 
أي: $z_D - z_A = z_C - z_B$ و $z_B - z_A = z_C - z_B$ أي: $z_A + z_C = z_B + z_D$ و العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ تخيلي صرف .	1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AB = BC$ أو: 2. القطران $[BD]$, $[AC]$ متناصفان ومتعامدان	معين 
أي: $z_D - z_A = z_C - z_B$ و العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ تخيلي صرف . أي: $z_A + z_C = z_B + z_D$ و $z_C - z_A = z_D - z_B$	1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B . 2. القطران $[BD]$, $[AC]$ متناصفان ومتقايسان .	مستطيل 
أي: $z_D - z_A = z_C - z_B$ والعدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \pm 1$ أي: $z_A + z_C = z_B + z_D$ والعدد: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \pm 1$	1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين . 2. القطران $[BD]$, $[AC]$ متناصفان ومتقايسان ومتعامدان .	مربع 

--	--	--

 تنبيه : توجد طرق أخرى . إنما اخترنا الأكثر استعمالا .

أسئلة حول مجموعة النقط

نفرض في كل ما يلي المستوي مركب و مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\vec{u}, \vec{v})$.
 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات الآتية : (كل سؤال مستقل عن الآخر) .

$z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}, (\theta \in \mathbb{R}) .(26)$	$ z = 3 .(1)$
$z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}, (k \in \mathbb{R}^+) .(27)$	$ z - 1 + 2i = 5 .(2)$
$z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}, (k \leq 0) .(28)$	$ \bar{z} = 4 .(3)$
$z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}, (k \in \mathbb{R}) .(29)$	$ \bar{z} + 2 - 3i = 2 .(4)$
$z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}, (k \in \mathbb{R}^*) .(30)$	$ z - 2 + i = z + 1 - 2i .(5)$
$\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \text{ عدد صحيح}) .(31)$	$ \bar{z} - 2 + i = \bar{z} + 1 - 2i .(6)$
$\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \text{ عدد صحيح}) .(32)$	$z \times \bar{z} = 3 .(7)$
$\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \text{ عدد صحيح}) .(33)$	$(z - 2)(\bar{z} - 2) = 4 .(8)$
$\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, .(34)$	$z + \bar{z} = 0 .(9)$
$\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + k\pi, .(35)$	$z - \bar{z} = 0 .(10)$
$\arg(\bar{z} + 2 - 3i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi .(36)$	$\operatorname{Re}(z) = 4 .(11)$
$\text{العدد } \left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right) \text{ حقيقي غير معدوم} .(37)$	$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 .(12)$
$\text{العدد } \left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right) \text{ حقيقي سالب تماما} .(38)$	$\operatorname{Re}(z^2) = 0 .(13)$
$\text{العدد } \left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right) \text{ حقيقي موجب تماما} .(39)$	$\operatorname{Im}(z^2) = 0 .(14)$
$\text{العدد } \left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right) \text{ تخيلي صرف} .(40)$	$ z \leq 2 .(15)$
$. (41) \text{ بالك 2015}$	$ z \geq 2 .(16)$
$z = k(1 + i)e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ مع } \mathbb{R}^+ .$	$3 \leq z \leq 4 .(17)$
$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi .(42)$	$\left \frac{z-2+i}{z}\right = 1 .(18)$
$\arg(-z) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi .(43)$	$ z - 1 < z + 1 - 2i .(19)$
$\arg(z) - \arg(-\bar{z}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi .(44)$	$ z - 2 = \bar{z} + i .(20)$
$\bar{z} = 1 - 2i + k(1 - i)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ مع } (k > 0) .(45)$	$ iz + 3 = z + 4 + i .(21)$
$z = 2 - ke^{i\frac{\pi}{6}} \text{ مع } (k > 0) .(46)$	$ 2\bar{z} + 1 = 1 .(22)$
	$ z ^2 = z + \bar{z} .(23)$
	$\left \frac{iz+1+i}{z+2}\right = 1 .(24)$
	$ z - i = 1 - z .(25)$

تذكير

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس :

1. كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax + by + c = 0$. حيث a, b عدداً غير معدومين معا .
2. كل دائرة لها معادلة من الشكل : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. النقطة $(a; b)$ هي المركز و R هو نصف القطر .

رقم	الخاصية	التفسير الهندسي	مجموعة النقط M
1	$ z = 3$	$OM = 3$.	هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 3 .
2	$ z - 1 + 2i = 5$.	$AM = 5$ ، مع $A(1; -2)$.	هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 5 .
3	$ \bar{z} = 4$ أي : $ z = 4$.	$OM = 4$.	هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4 .
4	$ \bar{z} + 2 - 3i = 2$ أي : $ z - (-2 - 3i) = 2$.	$BM = 2$ ، مع $B(-2; -3)$.	هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2 .
5	$ z - 2 + i = z + 1 - 2i $	$AM = BM$ مع $\begin{cases} A(2; -1) \\ B(-1; 2) \end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
6	$ \bar{z} - 2 + i = \bar{z} + 1 - 2i $ أي : $ z - 2 - i = z + 1 + 2i $	$AM = BM$ مع $\begin{cases} A(2; 1) \\ B(-1; -2) \end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
7	$z \times \bar{z} = 3$ أي : $ z ^2 = 3$ أي : $ z = \sqrt{3}$.	$OM = \sqrt{3}$.	هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3}$.
8	$(z - 2)(\bar{z} - 2) = 4$ أي : $ z - 2 ^2 = 4$ أي : $(z - 2)(\overline{z - 2}) = 4$ أي : $ z - 2 = 2$	$AM = 2$ ، مع $A(2; 0)$.	هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 .
9	$z + \bar{z} = 0$ أي : $2\operatorname{Re}(z) = 0$ أي : $\operatorname{Re}(z) = 0$	$M(x; y)$ هي صورة Z حيث : $x = 0$.	هي حامل محور الترتيب (yy') .
10	$z - \bar{z} = 0$ أي : $2\operatorname{Im}(z) = 0$ أي : $\operatorname{Im}(z) = 0$	$M(x; y)$ هي صورة Z حيث : $y = 0$.	هي حامل محور الفواصل (xx') .
11	$\operatorname{Re}(z) = 4$ (11)	$M(x; y)$ هي صورة Z حيث : $x = 4$.	هي المستقيم الموازي لحامل محور الترتيب ذو المعادلة : $x = 4$.
12	$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$	من أجل كل نقطة M من المستوي تكون إحداثيها متعاكستان .	هي المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ (المنصف الثاني) .

13	$\operatorname{Re}(z^2) = 0$ أي : $x^2 - y^2 = 0$ أي : $y = -x$ أو $y = x$	هي إتحاد المنصف الأول والمنصف الثاني .
14	$\operatorname{Im}(z^2) = 0$ أي : $x.y = 0$ أي : $y = 0$ أو $x = 0$	هي إتحاد حاملتي محوري الإحداثيات (الفواصل و الترتيب) .
15	$ z \leq 2$	هي القرص الذي مركزه O ونصف قطره 2 .
16	$ z \geq 2$	هي المستوي ما عدا القرص المفتوح الذي مركزه O ونصف قطره 2 .
17	$3 \leq z \leq 4$	هي الحلقة المحددة بين القرص الذي مركزه O ونصف قطره 3 والقرص الذي مركزه O ونصف قطره 4 .
18	$\left \frac{z-2+i}{z} \right = 1$ أي : $ z-2+i = z $	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم [OA] .
19	$ z-1 < z+1-2i $ أي : $ z-1 < z-(-1+2i) $	هي نصف المستوي المحدد بالمستقيم المحوري لقطعة المستقيم [AB] والذي يشمل A . حيث تكون M أقرب إلى A
20	$ z-2 = \bar{z}+i $ أي : $ z-2 = z-i $	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم [AB] .
21	$ iz+3 = z+4+i $ أي : $\left i \cdot \left(z + \frac{3}{i} \right) \right = z+4+i $ أي : $ z-3i = z+4+i $ أي : $ z-3i = z-(-4-i) $	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم [AB] .
22	$ 2\bar{z}+1 = 1$ أي :	هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

		$2. \left z + \frac{1}{2} \right = 1$ $\left z + \frac{1}{2} \right = \frac{1}{2}$	
هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها 1 .	هذه الأخيرة هي معادلة دائرة .	$ z ^2 = z + \bar{z}$ أي : $x^2 + y^2 = 2x$ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$ و منه : $(x-1)^2 + y^2 = 1$	23
هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.	مع $AM = BM$ مع $\begin{cases} A(1;-1) \\ B(2;0) \end{cases}$	$\left \frac{iz+1+i}{z+2} \right = 1$ أي : $ iz+1+i = z+2 $ أي : $\left i \cdot \left z + \frac{1}{i} + 1 \right \right = z+2 $ أي : $ z+1-i = z+2 $	24
هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.	مع $AM = BM$ مع $\begin{cases} A(0;1) \\ B(1;0) \end{cases}$	$ z-i = 1-z $ أي : $ z-i = z-1 $	25
هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 3	مع $AM = 3$ مع $A(1;2)$	$z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}$ أي : $z - z_A = 3e^{i\theta}$ ، و منه : $ z - z_A = 3$	26
(*) هي النقطة A . هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .	(*) $M = A$ مع $A(2;-1)$. (*) $(u, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا : $k \in \mathbb{R}^+$ أي نميز حالتين : (*) لما $k = 0$ يكون : $z = 2 - i$ أي : $z = z_A$ (*) لما $k > 0$ يكون : $z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ أي تصبح : $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{3}$ $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا : $k \leq 0$ أي نميز حالتين :	27

(*) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قياسها $\frac{4\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .	(*) $M = A$ مع $A(2; -1)$. $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ (*)	28 (*) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z = z_A$. (*) لما $k < 0$ يكون : $z = 2 - i - ke^{i(\pi + \frac{\pi}{3})}$ ، ومنه : $z - z_A = ke^{i\frac{4\pi}{3}}$ ، أي : $\arg(z - z_A) = \frac{4\pi}{3}$.
(*) هي النقطة A . (*) هي المستقيم المار بالنقطة A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .	(*) $M = A$ مع $A(2; -1)$. $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ {	29 $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k \in \mathbb{R}$ ، نميز 3 حالات : (*) لما $k=0$ أي : $z = z_A$. (*) $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{3}$ ، $k > 0$. (*) $\arg(z - z_A) = \frac{4\pi}{3}$ ، $k < 0$.
هي المستقيم المار بالنقطة A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .		30 $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k \in \mathbb{R}^*$ ، واضح أنه تكون حالتين فقط نستثني النقطة A .
هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء المبدأ O .	(*) $M \neq O$. $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (*)	31 $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (31) مع : $z \neq 0$.
هي المستقيم المار بـ O ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O . هي المستقيم المار بـ O ويشكل زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .	(*) $M \neq O$. $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ (*) (*) $M \neq O$. $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ (*)	32 $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ مع : $z \neq 0$. 33 $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ أي : $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ مع $z \neq 0$.

34	$\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $z \neq 1-2i$ أي : $z \neq z_A$.	$M \neq A (*)$ $(\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (*)$ هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء النقطة A .
35	$\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $z \neq 1-2i$ أي : $z \neq z_A$.	$M \neq A (*)$ $(\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi (*)$ هي المستقيم المار بـ A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .
36	لدينا : $\arg(\bar{z}+2-3i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أي : $\arg(z+2+3i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ مع $z \neq -2-3i$ أي : $z \neq z_A$.	$M \neq A (*)$ $(\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (*)$ هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل ، ما عدا النقطة A .
37	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي غير معدوم أي : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi$ و $\frac{z-1+2i}{z+i} \neq 0$	$M \neq B, M \neq A (*)$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ $(\vec{BM}, \vec{AM}) = k\pi (*)$ أي أن : النقطة $M; B, A$ في إستقامة . هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
38	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي سالب أي : $\frac{z-1+2i}{z+i} \neq 0$ و $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi + 2k\pi$	$M \neq B, M \neq A (*)$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ $(\vec{BM}, \vec{AM}) = \pi + 2k\pi (*)$ هي قطعة المستقيم $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B .
39	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي موجب أي : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 2k\pi$ و $\frac{z-1+2i}{z+i} \neq 0$	$M \neq B, M \neq A (*)$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ $(\vec{BM}, \vec{AM}) = 0 + 2k\pi (*)$ أي أن : M تكون خارج القطعة $[AB]$.
40	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ تخيلي صرف أي : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $\frac{z-1+2i}{z+i} \neq 0$	$M \neq B, M = A (*)$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ $(\vec{BM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi (*)$ أي : المثلث ABM قائم في M هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B

هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$ ما عدا المبدأ O.	$M = O$ (*) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (*)	41 $z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z = k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z = k\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ مع $k \in \mathbb{R}^+$ (*) إما $k=0$ أي : $z=0$ ، أو $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (*)
هي حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O.	$M \neq O$ (*) معناه أن Z حقيقي غير معدوم	42 $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ أي : $\arg(z) - \arg(\bar{z}) = 2k\pi$ أي : $\arg(z) + \arg(z) = 2k\pi$ و منه : $\arg(z) = k\pi$
هي حامل محور الترتيب ما عدا المبدأ O.	$M \neq O$ (*) معناه أن Z تخيلي صرف.	43 $\arg(-z) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi$ تصبح : $\pi + \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi$ أي : $2\arg(z) = -\pi + 2k\pi$ و منه : $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$
هي المستقيم المار بـ O ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O هي نصف المستقيم المعروف بـ : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z) > 1 \\ \operatorname{Im}(z) = 2 \end{cases}$	$M \neq O$ (*) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} + k\pi$ (*) إذن : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 1 + k\sqrt{2} > 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 2 \end{cases}$	44 لدينا : $\arg(-z) - \arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أي : $2\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و منه : $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 45 لدينا : $\bar{z} = 1 - 2i + k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ($k > 0$) أي : $\bar{z} = 1 - 2i + k\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي : $\bar{z} = 1 - 2i + k\sqrt{2}$ أي : $z = 1 + k\sqrt{2} + 2i$ ($k > 0$)

هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و
زاويته $\frac{7\pi}{6}$ باستثناء المبدأ O .

$$M \neq O \quad (*)$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (*)$$

$$(k > 0), z = 2 - k.e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{أي : } z = 2 + k.e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)}$$

$$z = 2 + k.e^{i\frac{7\pi}{6}} \text{ مع } (k > 0).$$

$$\text{ومنّه : } \arg(z) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

QCM

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

①. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $\frac{8}{3} - 2i$ ، ب- $-\frac{8}{3} - 2i$ ، ج- $\frac{8}{3} + 2i$ ، د- $-\frac{8}{3} + 2i$

②. في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات الاحقة $z = x + iy$ التي تحقق: $|z - 1| = |z + i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y = x - 1$ ، ب- $y = -x$ ، ج- $y = -x + 1$ ، د- $y = x$

③. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل :

أ- $3k + 1$ ، ب- $3k + 2$ ، ج- $3k$ ، د- $6k$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$

④. نعتبر المعادلة $(E): z = \frac{6-z}{3-z}$ مع $z \in \mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو:

أ- $-2 - i\sqrt{2}$ ، ب- $2 + i\sqrt{2}$ ، ج- $1 - i$ ، د- $-1 - i$

⑤. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة

C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ، ب- $2i$ ، ج- $\sqrt{3} + i$ ، د- $\sqrt{3} + 2i$

الحل

1. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ ،

يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد: $\frac{8}{3} + 2i + \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2} + 4 = \frac{8}{3} + 2i + \frac{10}{3} = 6 + 2i$

الشكل الجبري للعدد هو: $\frac{8}{3} - 2i$ (أ) الإجابة

2. ليكن عدد مركب z ، نضع $z = x + iy$.

$$|z - 1| = |z + i| \text{ معناه:}$$

$$|z - 1|^2 = |z + i|^2$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2 \text{ أي:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$y = -x$$

(ب) الإجابة

3. n عدد طبيعي،

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ أي:}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه: $2^n \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi$ (ج) الإجابة
 $n = 3k, (k \in \mathbb{N})$

4. حل للمعادلة (E):

$$z = \frac{6 - z}{3 - z} \Leftrightarrow \frac{z(3 - z)}{3 - z} = \frac{6 - z}{3 - z} \Leftrightarrow 3z - z^2 = 6 - z$$

$$\Rightarrow z^2 - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i\sqrt{2} \\ z_2 = 2 - i\sqrt{2} \end{cases} \text{ ومنه:}$$

5. لتكن A و B نقطتان لاحتمهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة

C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $\frac{\pi}{3}$ هي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A)$$

بعد النشر نجد: $z_C = \sqrt{3} + 2i$ الاجابة (د).

$$z_C - i = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\sqrt{3} - i)$$

2.

تمارين محلولة

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{2}{z+i} + \frac{2}{z-i} = 4$ ، و الجملة : $\begin{cases} 2a+b=2 \\ -a+b=-1+3i \end{cases}$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط : A, B, C, D لواحقتها

على الترتيب : $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2i$ ، $z_D = 1-i$.

(أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ، ثم أحسب العدد : $(z_A)^{2018} + (z_B)^{1439}$.

(ب) تحقق من أن : $z_A \times z_D = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ ، ثم إستنتج قيمة كل من : $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$.

(ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا .

(3) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $2i$ النقط M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{3i(z-1+i)}{z-2i}$

(أ) تحقق من أن : $OM' = 3 \times \frac{DM}{CM}$. إستنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ فإن M' تنتمي

إلى مجموعة يطلب تحديدها .

(ب) يبين أن : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، حيث : $(k \in \mathbb{Z})$.

(ج) إستنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[CD]$ ما عدا النقط C فإن النقط M' تنتمي إلى

مجموعة يطلب تحديدها .

حل التمرين:

(1) حل المعادلة : $\frac{2}{z+i} + \frac{2}{z-i} = 4$ ، أي : $\frac{2}{z-i} + \frac{2}{z+i} = 4$ ، أي : $\frac{2(z-i) + 2(z+i)}{(z-i)(z+i)} = 4$

ومنه : $4 = \frac{4z}{z^2+1}$ ، أي : $4z^2 - 4z + 4 = 0$ ، إذن : $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

لدينا الجملة : $\begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a + b = -1 + 3i \end{cases}$ بال طرح نجد : $3a = 3 - 3i$ ، ومنه : $a = 1 - i$ و $b = 2i$.

(2) أ) لدينا : $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ولدينا : $z_B = \overline{z_A}$ ، ومنه : $z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $(z_A)^{2018} + (z_B)^{1439} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2018} + (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1439} = e^{i\frac{2018\pi}{3}} + e^{-i\frac{1439\pi}{3}}$.

أي : $(z_A)^{2018} + (z_B)^{1439} = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ومنه : $\begin{cases} \frac{2018\pi}{3} = \frac{2016\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 672\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1439\pi}{3} = \frac{1440\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 480\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

أي : $(z_A)^{2018} + (z_B)^{1439} = i\sqrt{3}$ ، ومنه : $(z_A)^{2018} + (z_B)^{1439} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

ب) لدينا : $z_D = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، أي : $z_A \times z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

ومنه : $z_A \times z_D = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ ، وهو المطلوب .

إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$.

لدينا : $z_A \times z_D = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(1 - i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ ، أي : $z_A \times z_D = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(1 - i)$.

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد $z_A \times z_D$ نجد :

$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ، $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

ج) لدينا : $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n = (e^{i\frac{\pi}{12}})^n = e^{i\frac{n\pi}{12}}$ ، إذن $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا إذا كان : $\frac{n\pi}{12} = 0 + 2k\pi$.

ومنه : $n = 24k$ ، أي : n مضاعف للعدد 24 .

(3) أ) التحقق أن : $OM' = 3 \times \frac{DM}{CM}$ ، أي نحسب OM' و نتحقق من المساواة :

$OM' = |z'| = |3i| \times \frac{|z - 1 + i|}{|z - 2i|} = 3 \times \frac{|z - z_D|}{|z - z_B|}$ ، ومنه : $OM' = 3 \times \frac{DM}{CM}$ ، وهو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ معناه : $DM = CM$ ، أي : $\frac{DM}{CM} = 1$.
ومنه : $OM' = 3$ ، إذن M' ستكون تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3 .

(ب) بيان أن : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \arg(z') + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \arg\left[\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}\right] + 2k\pi$:

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_B}\right) + 2k\pi : \text{أي} , (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg\left(\frac{z-1+i}{z-2i}\right) + 2k\pi$$

ومنه : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، وهو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[CD]$ ، أي : $(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$:

ومنه : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \pi + k\pi$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .

2

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z^2 - 2z - 3)(z^2 - 4z + 7) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، الوحدة : $(2cm)$ نعتبر النقط A ، B ،

C و G لواقعها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$.

(أ) عَلم النقط : A ، B ، C و G .

(ب) أحسب العدد : $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ، ثم إستنتج طبيعة المثلث GAC .

(3) نعتبر (D) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(1) \dots\dots\dots (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = 12$.

(أ) برهن أن G هي مرجع الجملة : $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.

(ب) يَبِّن أن العلاقة (1) تكافئ العلاقة (2) $\dots\dots\dots GM.\overrightarrow{CG} = -4$.

(ج) تحقّق أن A تنتمي إلى المجموعة (D) .

(د) برهن أن العلاقة (2) تكافئ العلاقة (3) : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$(3)

(هـ) إستنتج طبيعة المجموعة (D) ثم أنشئها .

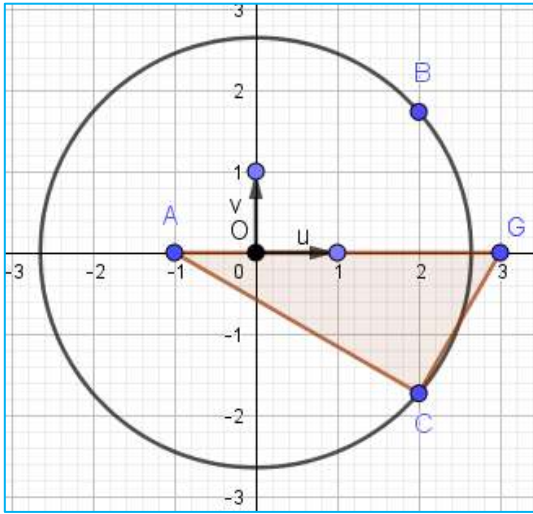
حل التمرين:

(1) حل المعادلة : $(z^2 - 2z - 3)(z^2 - 4z + 7) = 0$

إما : $z^2 - 2z - 3 = 0$ أو $z^2 - 4z + 7 = 0$ ومنه : $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3 = 2 - i\sqrt{3} \\ z_4 = 2 + i\sqrt{3} \end{cases}$

إذن : $S = \{-1; 3; 2 - i\sqrt{3}; 2 + i\sqrt{3}\}$

(2) أ) تعليم النقاط :



(ب) حساب العدد : $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$

ومنه : $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = i\sqrt{3}$ (تخليي صرف)

أي : $(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ومنه : المثلث GAC قائم في C .

(3) أ) لنبرهن أن النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$:

نحسب لاحقة المرجح ويجب أن نجدها هي نفسها لاحقة النقطة G .

أي : $z = \frac{-z_A + 2z_B + 2z_C}{3} = \frac{9}{3} = 3 = z_G$ ، ومنه : G هي مرجح الجملة $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.

(ب) لدينا العلاقة : (1) $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = 12$(1) تكافئ $3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = 12$ ، أي : $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = 4$

ومنه : (2) $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2) ، وهو المطلوب .

(ج) التحقق أن $A \in (D)$: نعوض M بـ A في العلاقة (2) ، أي : (2) $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ ثم نتحقق من المساواة

- لنحسب الجداء : $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG}$

لدينا : $\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، ومنه : $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = (-4 \times 1) + (0 \times i\sqrt{3}) = -4$

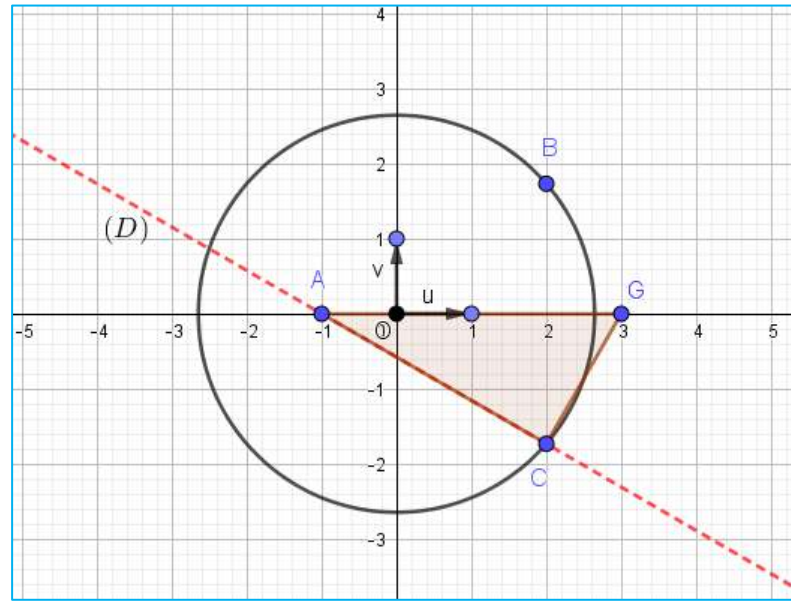
إذن : المساواة محققة ، أي أن : $A \in (D)$. $(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \\ \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \end{array} \right. \text{ لدينا : } \text{ بالطرح نجد : } \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \text{ ، أي : } (\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GA}) \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

أي : $(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ ، ومنه : $(3) \dots\dots\dots \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ ، وهو المطلوب .

(هـ) لدينا : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ ، هذا يعني أن : $(AM) \perp (CG)$.

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على (CG) ، أي : هي المستقيم (AC) .



(*) الإنشاء :

3

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، الوحدة : $(8cm)$.

(*) نعتبر A هي النقطة ذات اللاحقة -1 و B النقطة ذات اللاحقة 1 .

(*) لتكن (Γ) هي مجموعة النقط من المستوي التي تختلف عن A ، B و O ، نرفق بكل نقطة M من (Γ) لاحقتها

z النقطة N ذات اللاحقة z^2 و النقطة P ذات اللاحقة z^3 .

(1) بين أن النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

(2) نعتبر (C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

(أ) باستعمال مبرهنة فيثاغورس بين أن المثلث MNP قائم في P معناه : $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1$.

$$(ب) \text{ برهن أن : } |z+1|^2 + |z|^2 = 1 \text{ تكافئ } (z + \frac{1}{2})(\overline{z + \frac{1}{2}}) = \frac{1}{4} .$$

(ج) إستنتج طبيعة المجموعة (C) .

(3) نعتبر M نقطة من (Γ) لاحتها z ، r هي طويلا z و α عمده حيث : $\alpha \in]-\pi; \pi]$.

(أ) برهن أن المجموعة (F) للنقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما هي اتحاد ثلاث أنصاف مستقيمت .

(ب) مثل (C) و (F) في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

(ج) عيّن لواحق النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائما في P و لاحقة النقط P عدد حقيقي موجب تماما .

حل التمرين:

لدينا النقط : $A(-1)$ ، $B(1)$ و النقط : $M(z)$ ، $N(z^2)$ ، $P(z^3)$ هذه الأخيرة تختلف عن A ، B و O .

(1) لنبين أن النقط M ، N و P متميزة متى متى :

أي تكون : $M \neq N$ ، $M \neq P$ و $N \neq P$.

- نعلم أنه : $M = N$ معناه : $z = z^2$ ، أي : $z^2 - z = 0$ ، أي : $z(z-1) = 0$ ، ومنه : $z = 0$ أو $z = 1$.

أي أن : $M = O$ أو $M = B$ ، لكن M تختلف عن O و B ، إذن : $M \neq N$.

- و أيضا : $M = P$ معناه : $z = z^3$ ، أي : $z^3 - z = 0$ ، أي : $z(z^2 - 1) = 0$ ، أي : $z = 0$ أو $z^2 - 1 = 0$.

ومنه : $z = 0$ أو $z = 1$ أو $z = -1$ ، أي أن : $M = O$ أو $M = B$ أو $M = A$.

لكن M تختلف عن O ، B و A ، إذن : $M \neq P$.

- كذلك بنفس الطريقة نبين أن $N \neq P$.

إذن مما سبق نستنتج أن النقط M ، N و P متميزة متى متى .

(2) (أ) المثلث MNP قائم في P معناه : $MN^2 = MP^2 + NP^2$ ، أي : $|z_N - z_M|^2 = |z_P - z_M|^2 + |z_P - z_N|^2$.

أي : $|z^2 - z|^2 = |z^3 - z|^2 + |z^3 - z^2|^2$ ، أي : $|z(z-1)|^2 = |z(z^2-1)|^2 + |z^2(z-1)|^2$ ، أي :

$|z|^2 \cdot |z-1|^2 = |z|^2 \cdot |z-1|^2 \cdot |z+1|^2 + |z^2|^2 |z-1|^2$ ، بما أن : $z \neq 0$ و $z \neq 1$ يمكن الإختزال بعد القسمة

على $|z|^2 \cdot |z-1|^2$ ، فنحصل على : $1 = |z+1|^2 + |z|^2$ ، ومنه : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ معناه : $(z+1)(\bar{z}+1) + z\bar{z} = 1$ ، لأن : $|z|^2 = z\bar{z}$ ، أي تصبح :

$$2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \text{ ، أي : } z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 + z\bar{z} = 1$$

و من جهة أخرى لدينا : $(z + \frac{1}{2})(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ تعني : $(z + \frac{1}{2})(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ ، أي تصبح :

$$2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \text{ نجد : } z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0 \text{ ، أي : } z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

إذن : من هذا و ذاك نستنتج أن المساواة $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ تكافئ المساواة $(z + \frac{1}{2})(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

ج) طبيعة المجموعة (C) :

(C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

$$\text{أي : } (z + \frac{1}{2})(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \text{ ، أي : } |z + \frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4} \text{ ، أي : } |z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \text{ ، ومنه : } EM = \frac{1}{2} .$$

حيث : $z_E = -\frac{1}{2}$ ، إذن المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ما عدا النقطتين O و A .

(3) (F) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما .

أ) P عدد حقيقي موجب تماما أي : z^3 عدد حقيقي موجب تماما ، أي أن : $\arg(z^3) = 0 + 2k\pi$ ، أي :

$$3\arg(z) = 2k\pi \text{ ، أي : } \arg(z) = \frac{2k\pi}{3} \text{ ، ومنه : } \alpha = \frac{2k\pi}{3} \text{ مع } (k \in \mathbb{Z}) \text{ ، لكن : } -\pi < \alpha \leq \pi$$

$$\text{أي : } -\pi < \frac{2k\pi}{3} \leq \pi \text{ ، أي : } -1 < \frac{2k}{3} \leq 1 \text{ ، أي : } -3 < 2k \leq 3 \text{ ، أي : } -\frac{3}{2} < k \leq \frac{3}{2} \text{ ، ومنه :}$$

$$k \in \{-1; 0; 1\} \text{ ، ومنه : } \alpha = -\frac{2\pi}{3} \text{ أو } \alpha = 0 \text{ أو } \alpha = \frac{2\pi}{3} .$$

$$\text{إذن : } \arg(z) = 0 \text{ أو } \arg(z) = \frac{2\pi}{3} \text{ أو } \arg(z) = -\frac{2\pi}{3} .$$

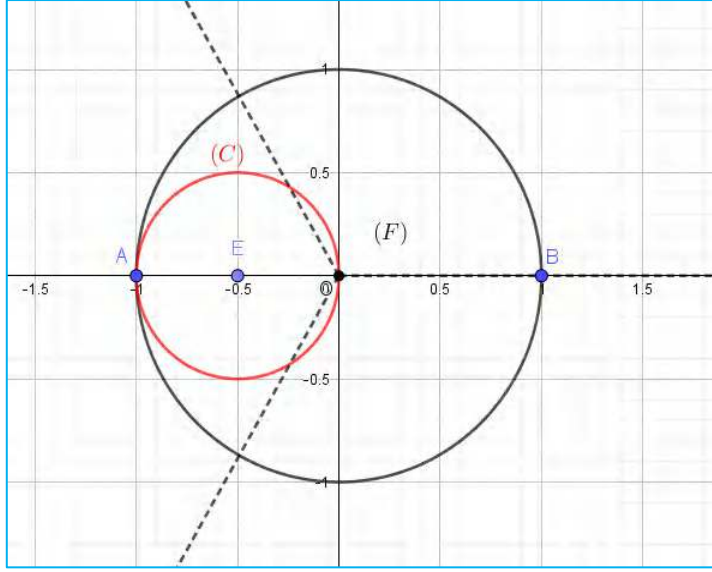
أي أن : المجموعة (F) تكون : نصف المستقيم [Ox) ما عدا النقطتين O و B أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O

و يشكل زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محاور الفواصل ما عدا النقطة O أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل

زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محاور الفواصل ما عدا النقطة O .

إذن : مجموعة النقط (F) هي اتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) التمثيل :



ج) بما أن المثلث MNP قائم في P و z_P موجب تماما ، إذن : M تنتمي إلى تقاطع المجموعتين (C) و (F) .

لدينا : (C) معرفة بالعلاقة $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ لأن : $M \in (C)$ ، أي : $z.\bar{z} + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 0$ ، حيث :

$$z = r.e^{i\frac{2k\pi}{3}} \text{ مع } k \in \{-1; 0; 1\} \text{ لأن : } M \in (F) .$$

$$(*) \text{ نعلم أن : } |z|^2 = z.\bar{z} \text{ و } z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \text{ ، أي : } z.\bar{z} = r^2 \text{ و } z + \bar{z} = 2 \times r.\cos(\frac{2k\pi}{3})$$

$$\text{إذن : } z.\bar{z} + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 0 \text{ تعني : } r^2 + \frac{1}{2} \times 2r.\cos(\frac{2k\pi}{3}) = 0 \text{ ، أي : } r^2 + r.\cos(\frac{2k\pi}{3}) = 0 \text{ ، أي :}$$

$$r \left[r + \cos(\frac{2k\pi}{3}) \right] = 0 \text{ ، نعلم أن : } (r > 0) \text{ ، إذن : } r + \cos(\frac{2k\pi}{3}) = 0 .$$

(*) لما $k = 0$ يكون : $r + 1 = 0$ ، ومنه : $r = -1$ (مرفوض) .

$$(*) \text{ لما } k = 1 \text{ يكون : } r + \cos(\frac{2\pi}{3}) = 0 \text{ ، أي : } r - \frac{1}{2} = 0 \text{ ، ومنه : } r = \frac{1}{2} .$$

$$(*) \text{ لما } k = -1 \text{ يكون : } r + \cos(-\frac{2\pi}{3}) = 0 \text{ ، أي : } r - \frac{1}{2} = 0 \text{ ، ومنه : } r = \frac{1}{2} .$$

$$\text{إذن : } r = \frac{1}{2} \text{ ، أي : } z_1 = \frac{1}{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ و } z_2 = \frac{1}{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ ، وبالتالي توجد نقطتان تحققان المطلوب .}$$

$$(1) \text{ عَيِّن العددين المركبين } a \text{ و } b \text{ علما أنَّ : } \begin{cases} \bar{a} - \bar{b} = 1 + 3i \\ a + ib = -1 + 3i \end{cases}$$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب :
 $a = 3 + i$ و $b = 2 + 4i$ ، وَنفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\vec{AB}$.

(أ) عَيِّن لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

(ب) أحسب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B}$ ، ثم أكتبه على الشكل الأسّي .

ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$ ؟

(ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم عَيِّن لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

(3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O وَيحوّل B إلى C .

(أ) أعط الكتابة المركبة للتشابه المباشر S .

(ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟

(ج) نضع : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$. أعط الكتابة المركبة للتحويل S^4 ، وَماطبيعة هذا التحويل ؟

حل التمرين:

(1) تعيين العددين المركبين a و b :

$$\text{لدينا الجملة : } \begin{cases} \bar{a} - \bar{b} = 1 + 3i \\ a + ib = -1 + 3i \end{cases} \text{ ، أي : } \begin{cases} a - b = 1 - 3i \dots\dots(1) \\ a + ib = -1 + 3i \dots\dots(2) \end{cases} \text{ بالطرح نجد : } -b - ib = 2 - 6i \text{ ، أي : } -b(1 + i) = 2 - 6i$$

$$b = \frac{2 - 6i}{-1 - i} \text{ ، أي : } b(-1 - i) = 2 - 6i \text{ . و بالتعويض نجد : } a = 3 + i$$

(2) (أ) تعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T :

بما أنّ C هي صورة O بالإنسحاب T فإن : $\vec{OC} = \vec{AB}$ ، ومنه : $z_C = z_B - z_A$ ، أي : $z_C = -1 + 3i$.

(ب) حساب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_B} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ، أي : } \frac{z_C - z_A}{z_B} = \frac{-1 + 3i - 3 - i}{2 + 4i} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i} = i$$

$$\text{إذن : } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B} \right| = 1 \text{ و } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، ومنه : } AC = OB \text{ و } (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi .$$

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان ومتعامدتان .

(ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة E :

بما أن $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، و بما أن $[AC]$ ، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربع .

$$E \text{ هي مركز تناظر الرباعي } OABC \text{ ، أي : هي منتصف القطرين ، ومنه : } z_E = \frac{z_O + z_B}{2} = 1 + 2i .$$

(3 أ) الكتابة المركبة للتشابه

لدينا S مركزه O ويحول B إلى C أي : $z' - z_O = ke^{i\theta} (z - z_O)$ ، أي : $z' = ke^{i\theta} z$ ، ومنه :

$$\frac{z_C}{z_B} = ke^{i\theta} \text{ ، أي : } \frac{z_C}{z_B} = ke^{i\theta} .$$

$$\text{نحسب } \frac{z_C}{z_B} = \frac{-1+3i}{2+4i} = \left(\frac{-1+3i}{2+4i} \right) \left(\frac{2-4i}{2-4i} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i : \frac{z_C}{z_B}$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ ، إذن عبارة التشابه } S \text{ هي : } z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z \text{ أو } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z$$

(ب) صورة A بالتشابه S :

$$\text{لدينا : } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z \text{ ، أي : } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_A \text{ ، أي : } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) (3+i) \text{ ، ومنه : } z' = 1 + 2i .$$

إذن E هي صورة A بالتشابه S .

(ج) العبارة المركبة للتحويل S^4 ، و طبيعته :

$$\text{لدينا : } S^4 = S \circ S \circ S \circ S \text{ ، أي أن : } S^4 \text{ هو تشابه مباشر نسبته : } k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{4} \text{ ، وزاويته : } \theta = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi \text{ و مركزه : } O .$$

$$\text{الكتابة المركبة : } z' = \frac{1}{4} e^{i\pi} z \text{ ، أي : } z' = -\frac{1}{4} z \text{ ، لأن : } e^{i\pi} = -1 . \text{ إذن التحويل } S^4 \text{ هو تحاكي مركزه } O \text{ ونسبته } -\frac{1}{4} .$$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (الوحدة 6cm).

نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$\text{حيث : } z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

ولتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = f(M_n)$ ونسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

(1) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل f ، ثم علّم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

(2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$.

(3) نعتبر n و p عدنان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان M_n و M_p متطابقتان إذا وافقت إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

(4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x - 5y = 3$ علما أنّ الثنائية (4;9) حل خاص لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

حل التمرين:

(1) طبيعة التحويل f : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

(2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ ، لنستعمل البرهان بالتراجع :

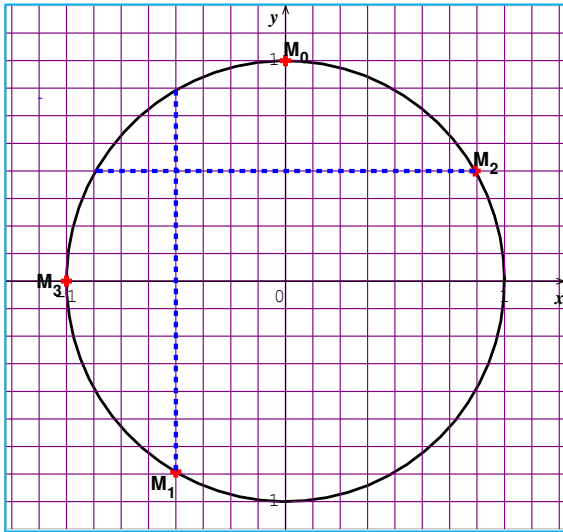
$$\checkmark \text{ نتحقق من أجل } n = 0 : z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} + 0 \times \frac{5\pi}{6})} ,$$

$$\text{أي : } z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ (محققة) .}$$

$$\checkmark \text{ نفرض صحة : } z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$$

$$\checkmark \text{ نبرهن صحة : } z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2} + (n+1)\frac{5\pi}{6})}$$

$$\text{البرهان : نعلم أنّ : } z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$$



$$z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})} \text{ ، أي ، } z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$$

$$z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2} + (n+1)\frac{5\pi}{6}\right]} \text{ ، أي ، } z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6}\right]}$$

$$\text{إذن : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ يكون : } z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$$

$$(3) \quad M_p \text{ و } M_n \text{ متطابقتان معناه أن : } z_n = z_p \text{ ، أي : } e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2} + p\frac{5\pi}{6})} \text{ ، وهذا معناه أن :}$$

$$\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + p\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، أي : } n\frac{5\pi}{6} = p\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، أي : } n \times 5\pi = p \times 5\pi + 12k\pi$$

$$5n = 5p + 12k \text{ ، أي : } 5n - 5p = 12k \text{ ، ومنه : } 5(n - p) = 12k \text{ ، } 12 \text{ و } 12 / 5(n - p)$$

أولي مع 5 ، حسب غوص : 12 يقسم (n - p) ، أي أن : (n - p) مضاعف لـ 12 .

$$(4) \quad \text{أ) حل في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة } 12x - 5y = 3 : 12x - 5y = 12(4) - 5(9) \text{ ، أي : } 12(x - 4) = 5(y - 9) \text{ حسب غوص نستنتج}$$

$$\text{أن : } \begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = 12k + 9 \end{cases} \text{ حيث : } k \in \mathbb{Z}$$

$$(ب) \quad M_n \in [Ox) \text{ معناه أن : } z_n \text{ حقيقي موجب ، أي : } \arg(z_n) = 0 + 2k\pi \text{ ، أي : } \frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$$

$$3\pi + 5n\pi = 12k\pi \text{ ، أي : } 3 + 5n = 12k \text{ ، أي : } 12k - 5n = 3$$

$$\text{إذن : } n = y = 12k + 9 \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

6

$$(1) \quad \text{أ) نعتبر } (r_n) \text{ المتتالية الهندسية التي حدها الأول } r_0 \text{ وأساسها } \frac{2}{3} \text{ ، مع } r_0 > 0$$

$$\text{عبر عن } r_n \text{ بدلالة } r_0 \text{ و } n$$

$$(ب) \quad \text{نعتبر } (\theta_n) \text{ المتتالية الحسابية التي حدها الأول } \theta_0 \text{ وأساسها } \frac{2\pi}{3} \text{ ، مع } \theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{عبر عن } \theta_n \text{ بدلالة } \theta_0 \text{ و } n$$

$$(ج) \quad \text{نضع من أجل كل عدد طبيعي } n : z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \text{ ، علما أن : } z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$$

$$\text{عين الطويلة والعمدة لكل من : } z_1 \text{ و } z_2$$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ وحدته: 4cm .

نسي M_n النقطة ذات اللاحقة Z_n .

(أ) علم النقط: M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 .

(ب) عبّر عن: $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ بدلالة n .

(ج) نضع: $L_n = \|\overrightarrow{M_0 M_1}\| + \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| + \dots + \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$.

عبّر عن L_n بدلالة n .

ماهي نهاية L_n لما n يؤول إلى $+\infty$ ؟

حل التمرين:

(1) (أ) التعبير عن r_n بدلالة r_0 و n : $r_n = r_0 \times q^n$ ومنه: $r_n = r_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(ب) التعبير عن θ_n بدلالة θ_0 و n : $\theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}n$ ومنه: $\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{3}$.

(ج) لدينا: $z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$.

(*) $|z_0 \times z_1 \times z_2| = |8|$ أي: $|z_0| \times |z_1| \times |z_2| = 8$ أي: $r_0 \times r_1 \times r_2 = 8$ ونعلم أن: $r_0 \times r_2 = r_1^2$.

إذن: $r_1 \times r_1^2 = 8$ أي: $r_1^3 = 8$ وعليه: $r_1 = 2$.

(*) $\arg(z_0 \times z_1 \times z_2) = \arg(8) + 2k\pi$ أي: $\arg(z_0) + \arg(z_1) + \arg(z_2) = 0 + 2k\pi$ أي:

$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ ونعلم أن: $\theta_0 + \theta_2 = 2\theta_1$ إذن: $3\theta_1 = 2k\pi$ وعليه: $\theta_1 = \frac{2k\pi}{3}$.

نعلم أن: $\theta_0 = \theta_1 - \frac{2\pi}{3}$ ومنه: $\theta_0 = \frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ ولدينا أيضا: $\theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ أي:

$0 \leq \frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ أي: $0 \leq \frac{2k}{3} - \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$ أي: $\frac{2}{3} \leq \frac{2k}{3} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ أي: $\frac{2}{3} \leq \frac{2k}{3} < \frac{7}{6}$.

أي: $\frac{6}{3} \leq 2k < \frac{21}{6}$ أي: $2 \leq 2k < \frac{21}{6}$ ومنه: $1 \leq k < \frac{21}{12}$ إذن: $k = 1$.

ومنه سنجد أن: $\theta_0 = 0$.

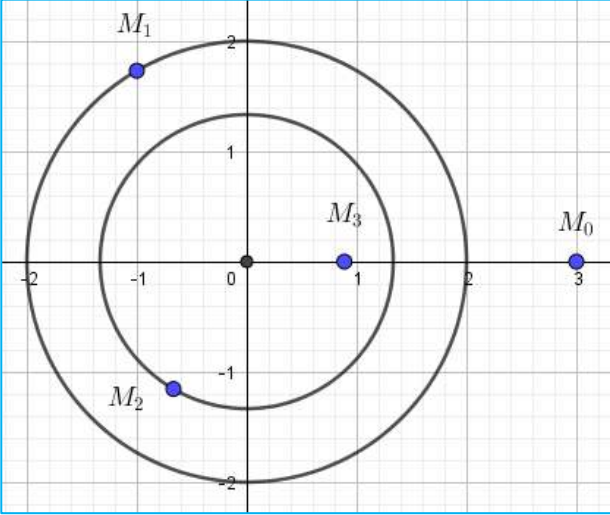
(*) حساب r_1 و r_2 :

لدينا : $r_1 = 2$ ، أي : $r_2 = r_1 \times \frac{2}{3}$ ، ومنه : $r_2 = \frac{4}{3}$. إذن : $r_0 = 3$ و $r_3 = \frac{8}{9}$.

(*) حساب θ_1 و θ_2 :

لدينا : $\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}$ ومنه : $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$. لدينا : $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ ومنه : $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$ و $\theta_3 = 2\pi$.

(2) تعليم النقط :



لدينا : $z_0 = 3$ ، $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = -\frac{2}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $z_3 = \frac{8}{9}$

(ب) التعبير عن $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ بدلالة n :

نعلم أنّ : $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = |z_{n+1} - z_n|$

لدينا : $z_n = r_n \cdot e^{i(\theta_n)}$ ، أي : $z_n = r_0 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، ومنه : $z_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$.

ولدينا : $z_{n+1} = r_{n+1} \cdot e^{i(\theta_{n+1})}$ ، ومنه : $z_{n+1} = 3 \times (\frac{2}{3})^{n+1} \cdot e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}$

إذن : $z_{n+1} - z_n = 3 \times (\frac{2}{3})^{n+1} \cdot e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})} - 3 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، أي :

$z_{n+1} - z_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})} \left[\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 \right]$ ، أي :

$z_{n+1} - z_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})} \times \left(-\frac{4}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ ، أي : $z_{n+1} - z_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n \cdot e^{i(\frac{2n\pi}{3})} \times \left(-\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right)$

ومنه : $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{19} \times (\frac{2}{3})^n$ ، أي : $|z_{n+1} - z_n| = 3 \times (\frac{2}{3})^n \times \frac{\sqrt{19}}{3}$

وعليه : $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = \sqrt{19} \times (\frac{2}{3})^n$

(ج) لدينا : $L_n = \|\overrightarrow{M_0 M_1}\| + \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| + \dots + \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$

(*) التعبير عن L_n بدلالة n :

$$: \text{أي} , L_n = \sqrt{19}\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \sqrt{19}\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \sqrt{19}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \sqrt{19}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$. L_n = \sqrt{19} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

نلاحظ أن: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$ هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1

عدد حدودها $(n+1)$ حدا .

$$L_n = 3\sqrt{19} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] : \text{ومنه} , L_n = \sqrt{19} \times 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] : \text{أي} , L_n = \sqrt{19} \left[1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right] : \text{إذن}$$

(*) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$:

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 3\sqrt{19} : \text{ومنه} , \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

7

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(I) أ) أعط الشكل الأساسي لـ z_B ثم لـ z_C .

(ب) علّم النقط : C, B, A .

(2) عَيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

(3) عَيّن وأنشئ المجموعة (D) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - 2|$.

(II) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ($z \neq z_A$) النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{-4}{z - 2}$.

(1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z = \frac{-4}{z - 2}$.

(ب) إستنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C .

(ج) عَيّن وعلّم G' النقطة المرفقة بالنقطة G مركز الثقل للمثلث OAB .

$$(2) \text{ أ) برهن أنه من أجل كل } z \text{ يختلف عن } 2 \text{ يكون : } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}.$$

(ب) يبين أنه إذا كانت M نقطة كيفية من المجموعة (D) المذكورة في الجزء الأول فإن M' تنتمي إلى المجموعة (T) يطلب تعيينها ثم إنشاؤها .

حل التمرين:

(I) 1 أ) إعطاء الشكل الأسّي لـ z_B ثم لـ z_C :

$$(*) \text{ لدينا : } z_B = 1 + i\sqrt{3} \text{ ، أي : } \left\{ \begin{array}{l} |z_B| = 2 \\ \arg(z_B) : \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \text{ ومنه : } z_B = 2.e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

(*) نلاحظ أن : $z_C = \overline{z_B}$ ، ومنه : $z_C = 2.e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(ب) تعليم النقط : (أنظر الشكل أسفله) .

(2) طبيعة الرباعي $OBAC$:

- لدينا : $z_A - z_B = z_C - z_O$ ، أي أن : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$ ، إذن الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع .

- ومن جهة أخرى لدينا : $|z_B| = |z_C|$ أي أن : $OB = OC$ ، إذن الرباعي $OBAC$ هو معين .

(3) طبيعة المجموعة (D) :

لدينا : $|z| = |z - 2|$ ، أي : $OM = AM$ ، ومنه : (D) هي محور القطعة $[OA]$.

(II) لدينا : $z' = \frac{-4}{z - 2}$ مع $(z \neq z_A)$.

(1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \frac{-4}{z - 2}$ ، هذه الأخيرة تكافئ : $z^2 - 2z + 4 = 0$ مع $(z \neq 2)$.

نجد : $\Delta = (2\sqrt{3}i)^2$ ، ومنه : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

(ب) مما سبق نستنتج أن النقطة المرفقة بالنقطة B هي B نفسها والنقطة المرفقة بالنقطة C هي C نفسها أيضا .

(ج) لدينا : النقطة G هي مركز الثقل للمثلث OAB ، أي : $z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3}$ ، ومنه : $z_G = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

إذن : $z_{G'} = \frac{-4}{z_G - 2}$ ، أي : $z_{G'} = \frac{-4}{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 2}$ ومنه بعد الحساب نجد : $z_{G'} = 3 + i\sqrt{3}$.

(* تعلیم $z_{G'}$: (أنظر الشكل أسفله)

(2) أ) البرهان أن : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$.

لدينا : $|z' - 2| = \left| \frac{-4}{z - 2} - 2 \right|$ ، أي : $|z' - 2| = \left| \frac{-4 - 2z + 4}{z - 2} \right|$ ، أي : $|z' - 2| = \left| \frac{-2z}{z - 2} \right|$ ، ومنه :

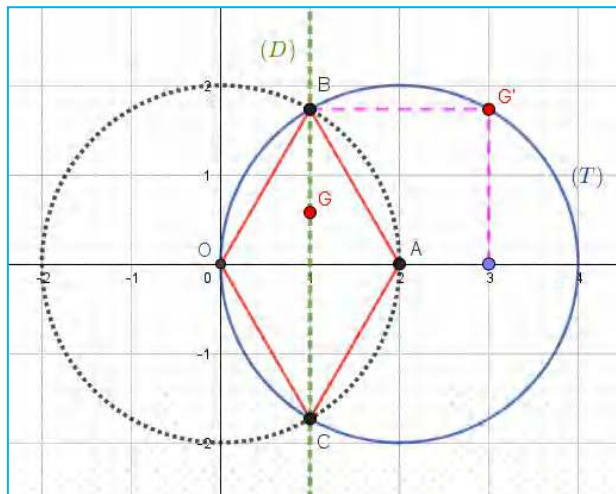
$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$ و هو المطلوب .

ب) إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة (D) فإن : $OM = AM$ ، أي : $|z| = |z - 2|$.

ومنه : المساواة $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$ تصبح : $|z' - 2| = 2$ ، أي أن : $AM' = 2$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T) التي مركزها A و نصف قطرها 2 .

(* الإنشاء :



في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نفرض النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$.

(1) برّر أنّه يوجد تشابه مباشر S حيث : $S(O) = A$ و $S(A) = B$.

(2) أ) بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1 - i)z + i$.

(ب) عيّن العناصر المميزة لـ S (نسمي Ω المركز) .

(3) نعتبر متتالية النقط (A_n) حيث : A_0 هي المبدأ O ومن أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$.

نسمي z_n لاحقة A_n (لدينا إذن : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$) .

أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

(ب) عيّن بدلالة n لاحقتي الشعاعين : $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.

قارن بين طويلتي هذين الشعاعين و احسب قياسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.

(ج) إستنتج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n ثم أنشئ A_3 و A_4 .

(د) عيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) .

حل التمرين:

(1) بما أنّ A تختلف عن B و A تختلف عن O ، فإنّه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B و يحوّل O إلى A .

(2) أ) تبين أن الكتابة المركبة لـ S هي : $z' = (1 - i)z + i$.

$$\text{لدينا : } \begin{cases} S(A) = B \\ S(O) = A \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_A = az_O + b \end{cases} \text{ بالطرح نجد : } z_B - z_A = a(z_A - z_O) \text{ ، أي :}$$

$$a = \frac{z_B - z_A}{z_A - z_O} = \frac{1 + 2i - i}{i} = 1 - i \text{ ، ومنه : } a = 1 - i \text{ . نعوض قيمة } a \text{ في } z_A = az_O + b \text{ نجد : } z_A = b \text{ ، أي :}$$

$b = i$ ، إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1 - i)z + i$ ، و هو المطلوب .

(ب) العناصر المميزة للتشابه S :

$$\Omega(1;0) : \text{أي} ، z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = 1 \text{ ولدينا : } \begin{cases} |a| = \sqrt{2} \\ \arg(a) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ : أي} ، a = 1 - i$$

إذن العناصر المميزة للتشابه S هي : نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ومركزه Ω .

(3) أ) لنبرهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1 - (1 - i)^n$

- لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $z_0 = 1 - (1 - i)^0$ ، أي : $z_0 = 0$ ، ومنه : z_0 لاحقة A_0 (محققة).

- نفرض صحة : $z_n = 1 - (1 - i)^n$ ونبرهن صحة : $z_{n+1} = 1 - (1 - i)^{n+1}$

لدينا : $A_{n+1} = S(A_n)$ ، أي : $z_{n+1} = (1 - i)z_n + i$ ولدينا فرضاً أن : $z_n = 1 - (1 - i)^n$ ، أي :

$$z_{n+1} = (1 - i)[1 - (1 - i)^n] + i : \text{أي} ، z_{n+1} = 1 - i - (1 - i)(1 - i)^n + i : \text{ومنّه} ،$$

$$z_n = 1 - (1 - i)^n : \text{إذن : من أجل كل عدد طبيعي } n ، z_{n+1} = 1 - (1 - i)^{n+1}$$

(ب) تعيين بدلالة n لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$:

$$z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = -(1 - i)^n : \text{ومنّه} ، z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = 1 - (1 - i)^n - 1 : \text{أي} ، z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = z_n - z_{\Omega} \quad \diamond$$

$$z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = i(1 - i)^n : \text{ومنّه} ، z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = 1 - (1 - i)^{n+1} - 1 + (1 - i)^n : \text{أي} ، z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = z_{n+1} - z_n \quad \diamond$$

(*) المقارنة بين طويلتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$:

$$\Omega A_n = (\sqrt{2})^n : \text{ومنّه} ، \Omega A_n = |-(1 - i)^n| = |1 - i|^n : \text{أي} ، \|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = \Omega A_n \quad \diamond$$

$$A_n A_{n+1} = (\sqrt{2})^n : \text{ومنّه} ، A_n A_{n+1} = |i(1 - i)^n| = |i| \cdot |1 - i|^n : \text{أي} ، \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = A_n A_{n+1} \quad \diamond$$

$$\Omega A_n = A_n A_{n+1} : \text{أي} ، \|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\|$$

(*) حساب قياسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}\right) + 2k\pi$: أي ، $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\frac{i(1 - i)^n}{-(1 - i)^n}\right) + 2k\pi = \arg(-i) + 2k\pi$

$$(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z} : \text{ومنّه}$$

(ج) إستنتاج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n :

لدينا : $(\overrightarrow{A_n \Omega}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه : $k \in \mathbb{Z}$ مع $(\overrightarrow{A_n \Omega}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ولدينا من قبل أن : $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$ ، إذن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة Ω بالدوران الذي مركزه A_n وزاويته

$\frac{\pi}{2}$ ، فبذلك سيكون المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ متقايس الضلعين وقائم في A_n .

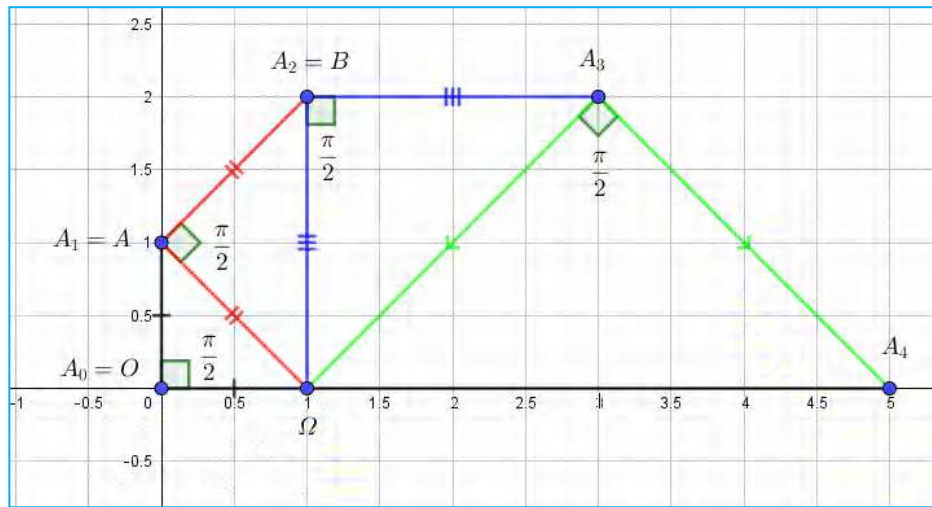
(*) إنشاء النقطتين A_3 و A_4 :

أولا ننشئ كل من النقط : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ ، $\Omega(1;0)$ ، بعدها سنلاحظ أن كل من المثلثين

ΩOA و ΩAB المتقايسا الضلعين والقائمين في A و O على الترتيب .

إذن لإنشاء النقطتين A_3 و A_4 نقوم بإنشاء المثلثين $\Omega A_3 A_4$ و $\Omega B A_3$ المتقايسا الضلعين والقائمين في B و A_3

على الترتيب . (أنظر إلى الشكل الموالي) :



(د) تعين النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) :

لدينا : $A_n \in (\Omega B)$ يعني أن النقط Ω ، B و A_n على إستقامة واحدة ، أي : $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega B}) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_2}) = k\pi$ ، أي : $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_2}}}\right) = k\pi$ ، أي : $\arg\left[\frac{-(1-i)^n}{-(1-i)^2}\right] = k\pi$ ، ومنه :

$\arg[(1-i)^{n-2}] = k\pi$ ، أي : $(n-2)\arg(1-i) = k\pi$ ، أي : $(n-2)\left(-\frac{\pi}{4}\right) = k\pi$ ، ومنه :

$n-2 = -4k$ ، إذن : $n = -4k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}^-$ لأن $n \in \mathbb{N}$.

و عليه فيكون : $n \in \{2; 6; 10; 14; \dots\}$.

إذن النقطة A_n التي تنتمي للمستقيم (ΩB) هي : A_2 ، A_6 ، A_{10} ، A_{14} ، إلخ .

9.

(I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقاط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

(1) بين أنه يوجد تشابه مباشر S يحول A إلى B ويحول B إلى C .

(2) أعط العبارة المركبة لـ S ثم استنتج العناصر المميزة له .

(3) نعتبر النقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0 = 2$ والنقطتان A_n ، A_{n+1} لاحقتاهما z_n و z_{n+1} حيث : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

(أ) أحسب كلا من : z_1, z_2, z_3, z_4 ثم عَلم النقاط : A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}}$.

(ج) ما هي أول نقطة A_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه O ونصف قطره $0,1$ ؟ .

(II) تحتوي علبة على 30 كرة مرقمة من 1 إلى 30 لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرة واحدة من العلبة

ونسجل رقمها n ($1 \leq n \leq 30$) ثم نعلم النقطة A_n ذات اللاحقة z_n (المذكورة في السؤال 3 -ب-).

- أحسب احتمال كل حادثة :

A : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور الفواصل " .

B : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور الترتيب " .

C : " النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ " .

حل التمرين:

(I) 1) بما أن : A تختلف عن B و A تختلف عن C ، فإنه يوجد تشابه مباشر S يحول A إلى B ،

ويحول B إلى C .

(2) العبارة المركبة للتشابه S : $z' = az + b$ لدينا : $S(A) = B$ و $S(B) = C$ ، ومنه :

$$، a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{1 + i - i} : \text{بالطرح نجد : } z_B - z_C = a(z_A - z_B) \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$$

$$، b = 0 : \text{ومنه : } i = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(1 + i) + b : \text{أي : } z_B = az_A + b : \text{نختار : } a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

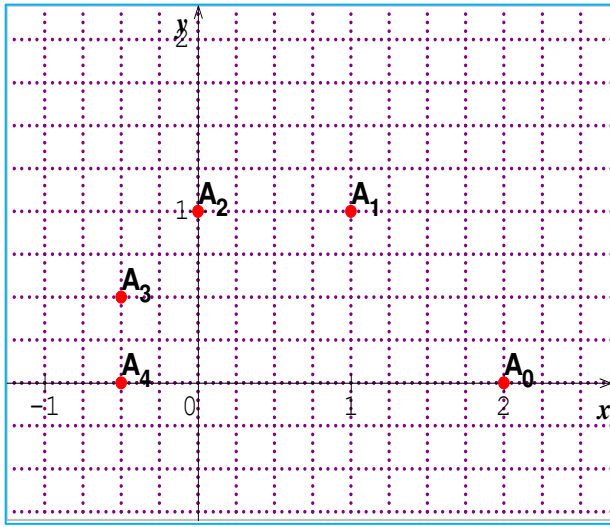
$$، z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z \quad \text{إذن العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي :}$$

$$العناصر المميزة لـ S : النسبة : k = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} ، الزاوية : \arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\pi}{4} ، المركز : المبدأ O .$$

$$(3) \text{ أ) حساب : } z_4, z_3, z_2, z_1 : \text{ثم تعليم النقاط : } A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 .$$

$$، z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times 1 + i = i \quad z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i : \text{أي : } z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = -\frac{1}{2} ، z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} \times i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



تعليم النقاط : (أنظر الشكل المقابل) .

$$(ب) \text{ برهان أن : } z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}}$$

- التحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $z_0 = 2$ (محققة) .

$$- \text{نفرض صحة : } z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}}$$

$$- \text{ونبرهن صحة : } z_{n+1} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \cdot e^{i \frac{(n+1)\pi}{4}}$$

$$، z_{n+1} = \frac{1+i}{2} \times 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \times 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}} : \text{أي : } z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}}$$

$$، أي : z_{n+1} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \cdot e^{i \frac{(n+1)\pi}{4}} : \text{ومنه : } z_{n+1} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \cdot e^{i \frac{(n+1)\pi}{4}} \text{ وهو المطلوب .}$$

$$، z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot e^{i \frac{n\pi}{4}} : \text{إذن : من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(ج) النقطة A_n تكون في القرص الذي مركزه O ونصف قطره $0,1$:

معناه أن: $OA_n \leq 0,1$ ، أي: $|z_n| \leq 0,1$ ، أي: $2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,1$ ، أي: $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,05$ ، ومنه:

$$n \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \ln(0,05) \text{ ، أي: } n \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \ln(0,05) \text{ ، ومنه: } n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})} . n \geq 8,64 \text{ ، أي: } n \geq 8,64$$

إذن: $n \in \{9;10;11;12;.....\}$ و منه: أول نقطة تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0,1$ هي: A_9 .

$$A \text{ (II): "النقطة } A_n \text{ تنتمي إلى محور الفواصل" معناه أن: } z_n \text{ حقيقي، أي: } \arg(z_n) = k\pi \text{ ، أي: } \frac{n\pi}{4} = k\pi$$

$$\text{أي: } \frac{n}{4} = k \text{ ، ومنه: } n = 4k \text{ ، (} n \text{ مضاعف لـ } 4 \text{) أي: } n \in \{4;8;12;16;20;24;28\} \text{ . إذن: } p(A) = \frac{7}{30}$$

$$B \text{ : "النقطة } A_n \text{ تنتمي إلى محور الترتيب" معناه أن: } z_n \text{ تخيلي صرف، أي: } \arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، أي: } \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، ومنه: } \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$: n = 4k + 2 \text{ ، أي: } n \in \{2;6;10;14;18;22;26;30\} \text{ . إذن: } p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$C \text{ : "النقطة } A_n \text{ تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة } y = x \text{ ، أي أن: } \arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ، أي: } \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي: } \frac{n}{4} = \frac{1}{4} + k \text{ ، ومنه: } n = 4k + 1 \text{ ، أي: } n \in \{1;5;9;13;17;21;25;29\} \text{ . إذن: } p(C) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

10

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- نعتبر A و B نقطتان لاحقاتهما على الترتيب: $a=1$ و $b=-1$.

- نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = \frac{Z-1}{Z+1}$ مع $Z \neq -1$ (أ) عيّن و

أنشئ المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة Z حيث يكون Z' عدداً حقيقياً .

(ب) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة Z حيث يكون Z' تخيلياً صرفاً .

(ج) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة Z حيث يكون: $|Z'| = 1$.

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد مركب Z يختلف عن -1 يكون: $(Z'-1)(Z+1) = -2$.

(ب) إستنتج أن: $AM' \times BM = 2$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$.

(3) يَبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B ونصف القطر 2 فإن M' تنتمي إلى الدائرة (T')

يطلب تعيينها .

(4) نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة N ذات اللاحقة $\bar{z}$.

يَبين أنه إذا كانت M تختلف عن B فإن M' تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$.

(5) نعتبر K النقطة ذات اللاحقة : $t = -2 + i\sqrt{3}$.

(أ) أكتب $(t+1)$ على الشكل الأسّي .

(ب) يَبين أن النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) .

(6) باستعمال الأسئلة السابقة ، أعط إنشاءً للنقطة K' المرفقة بالنقطة K بواسطة العلاقة : $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

حل التمرين:

(1) أ) يكون z' عدداً حقيقياً معناه : $z' = 0$ أو $\arg(z') = k\pi$ ، أي : $\frac{z-1}{z+1} = 0$ أو $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = k\pi$

أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1 \neq 0 \end{cases}$ أو $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = k\pi$ ، ومنه : المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z'

عدداً حقيقياً هي المستقيم (AB) ما عدا النقطة B .

(ب) يكون z' تخيلياً صرفاً معناه : $z' = 0$ أو $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$

أي : $\frac{z-1}{z+1} = 0$ أو $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1 \neq 0 \end{cases}$ أو المثلث AMB قائم في M .

ومنه : المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً تخيلياً صرفاً هي الدائرة ذات القطر AB

ما عدا النقطة B .

(ج) يكون $|z'| = 1$ ، أي : $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$ ، أي : $|z-1| = |z+1|$ ، أي : $AM = BM$.

ومنه : المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون $|z'| = 1$ هي محور قطعة المستقيم $[AB)$.

(2) أ) لنبين أن : $(z'-1)(z+1) = -2$.

$$, (z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{z-1-z-1}{z+1}\right)(z+1) : \text{أي} , (z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1)$$

$$\text{أي} : (z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{-2}{z+1}\right)(z+1) : \text{ومنه} : (z' - 1)(z + 1) = -2 \text{ وهو المطلوب.}$$

$$\text{(ب) لدينا} : (z' - 1)(z + 1) = -2 : \text{أي} , |z' - 1| \cdot |z + 1| = 2 \text{ و } \arg[(z' - 1)(z + 1)] = \pi + 2k\pi$$

$$\text{أي} : AM' \times BM = 2 \text{ و } \arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi + 2k\pi .$$

$$\text{ومنه} : AM' \times BM = 2 \text{ و } (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi \text{ , وهو المطلوب.}$$

$$(3) \text{ إذا كانت } M \text{ تنتمي إلى الدائرة } (T) \text{ ذات المركز } B \text{ ونصف القطر } 2 \text{ هذا يعني أن} : BM = 2 .$$

$$\text{أي} : AM' \times BM = 2 \text{ تصبح} : AM' \times 2 = 2 \text{ ومنه} : AM' = 1 .$$

$$\text{إذن} : M' \text{ ستكون تنتمي إلى الدائرة } (T') \text{ ذات المركز } A \text{ ونصف القطر } 1 .$$

$$(4) \text{ لإثبات أن} : M' \in [AN) \text{ يكفي تبين أن} : \overrightarrow{AM'} \text{ و } \overrightarrow{AN} \text{ مرتبطين خطيا ولهما نفس الإتجاه , أي أن} :$$

$$. (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$$

$$(*) \text{ لنحسب } (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) :$$

$$\text{حسب علاقة شال يكون لدينا} : (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AN}; \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi : \text{أي} :$$

$$(\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = -\arg(z_N - z_A) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi : \text{أي} , (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AN}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$$

$$\text{أي} : (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = \arg(-z-1) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi : \text{أي} , (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = -\arg(-\bar{z}-1) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$$

$$\text{أي} : (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = \arg[-(z+1)] + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi : \text{أي} ,$$

$$: \text{أي} , (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = \arg(-1) + \arg(z+1) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$$

$$\text{و } (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = \pi + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi : \text{أي} , (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = \pi + \arg(z+1) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$$

$$\text{نعلم أن} : (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \pi + 2k\pi : \text{أي} , (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = 2\pi + 2k\pi .$$

$$\text{ومنه} : (\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi \text{ و عليه فإن} : M' \in [AN) .$$

$$(5) \text{ أ) لدينا} : K \text{ لاحظتها } t = -2 + i\sqrt{3} : \text{أي} , t+1 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$. t+1 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} : \text{ومنه} , t+1 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \text{أي} , |t+1| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$$

(ب) لنبين أن النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) :

(*) نحسب الطول BK : $BK = |z_K - z_B| = |-2 + i\sqrt{3} + 1| = |-1 + i\sqrt{3}|$ ، ومنه : $BK = 2$.

إذن : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 .

(6) (*) بما أن : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ، فحسب السؤال (3) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T')

ذات المركز A و نصف القطر 1 .

(*) و حسب السؤال (4) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN]$ حيث : $z_N = -\overline{z_K}$.

أي : $z_N = 2 + i\sqrt{3}$.

- من هذا و ذاك نستنتج أن النقطة K' هي نقطة تقاطع الدائرة (T') مع نصف المستقيم $[AN]$.

11.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2 + 4z - \frac{25}{4} = 0$.

. إستنتج حلول المعادلة : $-\left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right)^2 + 4\left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right) - \frac{25}{4} = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ وحدته 2cm .

- علم النقط A, B, C, D لواحدها على الترتيب : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 2 + \frac{3}{2}i$, $z_D = 2 - \frac{3}{2}i$.
1 - ما طبيعة الرباعي ABCD ؟ .

3. نعتبر M نقطة من المستقيم (AB) ترتيبها α والنقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين قيمة العدد α حتى تكون N على إستقامة مع النقطتين O و A .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقيا سالبا تماما .

حل التمرين:

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2 + 4z - \frac{25}{4} = 0$.

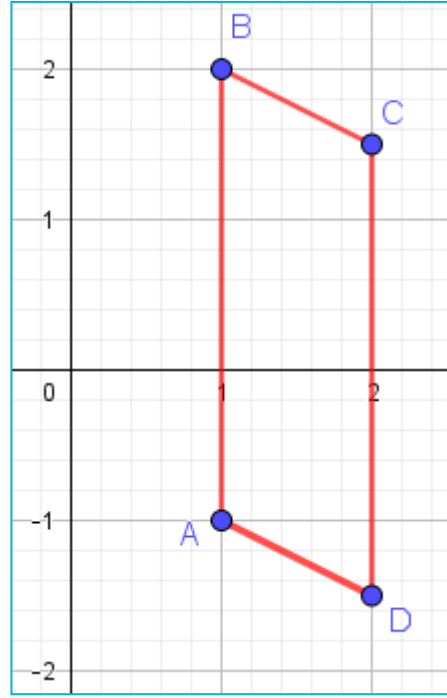
نجد : $\Delta = (3i)^2$ و $z_1 = 2 - \frac{3}{2}i$, $z_2 = 2 + \frac{3}{2}i$.

(*) إستنتاج حلول المعادلة :

مما سبق لدينا : $z+1-\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$ أي : $z=1-i$

أو $z+1-\frac{1}{2}i=2+\frac{3}{2}i$ أي : $z=1+2i$.

(2) * تعليم النقط :



(*) طبيعة الرباعي ABCD :

من خلال الشكل نلاحظ أن الرباعي هو متوازي أضلاع

- لنبين ذلك :

بعد الحساب نجد أن : $Z_D - Z_A = Z_C - Z_B$ ، ومنه :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ، إذن الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع .

(3) لدينا : النقطة M نقطة من (AB) وبما أن للنقطتين

A و B نفس الفاصلة 1 فستكون : $M(1; \alpha)$.

لدينا : النقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، أي : $Z_N - Z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_M - Z_O)$ ، أي :

$Z_N = i(Z_M)$ ، أي : $Z_N = i(1+i\alpha)$ ، أي : $Z_N = i - \alpha$ ، ومنه : $Z_N = -\alpha + i$.

(*) تكون النقطة N على إستقامية مع O و A إذا كان :

العدد $\frac{Z_N - Z_O}{Z_A - Z_O}$ حقيقيا ، أي : $(\frac{-\alpha + 1}{1 - i}) \in \mathbb{R}$.

$$\text{أي : } \frac{z_N}{z_A} = \frac{-\alpha - 1}{2} + i \frac{1 - \alpha}{2}$$

إذن : تكون N على استقامية مع O و A إذا كان :

$$\frac{1 - \alpha}{2} = 0 \text{ ، ومنه : } \alpha = 1 .$$

$$(4) \text{ العدد } \frac{z-1+i}{z-1-2i} \text{ حقيقي سالب معناه أن :}$$

$$\arg\left(\frac{z-1+i}{z-1-2i}\right) = \pi + 2k\pi \text{ و } \frac{z-1+i}{z-1-2i} \neq 0$$

$$\text{أي : } \arg(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi \text{ و } \begin{cases} z \neq z_A \\ z \neq z_B \end{cases}$$

ومنّه : مجموعة النقط M هي قطعة المستقيم $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B .

12.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نفرض النقطتين $A(2-i), B(2+i)$ و نعتبر التحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2 .

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$. عين لاحقة النقطة E صورة I بالتحاكي h .

3. أحسب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_E}$. إستنتج طبيعة الرباعي $OAEB$ ، ثم أحسب مساحته .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 4$.

حل التمرين:

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$. نجد : $\Delta = (2i)^2$ و $z_1 = 2 + i$ ، $z_2 = 2 - i$.

(2) لدينا : I هي منتصف $[AB]$ ، أي أن : $z_I = 2$. لدينا : النقطة E هي صورة I بالتحاكي h ، أي : $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OI}$ ، أي : $z_E = 2.z_I$ ،

ومنّه : $z_E = 4$.

$$(3) \text{ حساب العدد } \frac{Z_B - Z_A}{Z_E} : \text{ بعد الحساب نجد : } \frac{Z_B - Z_A}{Z_E} = \frac{1}{2}i$$

(* طبيعة الرباعي $OAEB$: لدينا : I منتصف $[AB]$ و أيضا منتصف $[OE]$ ، أي :

$$\arg(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ أي : } \frac{Z_B - Z_A}{Z_E} = \frac{1}{2}i$$

إذن : القطران متعامدان ، و عليه سيكون الرباعي $OAEB$ معين .

$$(*) \text{ حساب مساحة الرباعي } OAEB : S_{OAEB} = \frac{AB \times OE}{2} = \frac{4}{2} = 2 (u.a)$$

(4) تعيين مجموعة النقط M :

$$\text{لدينا : } |Z_A - z|^2 + |Z_B - z|^2 = 4 \text{ ، أي : } MA^2 + MB^2 = 4 \text{ ، نعلم أن : } AB^2 = 4$$

$$\text{و منه : } MA^2 + MB^2 = AB^2 \text{ (مبرهنة فيثاغورس)}$$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها AB . ملاحظة : يمكن وضع $z = x + iy$ فنجد معادلة الدائرة .

3

تمارين باكالوريا 2008-2019 محلولة / شعبة علوم

السنة	الموضوع	نص التمرين
2008	الموضوع 1	(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2 - (1+2i)z - 1+i = 0$. نرمز للحلّين بـ z_1 و z_2 حيث $z_1 < z_2$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي . (2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن A, B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $1, z_1$ و z_2 . ليكن z العدد المركّب حيث: $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$. أ- إنطلاقاً من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ حيث θ, θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية . ب- أكتب z على الشكل الأسّي . ج- أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته .
2008	الموضوع 2	(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$ (2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتهما z_A و z_B على الترتيب حيث: $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$. عيّن z_0 لاحقة النقطة 0 مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$. (3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$. أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) . (4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k ($k > 0$) و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$ ب- تطبيق: عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right)$
2009	الموضوع 1	$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z^2 - 2z + 4)(z - 1 - i)$ و z عدد مركب . (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$. (2) نضع: $z_1 = 1 + i$، $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي . ب- أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي . ج- إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. (3) أ- n عدد طبيعي، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً . ب- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$. (2) نسمي z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة . أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي . ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$ أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC. ج- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .	2009 الموضوع 2
نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحتقيهما على الترتيب : $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$ (1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي . (2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها z النقطة M' لاحتقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$ أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S . ب- عيّن z_C لاحتقتها النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S . ج- استنتج طبيعة المثلث ABC . (3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$. أ- عيّن z_D لاحتقتها النقطة D . ب- عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$. (4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحتقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما. أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) . ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ) .	2010 الموضوع 2
(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي . (2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$. أ- بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O . ب- عيّن زاوية الدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B . ج- بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D . د- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.	2010 الموضوع 2
بر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -4 + i$	2011 الموضوع 1

(1) أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. ب - عيّن طوليلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC. (1) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث : $z' = iz - 1 - i$ أ - عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة. ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T. (3) لتكن D ذات الاحقة $z_D = -6 + 2i$ أ - بين أن النقط A ، C و D في استقامية. ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D. ج - عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D.	
نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 - 2i , z_B = 3 + 2i \text{ و } z_C = 4i$ (1) أ - علّم النقط A ، B و C. ب - ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك . ج - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$. (2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\ \vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\ = 12$ (3) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$. نسمي z_0 ، z_1 حلّي هذه المعادلة . ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z. - عيّن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $z - z_0 = z - z_1$	2011 الموضوع 2
(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$) - حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة . (2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A = 1 + i\sqrt{5} \text{ و } z_B = 1 - i\sqrt{5}$ - تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها. (3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$ النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$. أ - عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM. ب - إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها تحقق أن E تنتمي إلى (γ).	2012 الموضوع 1
(1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : أ - تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.	2012 الموضوع 2

ب - حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 6 \quad , \quad z_B = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي.

ج - إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج - بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامة.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$$(I) \quad z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \quad \text{حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي} .$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرسم إلى حلّي المعادلة (I) ب- z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

ب - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه

A

و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

ج - عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د - أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $(E) \quad z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر .

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة (z) من M إلى النقطة

$$M'(z')$$

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i \quad \text{أ- بيّن أن :}$$

ب - أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D حيث : $2\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{0}$.

أ- بيّن أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

ب - أحسب z_D لاحقة النقطة D. ج - بيّن أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD	
(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$ (2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$ أ- أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي. ب - أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$. ج - بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها . د- أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟ (3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ أ- أكتب العبارة المركّبة للدوران R . ب - عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في إستقامة . ج - عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .	2014 الموضوع 1
(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$ (2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$) تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ ، $z_C = 1-2i$ أ- أنشئ النقط A ، B و C . ب - جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) . ج - أحسب مساحة المثلث ABC . (3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ أ- عيّن الكتابة المركّبة للتشابه S . ب - بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$. (4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $z = iz + 1 + 2i$.	2014 الموضوع 2
(I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β . (II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.	2015 الموضوع 1

(1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

ب- تحقق أن العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1+i$

أ- حدّد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحوّل D إلى A .

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

2015
امور
2

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ ، $z_C = -(z_A + z_B)$.

(1) أ- أكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب- استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

ج- أنشئ الدائرة (γ) و النقط A ، B و C .

(2) أ- تحقق أن : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

ج- عيّن و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

(3) أ- عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحوّل C إلى A .

ب- أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

2016
امور
1
الدورة
الاولى

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركّب z

حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركّب z' حيث : $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

(2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث : $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \overline{z_1}$.

أ- أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي .

ب- بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له .

(3) نضع : $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ (Γ) .

(4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 .

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة .

ب- أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج- عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

2016
امور
2

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و

$$z_C = \overline{z_B}$$

أ- أكتب z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب - بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

(3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته .

ب - عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

ج - عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على ، ثم تحقق

$$A \in (\Gamma)$$

2016

امور
1الدورة
الثانية

(1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن : $P(2\sqrt{3}) = 0$

ب - جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = -\sqrt{3} + 3i \quad , \quad z_B = -\sqrt{3} - 3i \quad \text{و} \quad z_C = 2\sqrt{3}$$

أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب - بيّن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحوّل النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .

ج - استنتج طبيعة المثلث ABC .

د- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$

(3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2016

امور
2الدورة
الثانية

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E) \quad 2z^3 + 3z^2 - 3z + 5 = 0$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

(1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z} + 5)(z^2 - \bar{z} + 1) = 0$.

ب - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -\frac{5}{2} \quad , \quad z_C = -1 \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب - أنشئ النقط A, B, C و D .

ج - أثبت أن : $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

د- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC . (4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z + 1 = kz_B$. لمّا يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.	
حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$. (II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي للاحقاتها : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$. (1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي . (2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD . (3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$. تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها . (4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h . عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .	2017 الموضوع 1
المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي : (1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z + 1 - i}{z - i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$. (2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z + 2)(\overline{z} + 2) = z + 2 ^2$. (3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$. (4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$. صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9 . (5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ فإن $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح .	2017 الموضوع 2
حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$. (II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث : $\ \vec{u}\ = 2cm$. نعتبر النقط A ، B و C التي للاحقاتها : $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$. (1) أ - أكتب z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركّب z_C . ب - عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C . (2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S . أ - أكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ، ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' . ب - أحسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.	2017 الموضوع 1 الدورة الاستثنائية

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتاتها على الترتيب :

$$z_A = -3 - 2i \quad , \quad z_B = 1 + i \quad \text{و} \quad z_C = 4 - 3i$$

(1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C .

(2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عيّن كلا من z_I و z_G لاحتتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أن النقط B ، G و I في إستقامة .

(4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسب إلى I . حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

(5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$.

أ - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

ب - عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$A, B \text{ و } C \text{ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : } z_A = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{و}$$

$$z_C = \overline{z_B}$$

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) أ - تحقق أن : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدّد طبيعة المثلث OBC .

ب - إستنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

(4) نسمي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي تحقق : $|z| = \left| \overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 2 + i \quad , \quad z_B = 4 + i \quad \text{و} \quad z_C = \overline{z_A}$$

(1) تحقق أن : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

(2) D نقطة من المستوي لاحتها z_D حيث : $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D .

(3) أحسب z_G لاحة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول G إلى D .

$$(4) \text{ عَيِّن } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ (} M \text{ تختلف عن } C \text{) بحيث : } \arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

2019
الموضوع
1

$$(I) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحتقاتها :
 i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب .

$$(1) \text{ أكتب العدد المركب } \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \text{ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث } ABC$$

$$(2) \text{ من أجل كل عدد مركب } z \text{ يختلف عن } 2+i \text{ نضع : } f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$$

$$أ - \text{ عَيِّن المجموعة } (E) \text{ للنقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ و التي تحقق } |f(z)| = \frac{1}{2}$$

$$ب - \text{ بَيِّن أن العدد } [f(i)]^{1440} \text{ حقيقي موجب .}$$

$$(3) \text{ نعتبر الدوران } r \text{ الذي مركزه النقطة } C \text{ و زاويته } \frac{\pi}{2}$$

أ - عَيِّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بَيِّن أن النقط A ، D و C في إستقامة .
ب - استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

2019
الموضوع
2

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$.

$$(1) أ - أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي .$$

$$ب - \text{ أحسب العدد } \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$$

(2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عَيِّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .
ب - استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

$$(3) \text{ أكتب العدد المركب } z_C - z_A \text{ على الشكل الأسّي .}$$

$$(4) \text{ جد قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي يكون من أجلها العدد المركب } \left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n \text{ عددا حقيقيا .}$$

(5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحتقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

$$\text{عَيِّن } (E) \text{ مجموعة النقط } M \text{ التي يكون من أجلها } \frac{z_A - z}{z_C - z} \text{ عددا حقيقيا موجبا تماما .}$$

حلول التمارين

(3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2 - (1+2i)z - 1+i = 0$.

لدينا : $\Delta = (1+2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1+i) = 1$ و منه للمعادلة حلين هما :

$$z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

• تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{2i}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{i}{2}\right)^{1004} = \frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}} = \frac{1}{2^{1004}}$$

(4) أ- إعتاداً من التعريف $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

• لبرهان أن : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن : $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = 1$.

لدينا : $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = e^{(-i\theta+i\theta)} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

• إثبات : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i\theta_1-i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ب- كتابة z على الشكل الأسّي .

$$z = \frac{z_2-1}{z_1-1} = \frac{1+i-1}{i-1} = \frac{i}{i-1} = \frac{i(-i-1)}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{و منه} \quad z = \frac{z_2-1}{z_1-1}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و منه} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{و بفرض } \theta \text{ عمدة للعدد المركب } z, \text{ يكون : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{و منه } \arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ج- كتابة z على الشكل المثلثي :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

• استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين نسبته و زاويته :

$$\text{لدينا : } z = \frac{z_2-1}{z_1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_1-1) \quad \text{و منه} \quad z_2-1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_1-1)$$

$$\text{و نسبته } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و زاويته } -\frac{\pi}{4}$$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$
لدينا: $\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times (-2 - 6i) = 7 + 24i = 7 + 2 \times 4 \times 3i = 16 - 9 + 2 \times 4 \times 3i = (4 + 3i)^2$

(يمكن إستخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

و منه للمعادلة حلين مركبين هما: $z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$ و $z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$

(2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

(3) كتابة z_C على الشكل الجبري:

$$z_C = \frac{4 - i}{1 + i} = \frac{(4 - i)(1 - i)}{2} = \frac{4 - i - 4i - 1}{2} = \frac{3 - 5i}{2}$$

• إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

يكفي أن نثبت أن: $\omega C = \frac{1}{2}AB$ أي: $|z_C - z_\omega| = \frac{1}{2}|z_B - z_A|$

و،

$$|z_B - z_A| = |-2 - 2i - 2 - i| = |-4 - 3i| = 5:$$

$$|z_C - z_\omega| = \left| \frac{3 - 5i}{2} - \left(-\frac{1}{2}i\right) \right| = \left| \frac{3 - 2i}{2} \right| = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A|$$

و منه $C \in (\Gamma)$.

(4) أ - التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته $k (k > 0)$ و زاويته θ معناه:

$$\bullet S M_0 = M_0$$

• من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0 ، $S M = M'$ ، معناه:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| = k \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta [2\pi] \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} |z' - z_0| = k |z - z_0| \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta [2\pi] \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} M_0 M' = k M_0 M \\ \overrightarrow{M_0 M}, \overrightarrow{M_0 M'} = \theta \end{array} \right.$$

و منه $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = k e^{i\theta}$ أي: $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$ هي عبارة التشابه S .

ب - تطبيق: تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}i$ أي ω و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب .

(4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \text{ أو } z^2 - 2z + 4 = 0$$

لنحل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$:

لدينا: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما:

$$z_2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي: $S = \{1 + i; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

(5) نضع: $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسّي:

لدينا: $z_1 = 1 + i$ و منه: $|z_1| = \sqrt{2}$.

$$\text{و بفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1 \text{ ، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ و منه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا: $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ و منه: $|z_2| = 2$.

$$\text{و بفرض } \theta_2 \text{ عمدة للعدد المركب } z_2 \text{ ، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ و منه } \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن: $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب- كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

ج- إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

(6) أ - n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً.

$$\text{لدينا : } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R} \quad \text{يكافئ} \quad \frac{7n\pi}{12} = k\pi \quad \text{يكافئ} \quad n = 12k \quad \text{مع} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\text{ب - حساب قيمة العدد : } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} e^{i\frac{7 \times 456\pi}{12}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456} e^{266i\pi} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228} = \frac{1}{2^{228}}$$

تصحیح مقترح للتمرین [4][باك 2009][م2]

(3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2i\sqrt{3})^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}$$

(4) أ - كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } z_1 = 1-i\sqrt{3} \quad \text{و منه : } |z_1| = 2$$

$$\text{و بفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1 \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{و منه } \arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا : } z_2 = \overline{z_1} \quad \text{و منه : } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب - A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 1-i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

حساب الأطوال :

$$BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad AC = |z_C - z_A| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = 3 \quad \text{و} \quad AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ و منه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيثاغورس .

ج - إيجاد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

$$|z| = \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ لدينا :}$$

$$z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\frac{3}{2} - i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \text{ و } \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

د- حساب z^3 ، z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

$$z^3 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^3 = \frac{1}{2^3} e^{i\pi} = \frac{1}{8} e^{i\pi} = -\frac{1}{8} \text{ و } z = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

$$z^6 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^6 = \frac{1}{2^6} e^{i2\pi} = \frac{1}{64} \text{ و}$$

$$\text{و لدينا : } z^{3k} = (z^3)^k = \left(-\frac{1}{8} \right)^k \text{ و منه } z^{3k} \text{ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي } k .$$

تصحيح مقترح للتمرين [5][باك 2010][1م]

(5) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } z_A = 1 + i \text{ و منه : } |z_A| = \sqrt{2} .$$

$$\text{و بفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ و منه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

$$\text{إذن : } z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

$$\text{لدينا : } z_B = 3i \text{ و منه : } |z_B| = 3 .$$

$$\text{و بفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin \theta_B = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \text{ و منه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

$$\text{إذن : } z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

(6) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ بحيث : $\alpha = 2i$ و $\beta = 6 + 3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |\alpha| = 2$.

زاوية التشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

$$\text{لدينا : } \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i = z_B \text{ و منه النقطة } B \text{ هي مركز التشابه المباشر } S .$$

ب - عيّن z_C لائحة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ و منه $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$ ، إذن : $z_C = 4 + 5i$.
ج - طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = 2BA \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. : \text{لدينا : النقطة } C \text{ صورة النقطة } A \text{ بالتشابه المباشر } S \text{ الذي مركزه } B \text{ ونسبته } 2 \text{ و هذا يعني :}$$

و منه المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B .

$$(7) \text{ النقطة } D \text{ مرجح الجملة } \{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\} .$$

أ- تعيين z_D لاحتقة النقطة D :

$$\text{لدينا : } z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2} \text{ و منه } z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2} \text{ إذن : } z_D = 5 + 3i .$$

ب - تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير :

$$\text{لدينا : } z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i \text{ و } z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5 + 3i) = -1 + 2i$$

و منه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

و لدينا مما سبق : ABC مثلث قائم و $BC = 2BA$ و بالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل .

(8) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتهما z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها

$$\frac{z_B - z}{z_D - z} \text{ عددا حقيقيا موجبا تماما .}$$

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

$$\text{لدينا : } \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6 + 3i)}{5 + 3i - (6 + 3i)} = \frac{-6}{-1} = 6 \text{ و منه العدد } \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} \text{ حقيقي موجب تماما و بالتالي } E \in (\Delta) .$$

$$\text{ب - } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overline{MD}; \overline{MB}) .$$

$$\text{العدد المركب } \frac{z_B - z}{z_D - z} \text{ حقيقي موجب تماما يكافئ } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 0 + 2k\pi \text{ أي } (\overline{MD}; \overline{MB}) = 0 + 2k\pi$$

و بالتالي المجموعة (Δ) هي : $(\Delta) = [BD] - (BD)$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$)

تصحيح مقترح للتمرين [6][باك 2010][2م]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i \text{ و } z_2 = \frac{6 - 6i}{2} = 3 - 3i$$

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } z_1 = 3 + 3i \text{ و منه : } |z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} .$$

$$\text{و بفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1 \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، و منه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

$$\text{لدينا : } z_2 = \overline{z_1} = 3 - 3i \text{ و منه : } z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} .$$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 3 + 3i$$

أ- تبيان أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O :
 لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ أي : $OA = OB = OC = OD$ و منه النقط A, B, C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.

ب- تعيين زاوية الدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B :

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z_A}}{z_A}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ج- إثبات أن النقط A, O و C في استقامة و كذلك النقط B, O و D .

$$\text{يكفي إثبات أن كلا من } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} \text{ و } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} \text{ حقيقي .}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} = \frac{z_B}{z_D} = -1 \text{ و } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \frac{z_A}{z_C} = -1$$

(يمكن استخدام كون $z_A + z_C = 0$ و $z_B + z_D = 0$ و بالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د - طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان و متقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، و لدينا $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$ و منه الرباعي $ABCD$ مربع

تصحيح مقترح للتمرين [7][باك 2011][1م]

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i, \quad z_A = -i$$

(1) أ - كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + i - (-i)}{2 + 3i - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{20i}{20} = i$$

ب - طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له :

$$\begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ و منه}$$

طبيعة المثلث ABC :

$$\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ لدينا :}$$

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

(1) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل $z' = \alpha z + \beta$: بحيث $\alpha = i$ و $\beta = -1 - i$.
لدينا : $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| = |i| = 1$ و منه التحويل T هو دوران .

زاوية للدوران T هي : $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $z_A = -i$ و $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i$ و منه النقطة A هي مركز الدوران T .
ب - صورة النقطة B بالتحويل T :

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T و منه $z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = i - 4$ أي : $z_{B'} = z_C$.
إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .
(3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ - تبين أن النقط A ، C و D في استقامية : يكفي إثبات أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-4+i - (-i)}{-6+2i - (-i)} = \frac{-4+2i}{-6+3i} = \frac{2(-2+i)}{3(-2+i)} = \frac{2}{3}$ و منه النقط A ، C و D في استقامية .

ب - تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العلاقة المركبة للتحاكي h من الشكل : $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ بحيث k هي نسبة التحاكي h .

لدينا : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$ و منه نسبة التحاكي h هي : $k = \frac{3}{2}$.

ج - تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العلاقة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$

لدينا : $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+2i - (-i)}{2+3i - (-i)} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{3i(2i+1)}{2(1+2i)} = \frac{3}{2}i$ و منه :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |a| = \frac{3}{2}$.

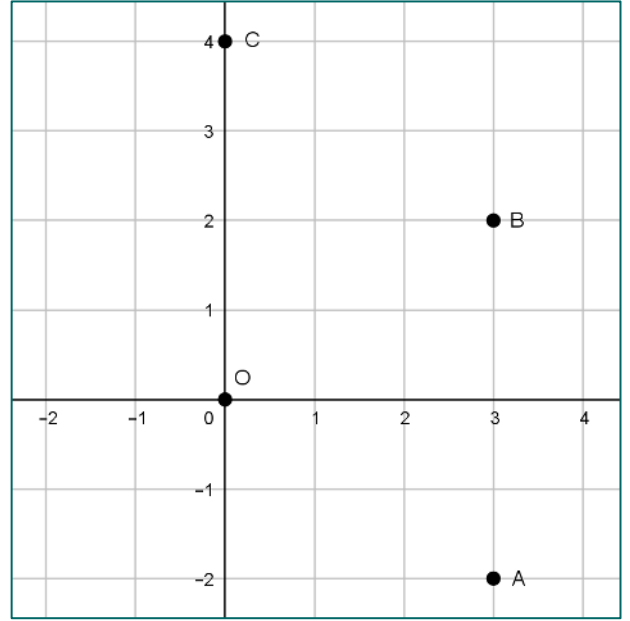
زاوية التشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(يمكن إثبات أن : $S = h \circ T$)

تصحيح مقترح للتمرين [8] [باك 2011] [م2]

$$z_C = 4i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i \quad , \quad z_A = 3 - 2i$$

(4) أ - تعليم النقط A ، B و C :



ب - طبيعة الرباعي $OABC$:

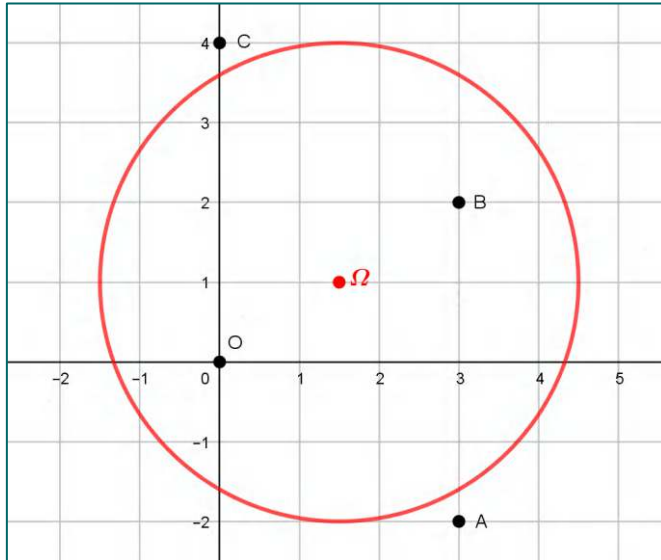
لدينا : $\vec{AB} = \vec{OC}$ و $z_{\vec{OC}} = z_C - z_O = 4i$ أي : $z_{\vec{OC}} = z_{\vec{AB}}$ و $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (3 - 2i) = 4i$
و بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع .
ج - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجح الجملة $\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و منه : $z_{\Omega} = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$ أي : $z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i$

(5) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

$\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$ تكافئ $\|4\vec{M\Omega}\| = 12$ أي $M\Omega = 3$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω و نصف قطرها 3 .

الرسم :



(6) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i = z_B \quad \text{و} \quad z_0 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i = z_A$$

ب- تعيين مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

$|z - z_0| = |z - z_1|$ معناه $AM = BM$ وبالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل)

تصحيح مقترح للتمرين [9][باك 2012][1م]

(4) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$) لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \quad \text{تكافئ} \quad z(z-2+3i) = 3i(z+2i) \quad \text{تكافئ} \quad z^2 - 2z + 6 = 0$$

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -20 = 20i^2 = (\sqrt{20}i)^2 = (2\sqrt{5}i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2-2\sqrt{5}i}{2} = 1-i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2+2\sqrt{5}i}{2} = 1+i\sqrt{5}$$

(5) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_B = 1-i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_A = 1+i\sqrt{5}$$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

$$\text{لدينا : } |z_A| = |1+i\sqrt{5}| = \sqrt{6} \quad \text{و} \quad |z_B| = |1-i\sqrt{5}| = \sqrt{6} \quad \text{و منه } |z_A| = |z_B| \text{ أي : } OA = OB$$

و بالتالي A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

(6) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

$$\text{لدينا : } z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \quad \text{أي} \quad z' = \frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D} \quad \text{و منه} \quad z' = \frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D} \quad \text{أي} \quad OM' = \frac{3CM}{DM}$$

ب- $M \in (\Delta)$ معناه $CM = DM$ و منه $OM' = 3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O و نصف قطرها 3 .

التحقق أن $E \in (\gamma)$:

$$\text{لدينا : } |z_E| = |3i| = 3 \quad \text{أي} \quad OE = 3 \quad \text{و منه} \quad E \in (\gamma)$$

تصحيح مقترح للتمرين [10][باك 2012][2م]

(4) كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

ب- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$$

ب - تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$$P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta$$

$$= z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$$

$$= z^3 - 12z^2 + 48z - 72$$

بالمطابقة نجد $\alpha = -6$ ، $\beta = 12$ و منه $P(z) = (z - 6)(z^2 - 6z + 12)$

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 6)(z^2 - 6z + 12) = 0 \text{ معناه } z - 6 = 0 \text{ أو } z^2 - 6z + 12 = 0 .$$

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة $z^2 - 6z + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2\sqrt{3}i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{6; 3 - i\sqrt{3}; 3 + i\sqrt{3}\}$

(5) أ - كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A = 6$ و منه $|z_A| = 6$ إذن $z_A = 6e^{i0}$

لدينا : $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و منه : $|z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\text{و بفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ و منه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن : $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

لدينا : $z_C = \overline{z_B}$ و منه : $z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب - كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - (3 + i\sqrt{3})}{6 - (3 - i\sqrt{3})} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و منه } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ إذن } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ج - إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} BA = CA \\ (\overline{CA}, \overline{BA}) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{معناه} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{يكافئ} \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(6) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ب- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z' = az + b$ بحيث $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$ و $b = (1-a)z_C$ ، أي : $b = (1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$.
و منه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .
ب- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :
 $z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$
ج- تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامة .
يكفي إثبات أن $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6-2i\sqrt{3}}{6-(3+i\sqrt{3})} = \frac{2(3-i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} = 2$ و بالتالي النقط A ، B و A' في إستقامة .

تصحيح مقترح للتمرين [11][باك 2013][1م]

(4) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية : $(I) \quad z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ حيث α وسيط حقيقي .

لدينا : $\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16\cos^2\alpha - 16 = 16(\cos^2\alpha - 1) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$ و منه للمعادلة حلين

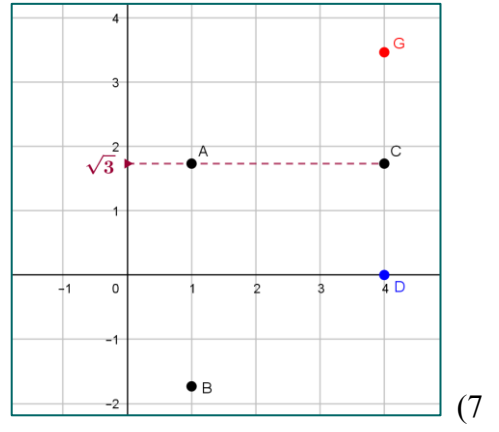
مركبين هما : $z_1 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ و $z_2 = \frac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

(5) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نجد : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

تبيان أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

لدينا : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و منه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\frac{4026\pi}{3}} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(2\pi)} = 1$

(6) أ- تعليم النقط A ، B و C .



ب - كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

و نسبته $\left| \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$.

ج - تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$:

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3}) + 2(4 + i\sqrt{3})}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د - تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع :

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$ معناه $z_B - z_A = z_D - z_G$ و بالتالي $z_D = z_B - z_A + z_G = 4$.

تصحيح مقترح للتمرين [12][باك 2013][2م]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $(E) : z^2 + 4z + 13 = 0$

(4) التحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) :

$$(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$

بما أن $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$ كذلك حل للمعادلة (E) . (E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية

(5) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحتقائهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

العبارة المركبة للتشابه المباشر S : $z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A)$ أي $z' - z_A = \frac{1}{2} i (z - z_A)$ و $z' = \frac{1}{2} iz + \frac{1}{2} iz_A + z_A$ منه

$$z' = \frac{1}{2} iz - \frac{7}{2} - 2i$$

ب - حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C = \frac{1}{2} iz_B - \frac{7}{2} - 2i = \frac{1}{2} i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i = -4 - 2i$$

(6) لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$.

أ - تبيان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما:

لدينا $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ و منه $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$ أي $3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب.

ب - حساب z_D لاحقة النقطة D .

$$z_D = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-3(-2-3i) + i}{-2} = \frac{6+9i+i}{-2} = -3-5i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i \quad \text{ج - تبيان أن:}$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3-5i - (-2-3i)}{-4-2i - (-2-3i)} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{i(i-2)}{-2+i} = i$$

طبيعة المثلث ACD :

$$\left\{ \begin{array}{l} AD = AC \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{معناه} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{يكافئ} \quad \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$$

و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين.

4.

تمارين بكالوريا 2008-2019 / شعبة تقني رياضي

[باك 2008][م1][4 ن]

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كمايلي :

$$z^3 + (2 - 4i)z^2 - (6 + 9i)z + 9(-1 + i) = 0 \quad (*)$$

(1) بيّن أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*).(2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (*) ثم أكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسّي ، حيث $|z_1| < |z_2|$.(3) لتكن A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$.(4) عيّن المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$.(5) تحقق أن النقط O ، B و G في إستقامية ثم عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

التمرين [2]

[باك 2008][م2][4 ن]

 r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي .(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2} \right) z - r^2 = 0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسّي .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتين الحليين .عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

التمرين [3]

[باك 2009][م1][4 ن]

(1) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 2 = 0$.ب - إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق z .(2) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.النقط A ، B و M لواحقتها $(1 - i)$ ، $(1 + i)$ و على الترتيب .أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}^+$.ب - عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$.

التمرين [4]

[باك 2009][م2][4 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 18 = 0$.(2) ليكن العدد المركب $z_1 = 3 - 3i$.أ - أكتب z_1 على الشكل الأسّي .

ب - أحسب طولية العدد z_3 و عمدة له حيث : $z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$. استنتج قيمتي $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقتها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب .

أ - عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقولة $\{(A, 1); (B, -1); (C, \alpha)\}$ مرجحا نرسم له ب G_α .

ب - عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين [5]

[باك 2010] [م1] [5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$.

(2) علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، C ، D و I لواحقتها $z_A = 3 - 2i$ ، $z_C = -3 + i$ و $z_D = -3 - i$ و $z_I = 1$ على الترتيب .

(3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$.

أ - بين أن الجملة تكافئ : $\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$ ، ثم عيّن قيمة z .

ب - B النقطة التي لاحتقتها $z_B = 3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج - لنكن J النقطة التي لاحتقتها $z_J = 1 - 2i$.

أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب z حيث : $z = \frac{z_A - z_J}{z_B - z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين [6]

[باك 2010] [م2] [5 ن]

(1) أ - أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث : $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

(2) يُنسب المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقتها $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ - أحسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له .

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لنكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

أ - تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

التمرين [5]

[باك 2010][م1] [5 ن]

(4) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$.

(5) عَلم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, C, D و I لواحقتها $z_A = 3 - 2i$ ، $z_C = -3 + i$ ، $z_D = -3 - i$ و $z_I = 1$ على الترتيب .

$$(6) \quad \begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$$

أ - بيّن أن الجملة تكافئ : $\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$ ، ثم عيّن قيمة z .

ب - B النقطة التي لاحتقتها $z_B = 3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج - لتكن J النقطة التي لاحتقتها z_J حيث : $z_J = 1 - 2i$.

أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب z حيث : $z = \frac{z_A - z_J}{z_B - z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين [6]

[باك 2010][م2] [5 ن]

(4) أ - أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث : $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

(5) يُنسب المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B و C النقط التي لواحقتها $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ - أحسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له .

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

(6) لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

أ - تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

ب - عيّن المجموعة (E) .

التمرين [9]

[باك 2012][م1] [6 ن]

$$(1) \quad \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$

(2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب :

$$z_{\Omega} = 1 - 2i \text{ و } z_B = -3 \text{ ، } z_A = 3 + 2i$$

$$\text{أ - أثبت أن : } z_B - z_{\Omega} = i(z_A - z_{\Omega})$$

ب - عيّن طبيعة المثلث ΩAB .

(3) h التحاكي الذي مركزه النقطة A و نسبته 2 .

أ - عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h .

ب - عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

ج - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

د - بين أن $ABCD$ مربع .

$$(E) \text{ مجموعة النقاط } M \text{ من المستوي التي تحقق : } \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

أ - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عيّن طبيعة (E) و عناصرها المميزة .

ب - أنشئ المجموعة (E) .

التمرين [10]

[باك 2012][م 2] [5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$$A, B, C \text{ و } D \text{ النقاط التي لواحقها على الترتيب : } z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = -1 - \sqrt{3}i \text{ و } z_D = -1 + \sqrt{3}i$$

أ - أكتب كلا من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسّي .

ب - تحقق أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

(3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و عمدة له حيث n عدد طبيعي .

$$L_n \text{ العدد المركب المعرف بـ : } L_n = z_D \times z_n$$

أ - أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري .

ب - (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = |L_n|$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

- $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب .

أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = \|\vec{OM_1}\| + \|\vec{OM_2}\| + \dots + \|\vec{OM_n}\|$

- جد نهاية S_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين [11]

[باك 2013][م 1] [5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 + 6z + 17 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$$A, B \text{ و } C \text{ النقاط التي لواحقها على الترتيب : } z_A = -4, z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \text{ و } z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) أ - عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

ب - عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME}\| = 10\sqrt{2}$.

(4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين [12]

[باك 2013][م2] [4,5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + 5 - i\sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B .

- جد العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن العناصر المميزة له.

(3) أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$.

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

ج - عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$.

التمرين [13]

[باك 2014][م1] [5,5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

أ - أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

ب - هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.

(3) أ - عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ، محددا نسبته و زاويته.

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) أ - عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 5$

ب - عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z - z_1| = |z - z_3|$.

التمرين [14]

[باك 2014][م2] [4,5 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$.

(1) أ - عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

ب - عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ج - عَيِّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

(2) نسمي B النقطة التي لاحتقتها z_1 حيث : $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أ - عَيِّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب - عَيِّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ج - عَيِّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A, \alpha); (C, \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$.

د - عَيِّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $((1 + \sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

التمرين [15]

[باك 2015][م1] [4 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحتقيهما على الترتيب

z_A و z_B حيث : $z_A = -1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$.
أ - أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب - n عدد طبيعي ، عَيِّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

ج - z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طول العدد z و عمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري .

د - استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

(2) أ - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - أحسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$ ، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع .

التمرين [16]

[باك 2015][م2] [5 ن]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0$ ، حيث θ وسيط حقيقي .

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

(3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = \sqrt{3} - i, \quad z_C = 3\sqrt{3} + i$$

أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - استنتج النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

ج - عَيِّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.

(4) أ - عَيِّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

ب - عَيِّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

[باك 2016][م1][4 ن]

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$.
 (2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A} .$$

أ - أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي .

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0 : \text{ ب - بيّن أن :}$$

$$\text{ج - عيّن قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث يكون } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \text{ عددا حقيقيا .}$$

$$(3) \quad f \text{ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة } M \text{ لاحقتها } z \text{ النقطة } M' \text{ لاحقتها } z' \text{ حيث : } z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z .$$

- أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميزة .
 ب - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .
 ج - عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.
 ج - عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

[باك 2016][م2][4,5 ن]

$$(1) \quad \text{أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z : (2z - \sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0 .$$

ب - أكتب الحلول على الشكل الأسّي .

$$(2) \quad \text{المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}) .$$

$$A, B \text{ و } C \text{ النقط التي لواحقها على الترتيب : } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad c = \sqrt{2} - i\sqrt{2} .$$

أ - عّلم النقط A, B و C في المعلم السابق .

$$\text{ب - نعتبر النقطة } D \text{ صورة النقطة } C \text{ بالتشابه المباشر } S \text{ الذي مركزه } A \text{ و نسبته } 3 \text{ و زاويته } \pi .$$

$$\text{و النقطة } E \text{ صورة النقطة } C \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } O \text{ و زاويته } -\frac{\pi}{2} .$$

$$\text{أحسب اللاحقتين } d \text{ و } e \text{ للنقطتين } D \text{ و } E \text{ على الترتيب .}$$

$$(3) \quad \text{نضع : } z = \frac{d-b}{e-b} .$$

- أ - أكتب العدد z على الشكل المثلثي .
 ب - نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟
 ب - نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

[باك 2017][م1][5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = -i$.

(1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B إلى A .

(3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C و النقطة E صورة النقطة D بالتشابه S .

أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن : $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة النقطة E .

ب - حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$.

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث : $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

التمرين [20]

[باك 2017][م2][5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1 - i)$ و $z_D = \overline{z_C}$.

(1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من z_B و z_D .

ب - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n = (z_B)^n$.

(2) أ - جد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول D إلى A و يحول C إلى B .

ب - أحسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

(3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 2); (C, -1); (D, -1)\}$ ،

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\| = \sqrt{5}$.

بيّن أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة و أنشئها .

التمرين [21]

[باك 2017][الدورة الإستثنائية][م1][5 ن]

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) أ - عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب - عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $z_n = (z_A)^n + (z_B)^n$

أ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$

عبر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$

التمرين [22]

[باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2] [5 ن]

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 2z + 4)(z + 1 - \sqrt{3}) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

(1) بيّن أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC و أحسب مساحته .

(2) أ - أكتب على الشكل الجبري العدد L حيث : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$

ب - بيّن أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$

(3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحة z إلى النقطة M' ذات اللاحة z' و المعروف بـ :

$$z' = (z - z_B)L + z_B$$

- بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة .

(4) لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$

التمرين [23]

[باك 2018][م1] [5 ن]

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$

(1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

(2) لتكن النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته -3

- بيّن أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$

(3) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

(4) أ - بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

ب - جد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا

التمرين [24]

[باك 2018][م2] [5 ن]

(I) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ (E).

ب - أكتب العددين $\frac{1}{z_2}$ و $\frac{1}{z_1}$ على الشكل الأسّي، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(1) أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

ب - استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

(2) جد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$.

(4) بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة ABC بالمثلث تنتمي إلى (γ) .

التمرين [25]

[باك 2019][م1] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقتها على

الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1.

(1) أ) تحقّق أن النقطة C من الدائرة (Γ) .

ب) عيّن قياسا بالراديان للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$ ثم استنتج أن صورة C بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

(2) S التشابه المباشر الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

أ) حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

ب) عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S .

(3) ماهي نسبة التّحاكي h الذي مركزه A حيث $S = hor$ ؟ استنتج أن النقط A ، C و D في استقامة.

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لواحقتها z حيث : $z = z_A + ke^{\frac{i\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

- تحقّق أن النقطة C من المجموعة (E) . ثم حدّد طبيعة (E) .

التمرين [26]

[باك 2019][م2] [5 ن]

(I) أ) تحقّق أن : $(2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$.

ب) عيّن على الشكل الجبري الجذرين التّريعيين L_1 و L_2 للعدد المركّب Z حيث : $Z = -16\sqrt{3} - 16i$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي

$$\text{لاحقاتها } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_B = \frac{1}{2}iz_A, \quad \text{و } z_C = -\frac{1}{4}z_A$$

$$(1) \text{ اكتب } z_A \text{ على الشكل الجبري، ثم بين أن } z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$(2) \text{ استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$(3) S \text{ التشابه المباشر الذي يحول } A \text{ إلى } B \text{ و يحول } B \text{ إلى } C.$$

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

$$(أ) \text{ بين أن: } z' = \frac{1}{2}iz$$

(ب) حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

$$(4) G \text{ النقطة ذات اللاحقة } z_G \text{ مرجح الجملة } \{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$$

$$(أ) \text{ بين أن: } z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$$

- حدّد طبيعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S .



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
والتنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة**

5min  Maths 