



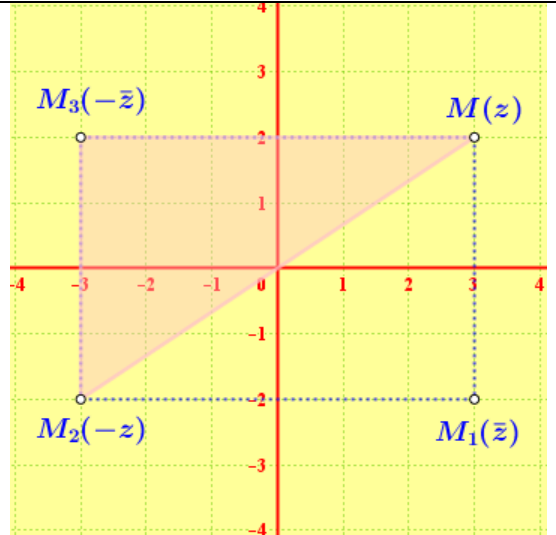
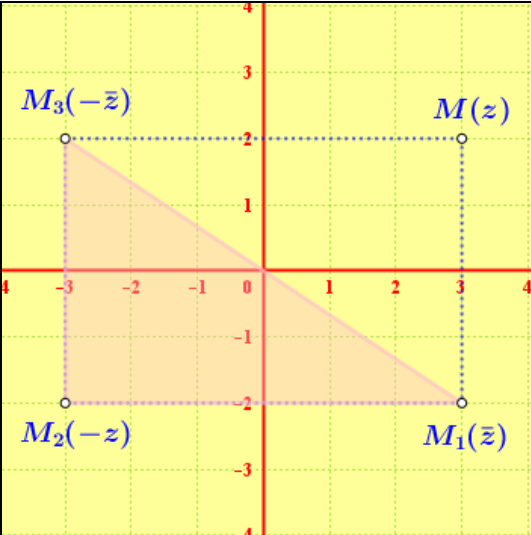
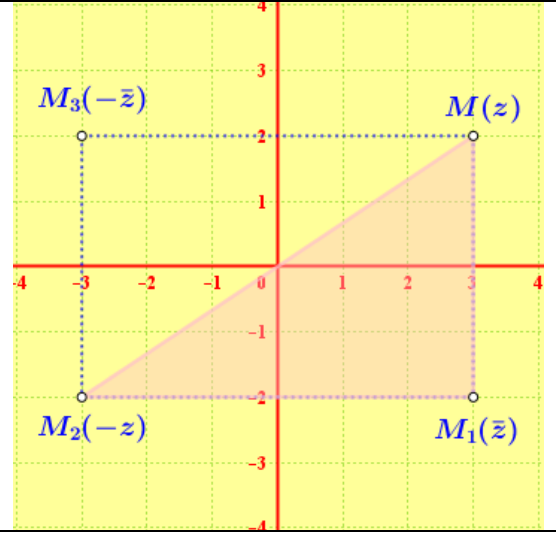
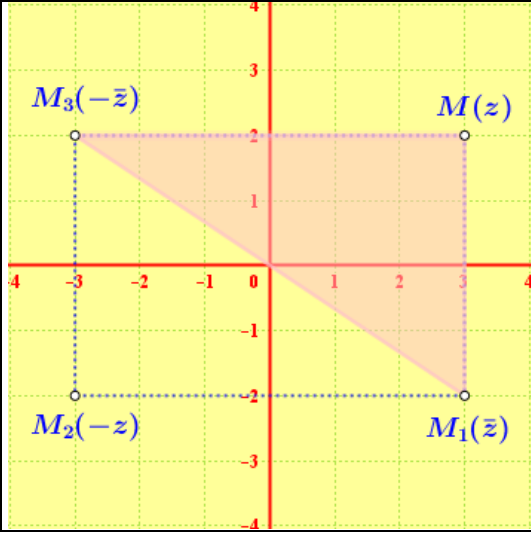
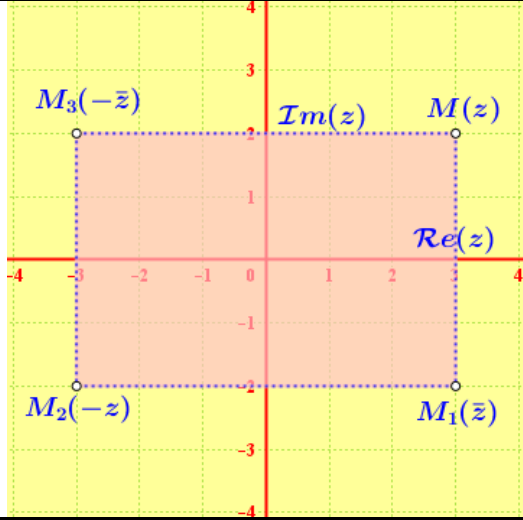
M صورة العدد المركب Z حيث $(Z = x + iy)$ و $(x, y \in \mathbb{R})$ في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$				
$Z \in \mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	$M \in (xx')$		
$Z \in \mathbb{R}^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in (xx') - \{O\}$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$Z \in \mathbb{R}_+$	$\Leftrightarrow$	$M \in [O, \vec{u})$		
$Z \in \mathbb{R}_+^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in]O, \vec{u})$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$Z \in \mathbb{R}_-$	$\Leftrightarrow$	$M \in [O, -\vec{u})$		
$Z \in \mathbb{R}_-^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in]O, -\vec{u})$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}$
$Z \in i\mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	$M \in (yy')$		
$Z \in i\mathbb{R}^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in (yy') - \{O\}$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$Z \in i\mathbb{R}_+$	$\Leftrightarrow$	$M \in [O, \vec{v})$		
$Z \in i\mathbb{R}_+^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in]O, \vec{v})$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$Z \in i\mathbb{R}_-$	$\Leftrightarrow$	$M \in [O, -\vec{v})$		
$Z \in i\mathbb{R}_-^*$	$\Leftrightarrow$	$M \in]O, -\vec{v})$	$\Leftrightarrow$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}$

M صورة العدد المركب Z حيث $(Z = x + iy)$ و $(x, y \in \mathbb{R})$ في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ و بفرض ان $\arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$			
$M_1(-Z)$	$M \xrightarrow{\delta_O} M_1$	M_1 نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم	$\arg(z_1) = (\theta + \pi) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_2(iZ)$	$M \xrightarrow{\mathcal{R}(O, \frac{\pi}{2})} M_2$	M_2 صورة M بالدوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$	$\arg(z_2) = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_3(-iZ)$	$M \xrightarrow{\mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})} M_3$	M_3 صورة M بالدوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$	$\arg(z_3) = \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_4(\bar{Z})$	$M \xrightarrow{\delta(xx')} M_4$	M_4 نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$\arg(z_4) = (-\theta) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_5(-\bar{Z})$	$M \xrightarrow{\delta(yy')} M_5$	M_5 نظيرة M بالنسبة لمحور الترتيب	$\arg(z_5) = (\pi - \theta) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_6(i\bar{Z})$	$M \xrightarrow{\delta(y=x)} M_6$	M_6 نظيرة M بالنسبة لمنصف الربع الاول	$\arg(z_6) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M_7(-i\bar{Z})$	$M \xrightarrow{\delta(y=-x)} M_7$	M_7 نظيرة M بالنسبة لمنصف الربع الثاني	$\arg(z_7) = \left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$

1- في حالة $\Re(z) \neq \Im(z)$

فان

- الرباعي $M M_1 M_2 M_3$ مستطيلا .
- المثلث $M M_1 M_2$ قائم في M_1
- المثلث $M M_1 M_3$ قائم في M
- المثلث $M M_3 M_2$ قائم في M_3
- المثلث $M_3 M_2 M_1$ قائم في M_2

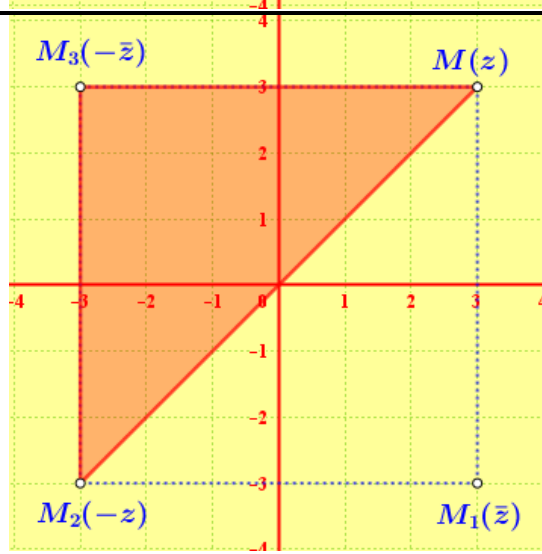
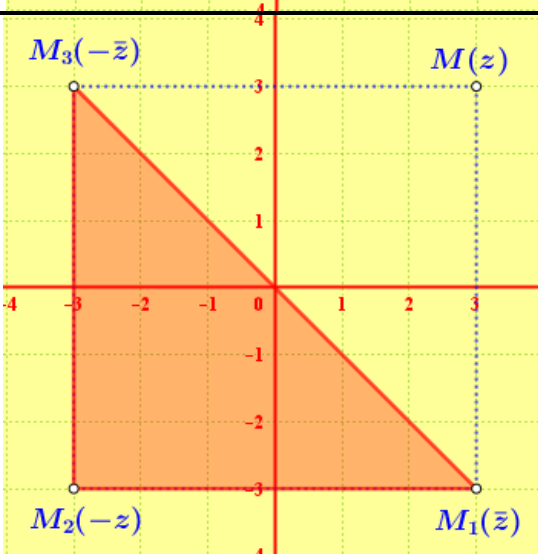
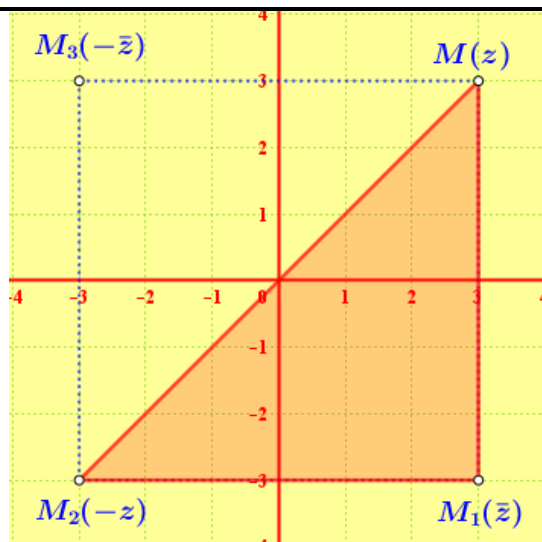
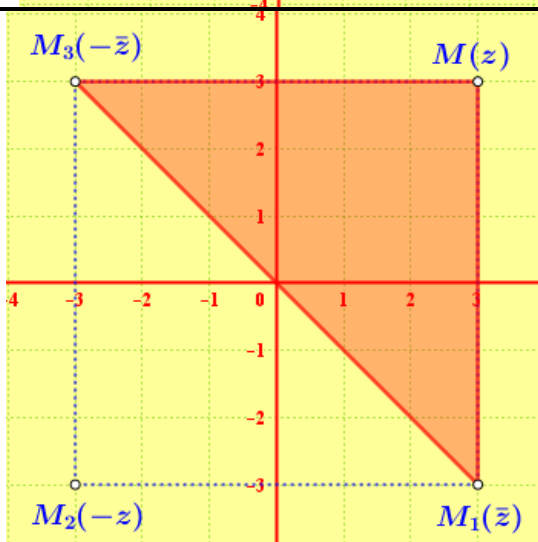
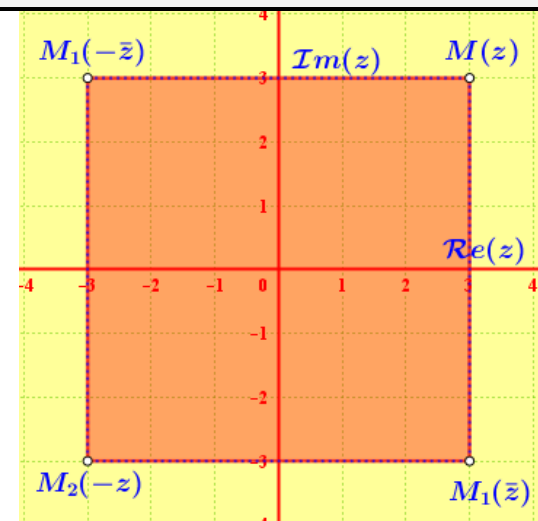


إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

-2 في حالة $\Re(z) = \Im(z)$

فان

- الرباعي $M M_1 M_2 M_3$ مربعاً .
- المثلثات $M M_1 M_3$ ، $M M_1 M_2$ و $M M_3 M_2$ قائمة و متساوية الساقين
- في كل من M_1 ، M ، M_3 و M_2 على الترتيب



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

3- في حالة $\text{Re}(z) \neq \text{Im}(z)$

فان

- الرباعي $M M_5 M_2 M_4$ مستطيلا

- المثلثات $M_4 M M_5$ ،

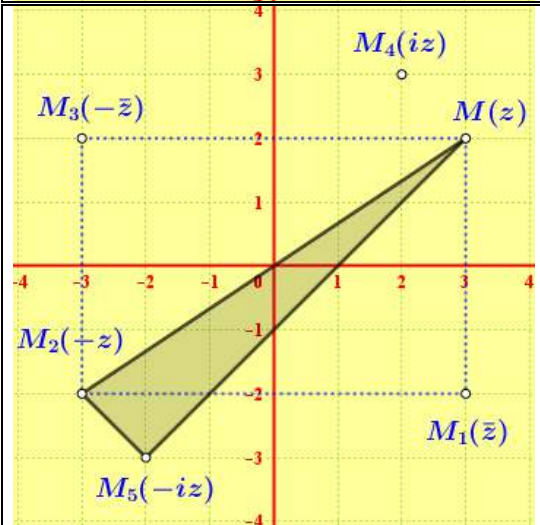
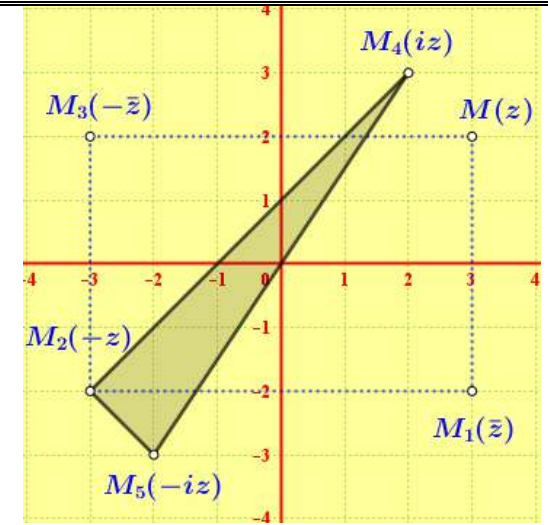
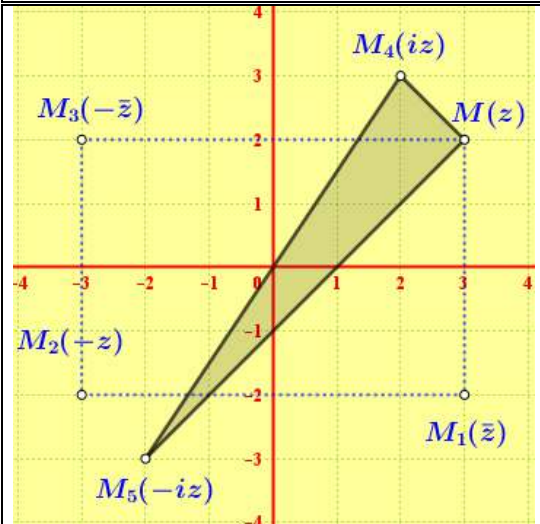
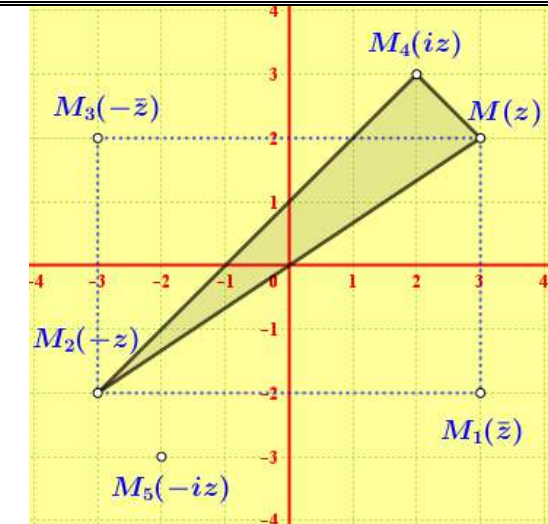
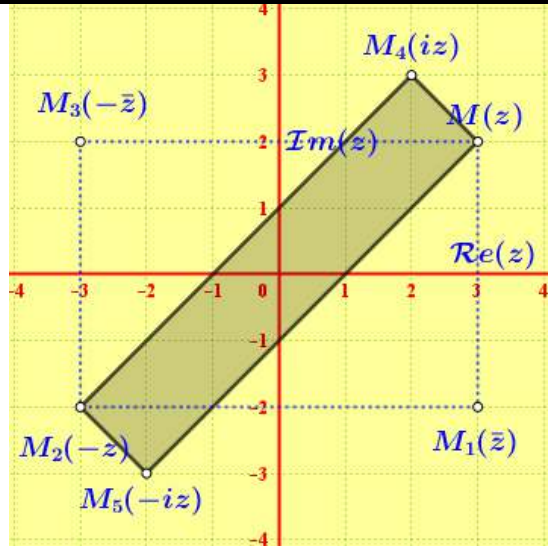
$M M_4 M_2$

$M_4 M_2 M_5$ و $M M_5 M_2$

قائمة

في كل من M ، M_4 ، M_5 و M_2

على الترتيب

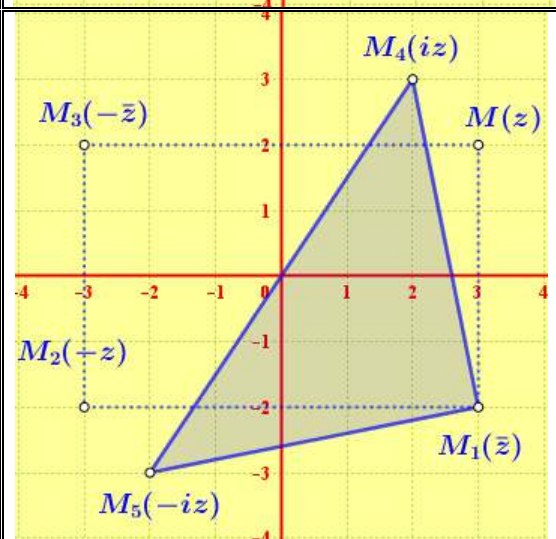
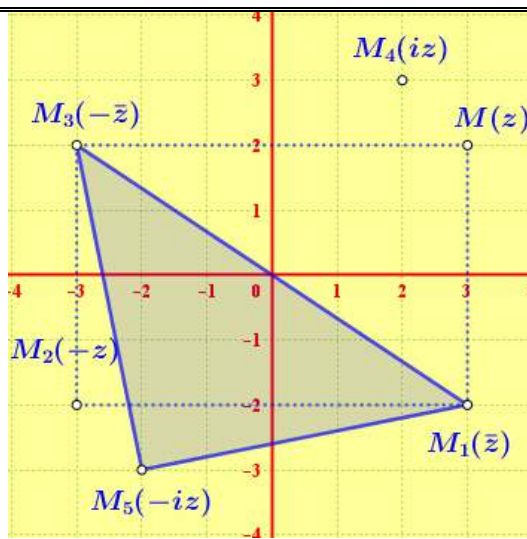
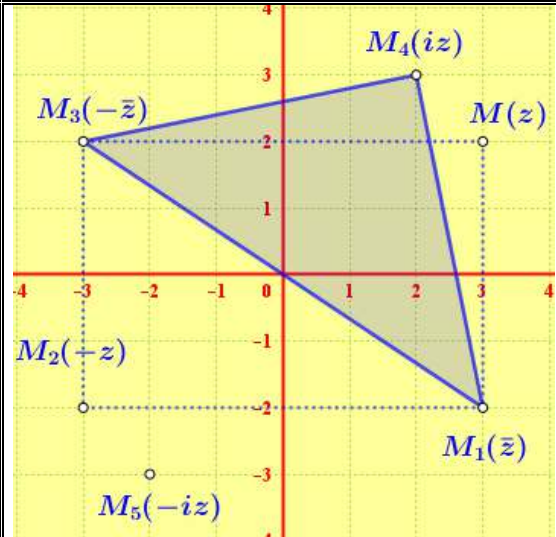
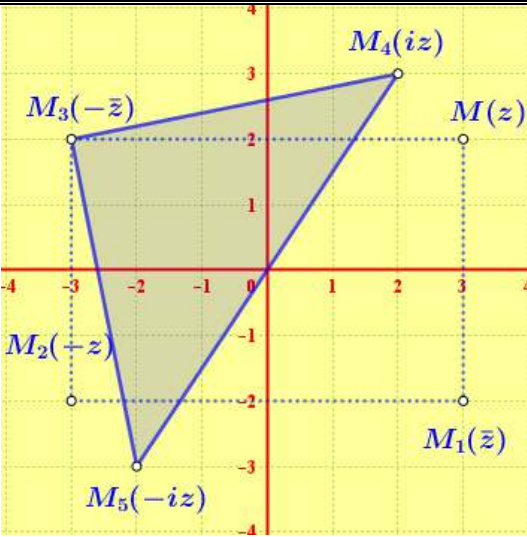
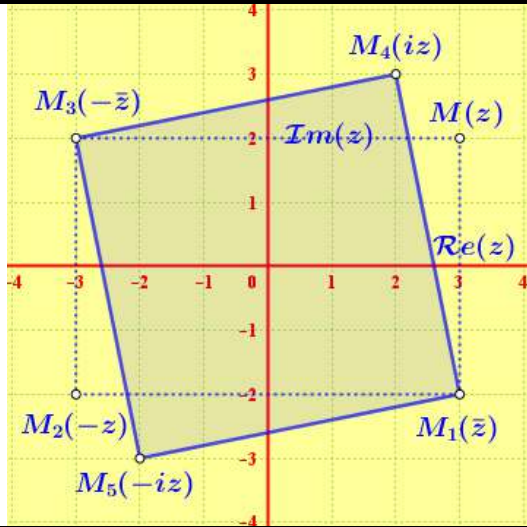


إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

4- في حالة من اجل كل $z \in \mathbb{C}^*$

فان

- الرباعي $M_1M_5M_3M_4$ مربعا .
- المثلثات $M_4M_3M_5$ ، $M_1M_4M_3$ ، $M_3M_5M_1$ و $M_4M_1M_5$ قائمة و متساوية الساقين
- في كل من M_1 ، M_3 ، M_4 و M_5 على الترتيب

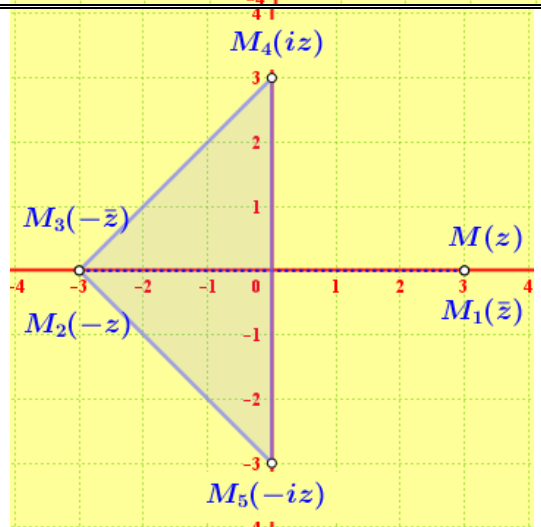
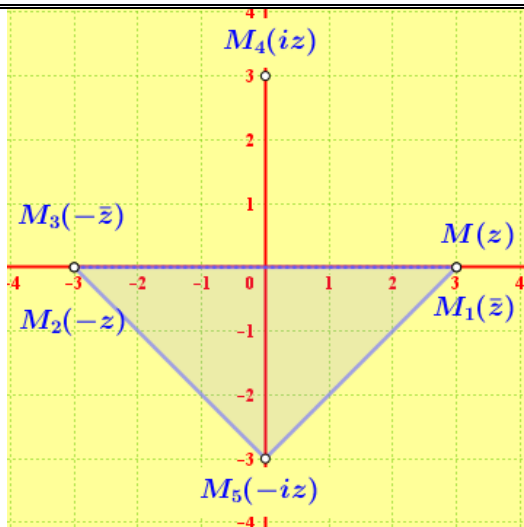
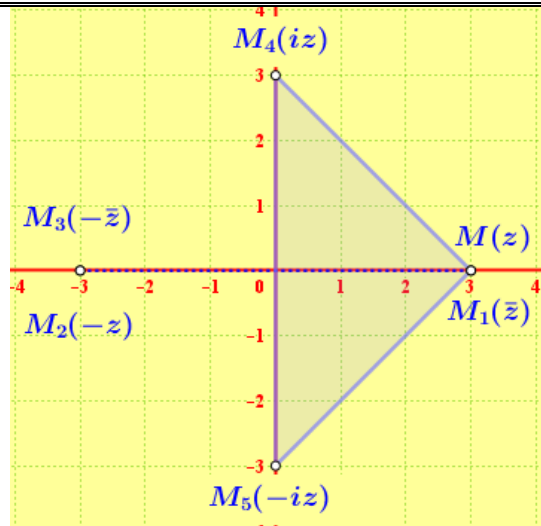
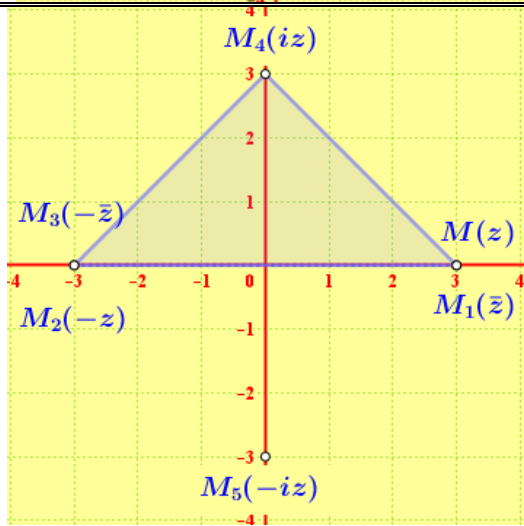
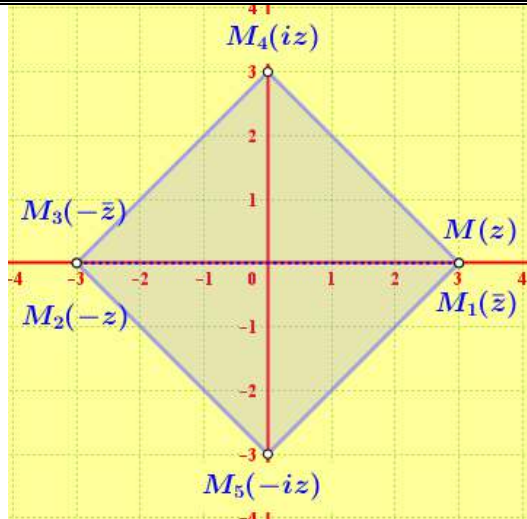


إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

5- في حالة $\Im m(z) = 0$

فان

- الرباعي $M M_5 M_2 M_4$ مربعاً .
- المثلثات $M M_4 M_2$ ، $M_4 M M_5$ و $M M_5 M_2$ و $M_4 M_2 M_5$ قائمة و متساوية الساقين
- في كل من M ، M_4 ، M_2 و M_5 على الترتيب

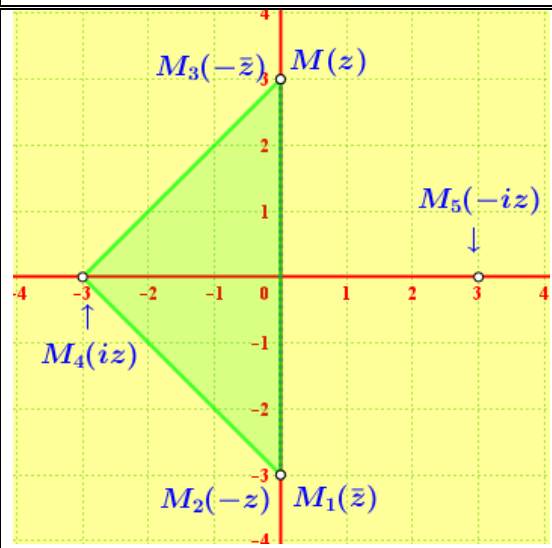
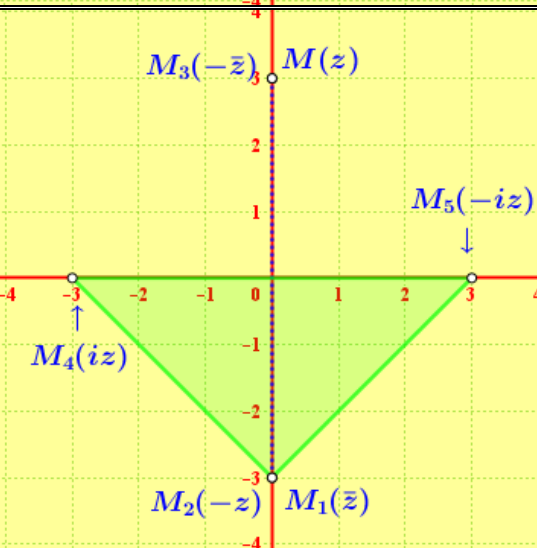
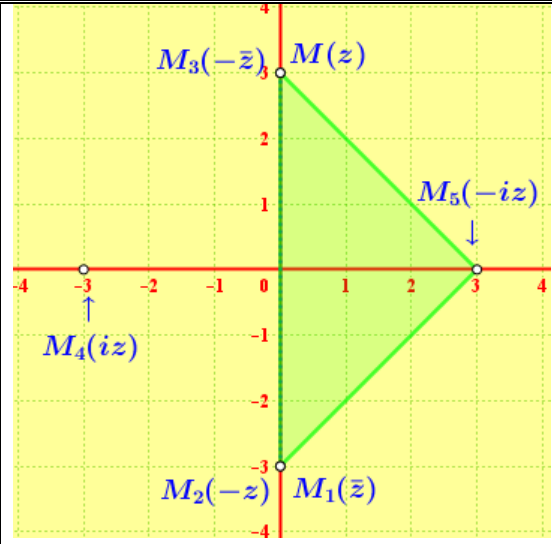
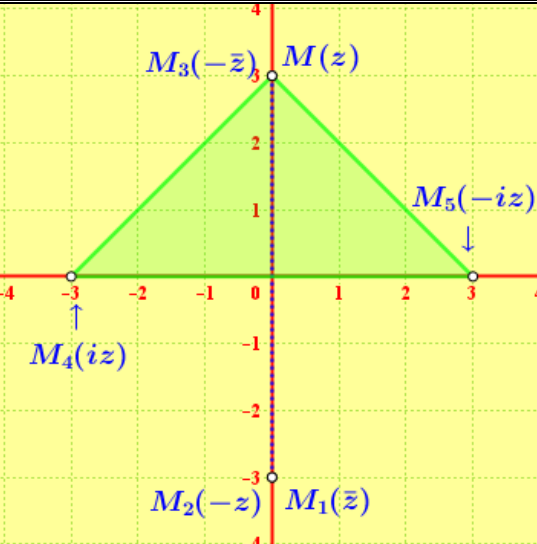
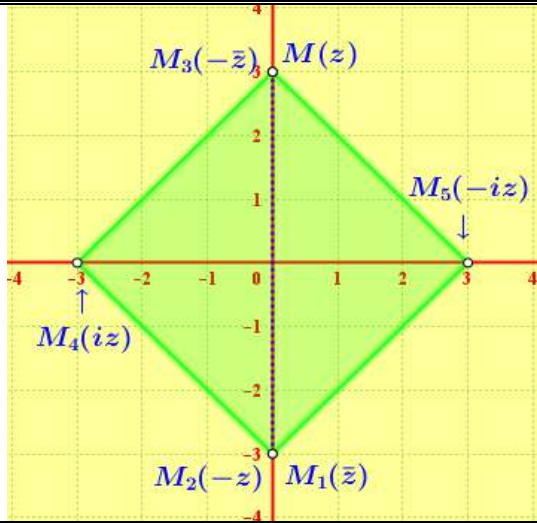


إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

6- في حالة $\Re(z) = 0$

فان

- الرباعي $M M_5 M_1 M_4$ مربعاً .
- المثلثات $M M_5 M_1$ ، $M M_5 M_4$ ، $M M_4 M_1$ و $M M_5 M_4$ قائمة و متساوية الساقين
- في كل من M_5 ، M ، M_4 و M_1 على الترتيب

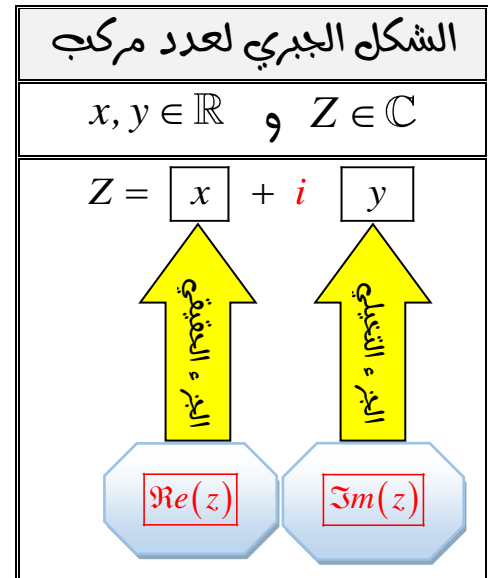


إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

$arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ عدد مركب غير معدوم و بفرض ان n عدد طبيعي				
$Z^n \in \mathbb{R}^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$Z^n \in \mathbb{R}_+^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$Z^n \in \mathbb{R}_-^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$Z^n \in i\mathbb{R}^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = \frac{\pi}{2} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$Z^n \in i\mathbb{R}_+^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$Z^n \in i\mathbb{R}_-^*$	$\Leftrightarrow$	$arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow$	$n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$

M صورة العدد المركب $Z \neq 0$ حيث $(Z = x + iy)$ و $(x, y \in \mathbb{R}^*)$ في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ و بفرض ان $arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$		
$M \in (xx')$	$\Rightarrow$	$\theta = k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in [O, \vec{u})$	$\Rightarrow$	$\theta = 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in [O, -\vec{u})$	$\Rightarrow$	$\theta = (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (yy')$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{2} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in [O, \vec{v})$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in [O, -\vec{v})$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{2} + (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_1)$ $(\Delta_1): y = x$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{4} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_2)$ $(\Delta_2): y = -x$	$\Rightarrow$	$\theta = 3\frac{\pi}{4} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_3)$ $(\Delta_3): y = \sqrt{3}x$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{3} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_4)$ $(\Delta_4): y = -\sqrt{3}x$	$\Rightarrow$	$\theta = 4\frac{\pi}{3} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_5)$ $(\Delta_5): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	$\Rightarrow$	$\theta = \frac{\pi}{6} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$
$M \in (\Delta_6)$ $(\Delta_6): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$	$\Rightarrow$	$\theta = 7\frac{\pi}{6} + k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$

مصطلحات		
$\Im m(z) = 0$	فان	z حقيقي $Z \in \mathbb{R}$
$\Re e(z) = 0$	فان	z تخيلي صرف $Z \in i\mathbb{R}$
$\Re e(z) = 0 = \Im m(z)$	فان	z معدوم $Z = 0$



القوة الطبيعية للعدد المركب i					
n	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$	من اجل كل
i^n	1	i	-1	$-i$	$k \in \mathbb{N}$

نتائج
$x, y \in \mathbb{R}$ و من اجل كل $Z \in \mathbb{C}$ $Z = x + i y$
$\bullet Z \times \bar{Z} = x^2 + y^2$
$\bullet Z + \bar{Z} = 2\Re e(z) = 2x$
$\bullet Z - \bar{Z} = 2i \Im m(z) = 2i y$
$\bullet \bar{\bar{Z}} = Z \Leftrightarrow$ قضي
$\bullet \bar{\bar{Z}} = -Z \Leftrightarrow$ تخيلي صرف
$\bullet \bar{i} = -i$
$\bullet \overline{\left(\frac{1}{i}\right)} = \frac{1}{i} = i$

مرافق عدد مركب
$x, y \in \mathbb{R}$ و من اجل كل $Z \in \mathbb{C}$ $Z = x \boxed{-} i y \longleftrightarrow \text{مرافقه} \longleftrightarrow Z = x \boxed{+} i y$
خواص
$\bullet \bar{\bar{z}} = z$
$\bullet \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
$\bullet \overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
$\bullet \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\bar{z}_2} / z_2 \neq 0$
$\bullet \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} / z_2 \neq 0$
$\bullet \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n / n \in \mathbb{Z}$

طويلت عدد مركب

ملاحظات:

- إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلت z هي القيمة المطلقة للعدد z

$$|z| = 0 \text{ يعني } z = 0$$

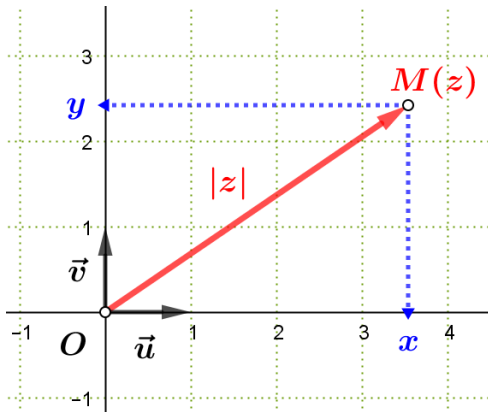
$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

$z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

نسمي طويلت العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ حيث } |z| \text{ الذي نرمز له}$$

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$



التفسير الهندسي لطويلت عدد مركب

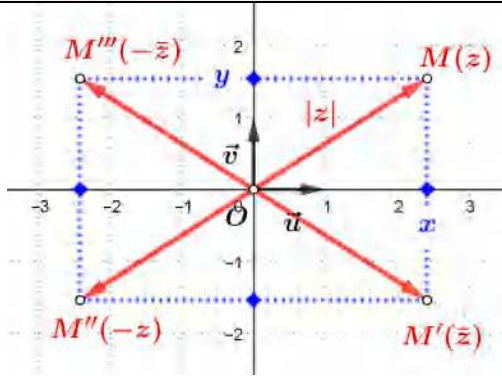
المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

طويلت عدد مركب



نتائج:

- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- $|i| = |-i| = 1$
- $|z| = |i\bar{z}| = |-iz| = |-i\bar{z}|$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$
- $S_{OMM'} = S_{OM'M''} = S_{OM''M'''} = S_{OMM'''} = |\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z)|$
- $S_{MM'M''M'''} = 4|\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z)|$

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad / \quad z' \neq 0$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad z' \neq 0$$

$$|z^n| = |z|^n \quad / \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{المتباينة المثلثية})$$

نتائج هامة

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

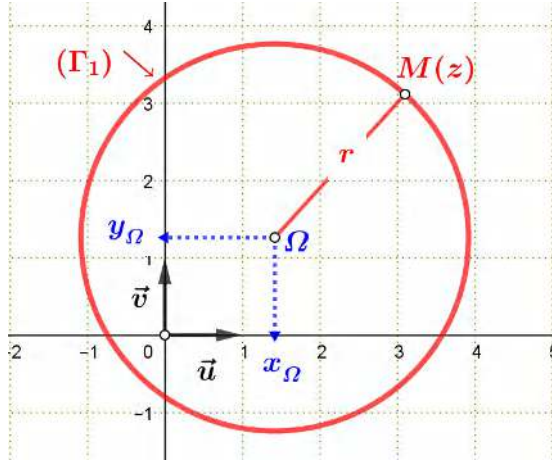
$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$$|AB| = |z_{AB}| = |z_B - z_A|$$

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال الطويلت

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z ، z_A و z_B لواحظ النقط M ، A و B على الترتيب.



$$M(z) \in (\Gamma_1) \text{ و } r \in \mathbb{R} \quad -1$$

حيث

$$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow \Omega M = r$$

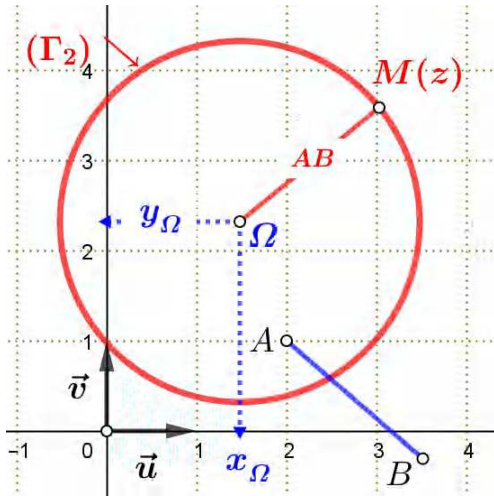
i- في حالة $r < 0$ فان $(\Gamma_1) = \emptyset$

ii- في حالة $r = 0$ فان $(\Gamma_1) = \{\Omega\}$

iii- في حالة $r > 0$

Ω مركزها

فان (Γ_1) هي الدائرة التي نصف قطرها r



$$M(z) \in (\Gamma_2) \quad -2$$

حيث

$$|z - z_\Omega| = |z_B - z_A|$$

$\Leftrightarrow$

$$\Omega M = AB$$

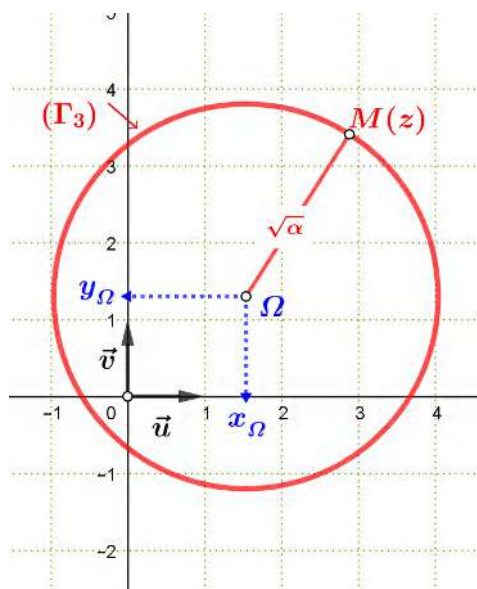
Ω مركزها

ومنه (Γ_2) هي الدائرة التي نصف قطرها AB

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال الطويلت

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z ، z_A و z_B لواحق النقط M ، A و B على الترتيب.



$$M(z) \in (\Gamma_3) \text{ و } \alpha \in \mathbb{R} \quad -3$$

حيث

$$|z - z_\Omega|^2 = \alpha \Leftrightarrow (z - z_\Omega)(\overline{z - z_\Omega}) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

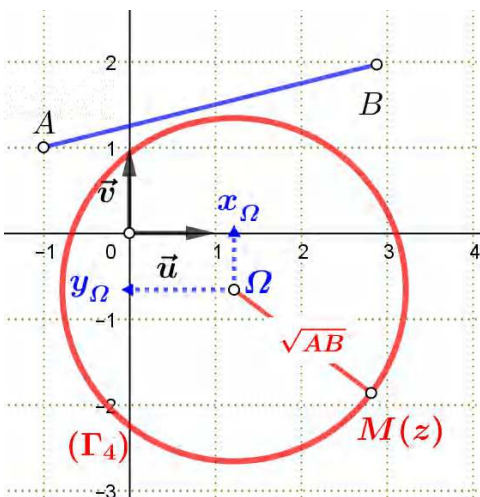
$$\Omega M^2 = \alpha$$

i- في حالة $\alpha < 0$ فان $(\Gamma_3) = \emptyset$

ii- في حالة $\alpha = 0$ فان $(\Gamma_3) = \{\Omega\}$

iii- في حالة $\alpha > 0$

فان (Γ_3) هي الدائرة التي: مركزها Ω نصف قطرها $\sqrt{\alpha}$



$$M(z) \in (\Gamma_4) \quad -4$$

حيث

$$(z - z_\Omega)(\overline{z - z_\Omega}) = |z_B - z_A|$$

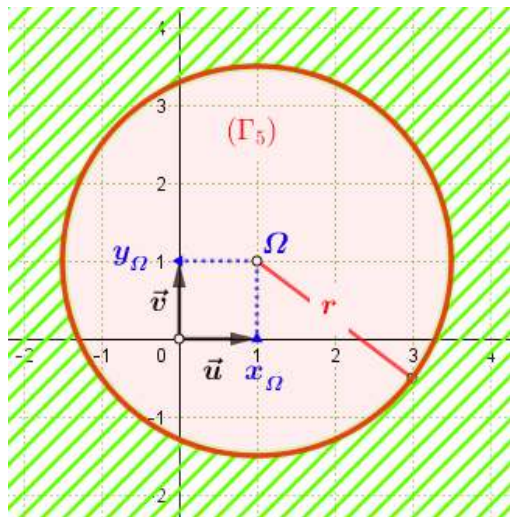
$$\Leftrightarrow$$

$$\Omega M^2 = AB$$

ومنه (Γ_4) هي الدائرة التي: مركزها Ω نصف قطرها $\sqrt{AB}$

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال الطويلت

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
صورة العدد المركب z M



$$M(z) \in (\Gamma_5) \text{ و } r \in \mathbb{R} \quad -5$$

حيث

$$|z - z_\Omega| \leq r \Leftrightarrow \Omega M \leq r$$

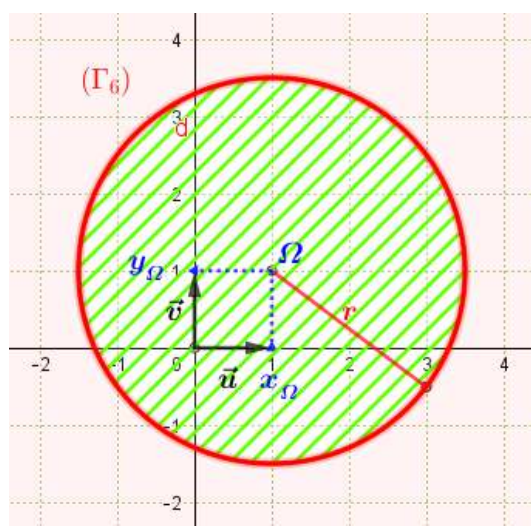
i- في حالة $r < 0$ فان $(\Gamma_5) = \emptyset$

ii- في حالة $r = 0$ فان $(\Gamma_5) = \{\Omega\}$

iii- في حالة $r > 0$

فان (Γ_5) هي نقط القرص المغلق

المحدد بالدائرة التي مركزها Ω نصف قطرها r



$$M(z) \in (\Gamma_6) \text{ و } r \in \mathbb{R} \quad -6$$

حيث

$$|z - z_\Omega| \geq r \Leftrightarrow \Omega M \geq r$$

i- في حالة $r < 0$ فان $(\Gamma_6) = \emptyset$

ii- في حالة $r = 0$ فان $(\Gamma_6) = \{\Omega\}$

iii- في حالة $r > 0$

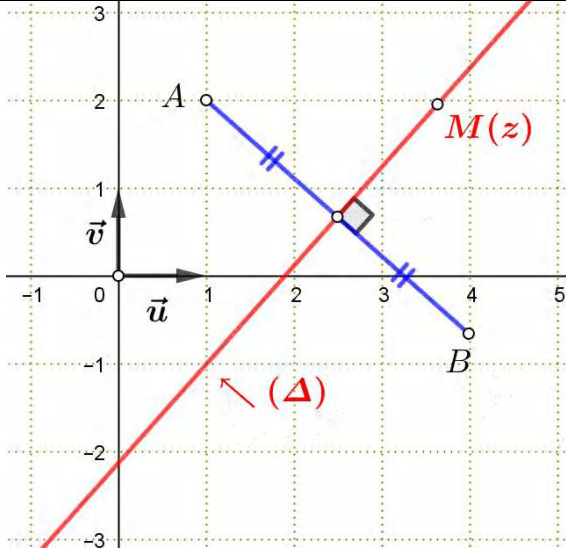
فان (Γ_6) هي نقط خارج القرص المفتوح

المحدد بالدائرة التي مركزها Ω نصف قطرها r

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال الطويلت

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z ، z_A و z_B لواقع النقط M ، A و B على الترتيب.



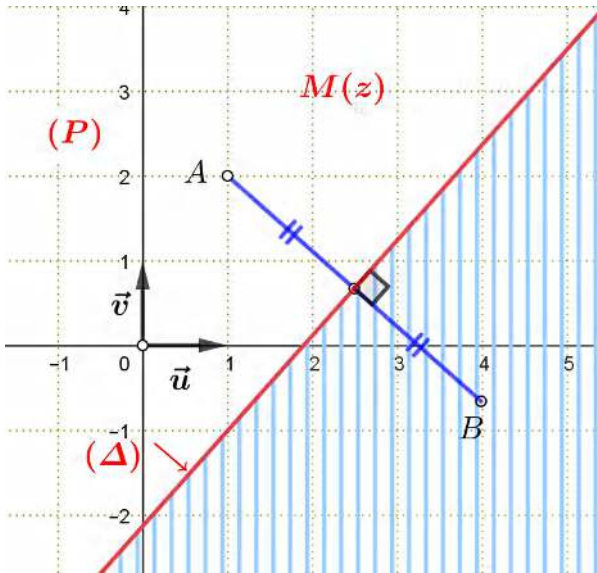
$$M(z) \in (\Delta) \quad -7$$

حيث

$$\left\{ \begin{array}{l} |z - z_A| = |z - z_B| \\ \text{أو} \\ \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow MA = MB$$

فان (Δ) هي

مجموعة نقط محور القطعة $[AB]$



$$M(z) \in (P) \quad -8$$

حيث

$$\left\{ \begin{array}{l} |z - z_A| \leq |z - z_B| \\ \text{أو} \\ \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow MA \leq MB$$

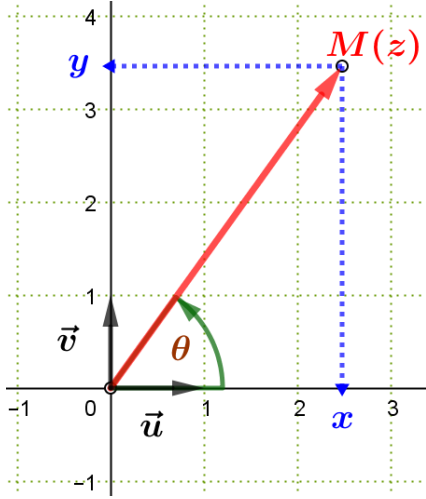
ومنه (P) هي مجموعة نقط نصفه المستوي

المحدد بالمستقيم (Δ) محور القطعة $[AB]$

و يشمل النقط A .

عمدة عدد مركب غير معدوم

z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان).
في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن M صورة z .
نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg z$ كل قياس بالريان للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



ملاحظات:

• كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد.

• إذا كان θ عمدة z .

فإن $\theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ عمدة z .

و نكتب $\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}$

• A و B نقطتان لاحقتهما z_A و z_B على الترتيب.

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

عمدة عدد مركب غير معدوم

نتائج

- $\arg(\alpha \cdot i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \alpha > 0)$
- $\arg(\alpha \cdot i) = \left(-\frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \alpha < 0)$
- $\arg(\alpha \cdot z) = (-\pi \vee \pi) + \arg(z) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \alpha < 0)$
- $\arg(\alpha \cdot \bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \alpha > 0)$
- $\arg(\alpha \cdot \bar{z}) = (-\pi \vee \pi) - \arg(z) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \alpha < 0)$
- $\arg(\beta i \cdot z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \beta > 0)$
- $\arg(\beta i \cdot \bar{z}) = \frac{\pi}{2} - \arg(z) + 2k\pi / (k \in \mathbb{Z}, \beta > 0)$

خواص

- z و z' عدنان مركبان غير معدومين
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) / n \in \mathbb{Z}$

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

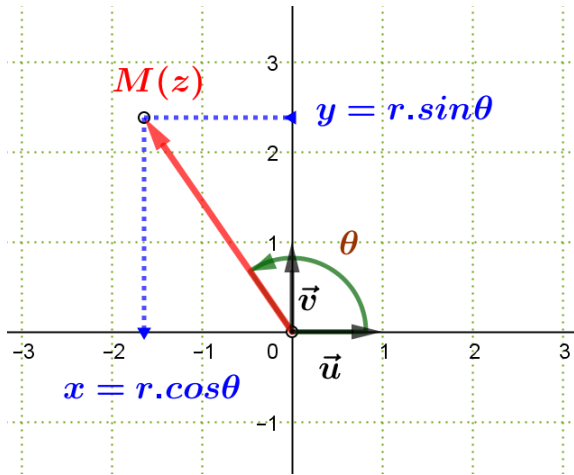
تعلم نقطة M بأحداثيها الديكارتيين $x; y$ أو بأحداثيها القطبيين $r; \theta$.

حيث $OM = r$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ ، ولدينا $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم.

العدد z يكتب على الشكل $z = r \cos \theta + i \sin \theta$

حيث: $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .



$$z = x + i y$$

الشكل الجبري

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

الشكل المثلثي

$$\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{cases} \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

نتائج

من أجل كل عددين مركبين z و z' غير معدومين

حيث $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$ و $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = [r', \theta']$ فان

$$z \cdot z' = rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] = [rr', (\theta + \theta')]$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} [\cos(-\theta') + i \sin(-\theta')] = \left[\frac{1}{r'}, (-\theta') \right]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')] = \left[\frac{r}{r'}, (\theta - \theta') \right]$$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] = [r^n, (n\theta)] \quad / (n \in \mathbb{Z})$$

$$\bar{z} = r [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = [r, (-\theta)]$$

$$i z = r [-\sin(\theta) + i \cos(\theta)] = r \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right] = \left[r, \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right]$$

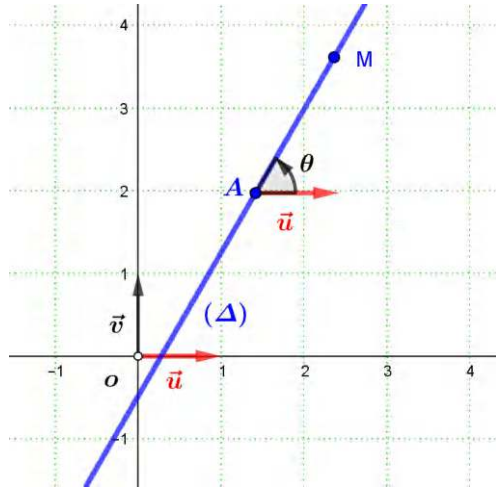
$$-z = r [-\cos(\theta) - i \sin(\theta)] = r [\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)] = [r, (\pi + \theta)]$$

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta) \quad -1$$

حيث

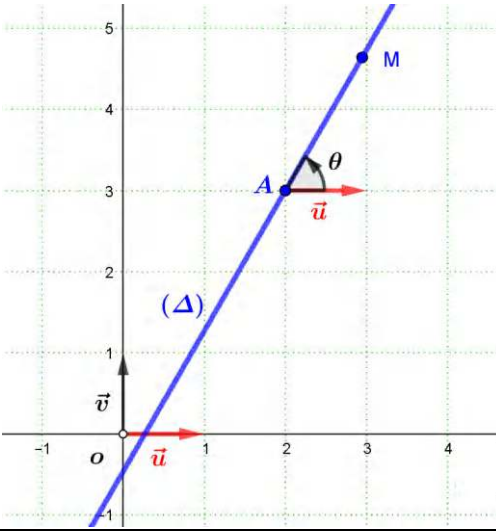
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R} \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; M = A \\ k \in \mathbb{R}^* & ; (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta + \lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ) هي مجموعة نقط المستقيم الذي يشمل

النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$ أو $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + \theta$



$$M(z) \in (\Delta) \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$\left[k \in \mathbb{R} ; z = 2 + 3i + k e^{i\frac{\pi}{3}} \right]$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; M = A(2; 3) \\ k \in \mathbb{R}^* & ; (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3} + \lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ) هي مجموعة نقط المستقيم الذي يشمل

النقط $A(2; 3)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$ أو $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{4\pi}{3}$



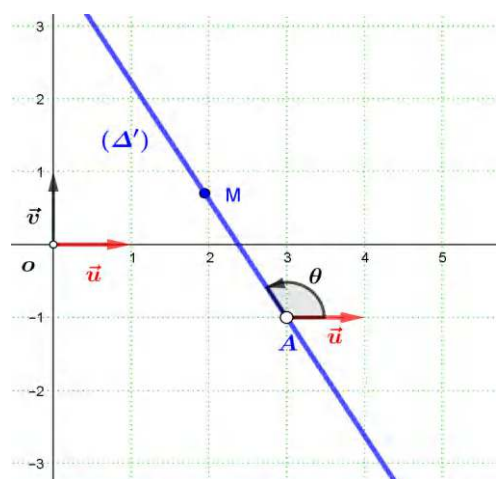
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta') \quad -2$$

حيث

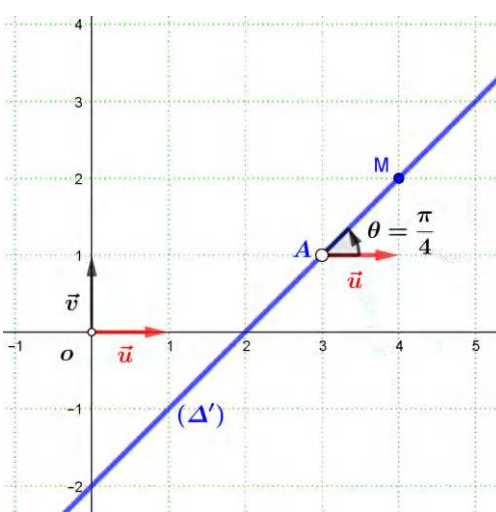
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R}^* \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; M \neq A \\ k \in \mathbb{R}^* & ; (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta + \lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ) هي مجموعة نقط المستقيم الذي لا يشمل

النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$ او $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + \theta$



$$M(z) \in (\Delta') \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$[k \in \mathbb{R} ; z = 3 + i + k e^{i\frac{\pi}{4}}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; M \neq A(3;1) \\ k \in \mathbb{R}^* & ; (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + \lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ') هي مجموعة نقط المستقيم الذي لا يشمل

النقط $A(3;1)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$ او $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = 5\frac{\pi}{4}$



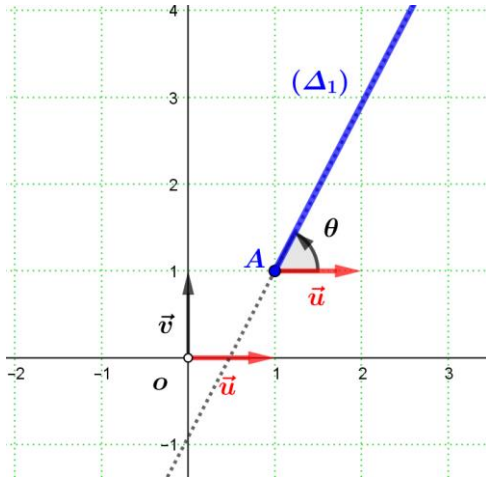
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_1) \quad -3$$

حيث

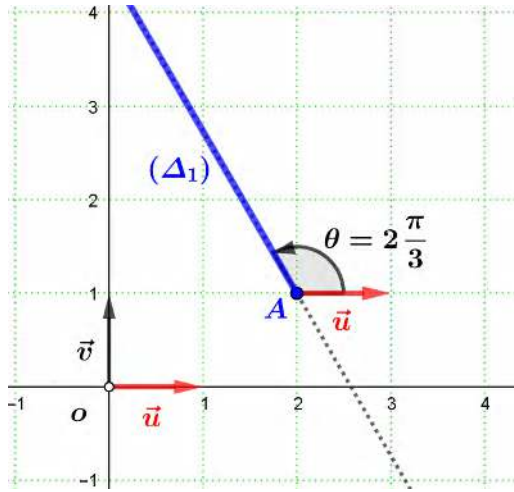
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R}_+ \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; \quad M = A \\ k \in \mathbb{R}_+^* & ; \quad (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_1) هي مجموعة نقط نصفه المستقيم (AM)

الذي يشمل النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$



$$M(z) \in (\Delta_1) \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$\left[k \in \mathbb{R}_+ ; \quad z = 1 + 2i + k e^{i\frac{2\pi}{3}} \right]$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; \quad M = A(2;1) \\ k \in \mathbb{R}_+^* & ; \quad (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{2\pi}{3} + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_1) هي مجموعة نقط نصفه المستقيم (AM)

الذي يشمل النقط $A(2;1)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = 2\frac{\pi}{3}$



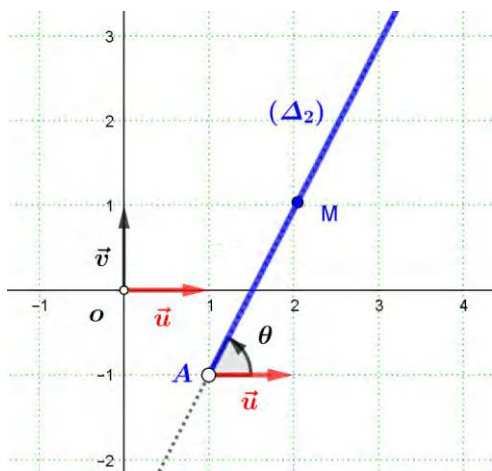
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_2) \quad -4$$

حيث

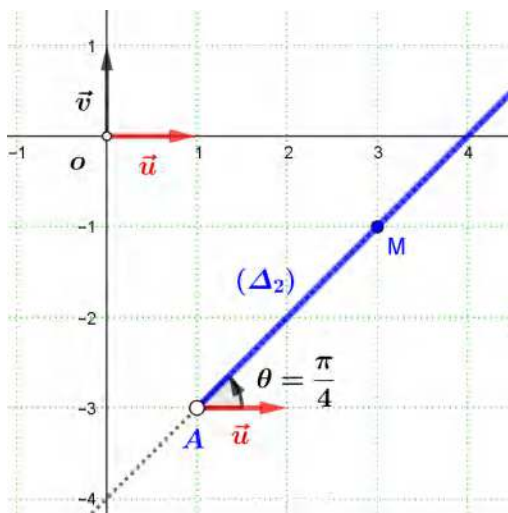
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R}_+^* \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; & M \neq A \\ k \in \mathbb{R}_+^* & ; & (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_2) هي مجموعة نقط نصفه المستقيم AM

الذي لا يشمل النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$



$$M(z) \in (\Delta_2) \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$\left[k \in \mathbb{R}_+^* ; \quad z = 1 - 3i + k e^{i\frac{\pi}{4}} \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; & M \neq A(1; -3) \\ k \in \mathbb{R}_+^* & ; & (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_2) هي مجموعة نقط نصفه المستقيم AM

الذي لا يشمل النقط $A(1; -3)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$



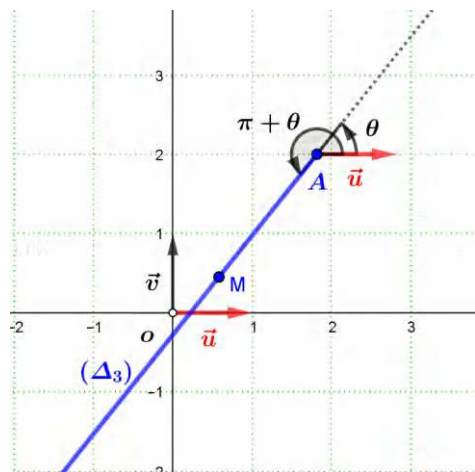
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_3) \quad -5$$

حيث

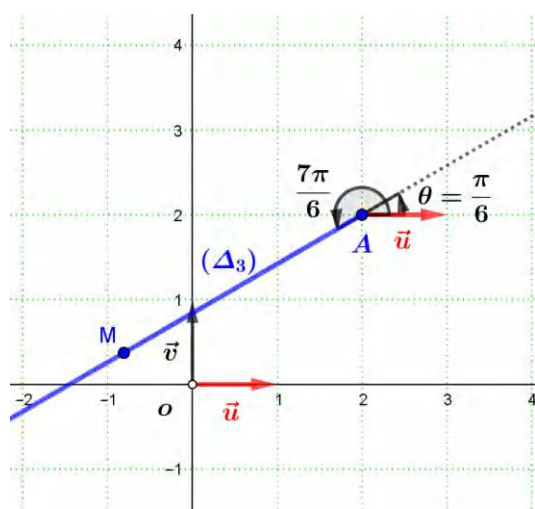
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R}_- \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; \quad M = A \\ k \in \mathbb{R}_-^* & ; \quad (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = (\pi + \theta) + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_3) هي مجموعة نقط نصف المستقيم (AM)

الذي يشمل النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + \theta$



$$M(z) \in (\Delta_3) \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$\left[k \in \mathbb{R}_- \text{ ; } z = 2 + 2i + k e^{i\frac{\pi}{6}} \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k = 0 & ; \quad M = A(2; 2) \\ k \in \mathbb{R}_-^* & ; \quad (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{7\pi}{6} + 2\lambda\pi \quad / \quad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_3) هي مجموعة نقط نصف المستقيم (AM)

الذي يشمل النقط $A(2; 2)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{7\pi}{6}$



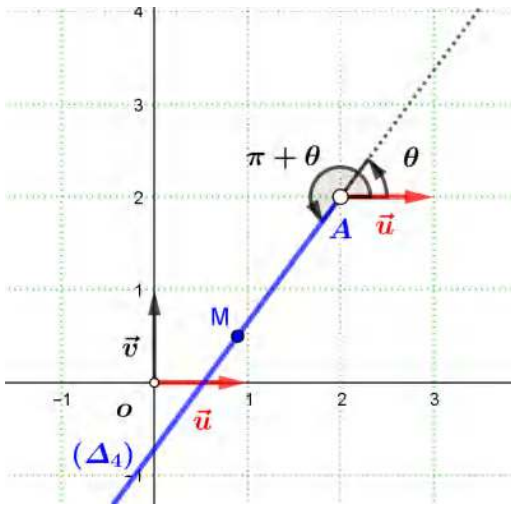
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددان المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_4) \quad -6$$

حيث

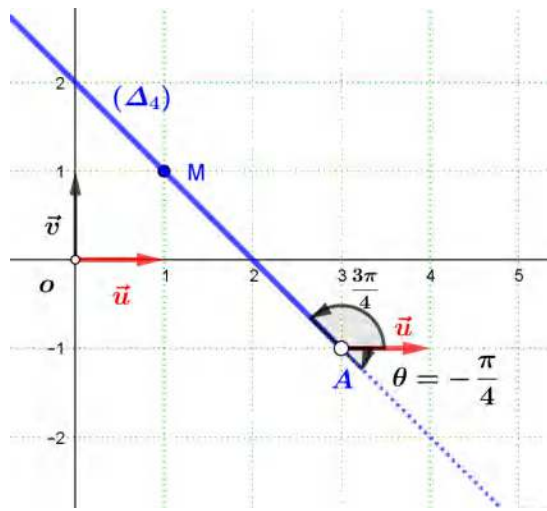
$$[z - z_A = k e^{i\theta}] \Leftrightarrow [k \in \mathbb{R}_-^* \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; & M \neq A \\ k \in \mathbb{R}_-^* & ; & (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = (\pi + \theta) + 2\lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_4) هي مجموعة نقط نصف المستقيم $[AM)$

الذي لا يشمل النقط A و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + \theta$



$$M(z) \in (\Delta_4) \quad \text{مثال :}$$

حيث

$$\left[k \in \mathbb{R}_-^* ; z = 3 - i + k e^{-i\frac{\pi}{4}} \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k \neq 0 & ; & M \neq A(3; -1) \\ k \in \mathbb{R}_-^* & ; & (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{3\pi}{4} + 2\lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فان (Δ_4) هي مجموعة نقط نصف المستقيم $[AM)$

الذي يشمل النقط $A(3; -1)$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{3\pi}{4}$



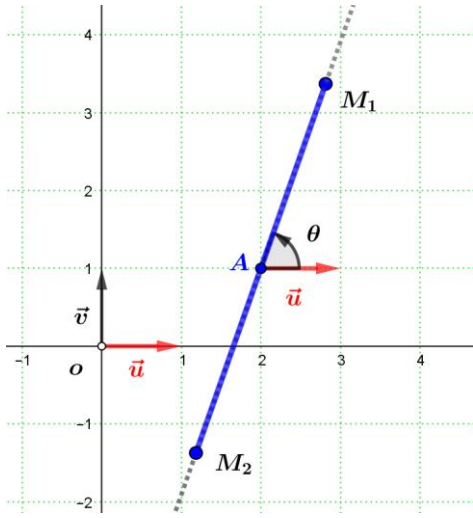
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_1'')$$

-7

حيث

$$[k \in [k_1; k_2] \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Updownarrow$

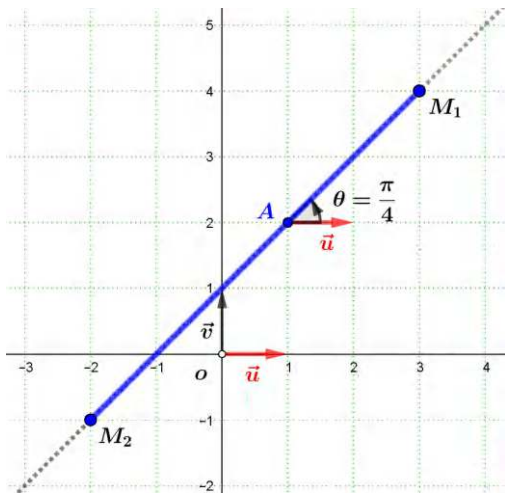
$$M \in [M_1 M_2]$$

حيث

$$M_1(z_1 = z_A + k_1 e^{i\theta}) \text{ و } M_2(z_2 = z_A + k_2 e^{i\theta})$$

فان (Δ_1'') هي مجموعة نقط القطعة المستقيم $[M_1 M_2]$

في حالة $(k=0) \in [k_1; k_2]$ فان $A \in [M_1 M_2]$



$$M(z) \in (\Delta_1'')$$

مثال -

حيث

$$[k \in [-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]; z = 1 + 2i + k e^{i\frac{\pi}{4}}]$$

$\Updownarrow$

$$M \in [M_1 M_2]$$

حيث

$$M_1(z_1 = -2 - i) \text{ ; } M_2(z_2 = 3 + 4i)$$

فان (Δ_1'') هي مجموعة نقط القطعة المستقيم $[M_1 M_2]$

بما ان $A(1; 2) \in [M_1 M_2]$ فان $(k=0) \in [-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$



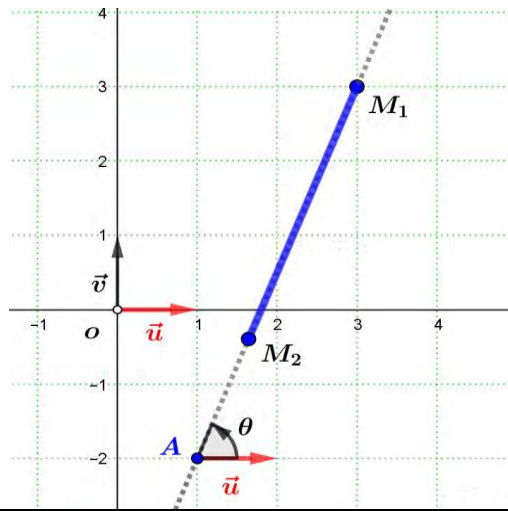
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_2'')$$

-8

حيث

$$[k \in [k_1; k_2] \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Updownarrow$

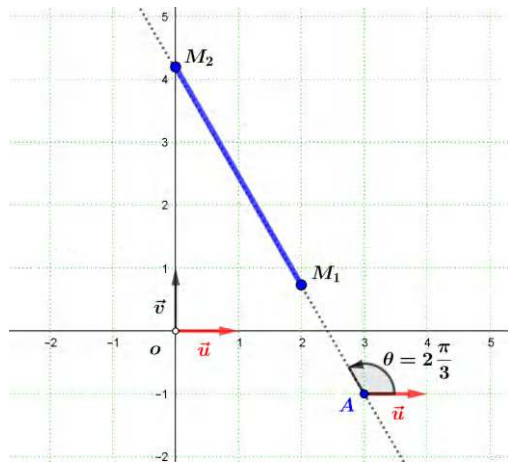
$$M \in [M_1 M_2]$$

حيث

$$M_1(z_1 = z_A + k_1 e^{i\theta}) \text{ و } M_2(z_2 = z_A + k_2 e^{i\theta})$$

فان (Δ_2'') هي مجموعة نقط القطعة المستقيم $[M_1 M_2]$

- في حالة $k=0 \notin [k_1; k_2]$ فان $A \notin [M_1 M_2]$



$$M(z) \in (\Delta_2'')$$

مثال -

حيث

$$[k \in [2; 6]; z = 3 - i + k e^{i\frac{2\pi}{3}}]$$

$\Updownarrow$

$$M \in [M_1 M_2]$$

حيث

$$M_1(z_1 = 2 + (-1 + \sqrt{3})i); M_2(z_2 = (-1 + 3\sqrt{3})i)$$

فان (Δ_2'') هي مجموعة نقط القطعة المستقيم $[M_1 M_2]$

بما ان $A(3; -1) \notin [M_1 M_2]$ فان $k=0 \notin [2; 6]$



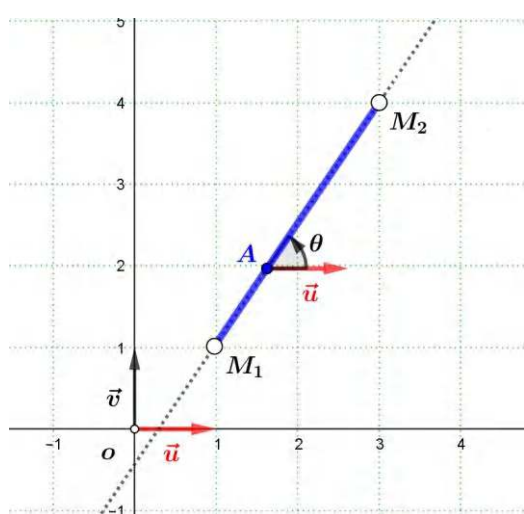
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواقع النقطتين M و A على الترتيب θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_1''')$$

حيث

$$[k \in]k_1; k_2[\text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$M \in [M_1 M_2] / \{M_1, M_2\}$$

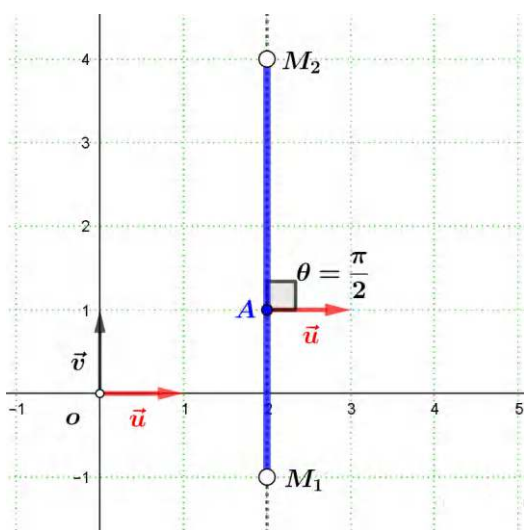
ح د ي ث

$$M_1(z_1 = z_A + k_1 e^{i\theta}) \text{ و } M_2(z_2 = z_A + k_2 e^{i\theta})$$

فان (Δ_1''') هي مجموعة نقط القطعة

المستقيم $[M_1 M_2]$ ماعدا النقطتين M_1 و M_2

في حالة $(k=0) \in [k_1; k_2]$ فان $A \in]M_1 M_2[$



$$M(z) \in (\Delta_1''')$$

حيث

$$[k \in]-2; 3[\text{ و } z = 2 + i + k e^{i\frac{\pi}{2}}]$$

$\Leftrightarrow$

$$M \in [M_1 M_2] / \{M_1, M_2\}$$

ح د ي ث

$$M_1(z_1 = 2 - i) \text{ و } M_2(z_2 = 2 + 4i)$$

فان (Δ_1''') هي مجموعة نقط القطعة

المستقيم $[M_1 M_2]$ ماعدا النقطتين M_1 و M_2

بما ان $(k=0) \in [-2; 3]$ فان $A(2; 1) \in]M_1 M_2[$



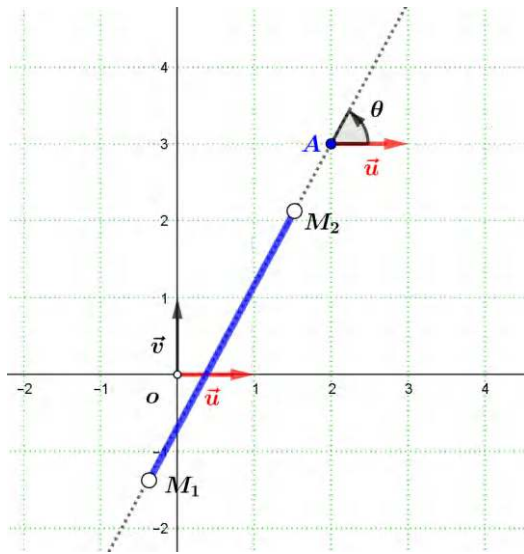
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب θ و k عددين حقيقيين.

حالة الاولى: k حقيقي متغير و θ حقيقي ثابت



$$M(z) \in (\Delta_2''')$$

-10

حيث

$$[k \in]k_1; k_2[\text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

$\Leftrightarrow$

$$M \in [M_1 M_2] / \{M_1, M_2\}$$

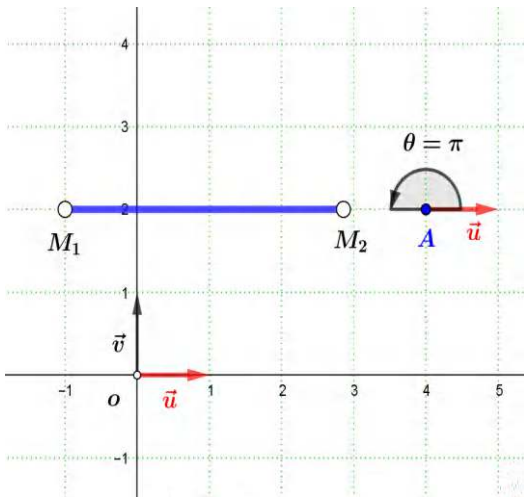
حيث

$$M_1(z_1 = z_A + k_1 e^{i\theta}) \text{ و } M_2(z_2 = z_A + k_2 e^{i\theta})$$

فان (Δ_2''') هي مجموعة نقط القطعت

المستقيم $[M_1 M_2]$ ما عدا النقطتين M_1 و M_2

في حالة $(k=0) \notin [k_1; k_2]$ فان $A \notin]M_1 M_2[$



$$M(z) \in (\Delta_2''')$$

مثال -

حيث

$$[k \in]1; 5[\text{ و } z = 4 + 2i + k e^{i\pi}]$$

$\Leftrightarrow$

$$M \in [M_1 M_2] / \{M_1, M_2\}$$

حيث

$$M_1(z_1 = 3 + 2i) \text{ و } M_2(z_2 = -1 + 2i)$$

فان (Δ_2''') هي مجموعة نقط القطعت

المستقيم $[M_1 M_2]$ ما عدا النقطتين M_1 و M_2

بما ان $(k=0) \notin [1; 5]$ فان $A(4; 2) \notin]M_1 M_2[$



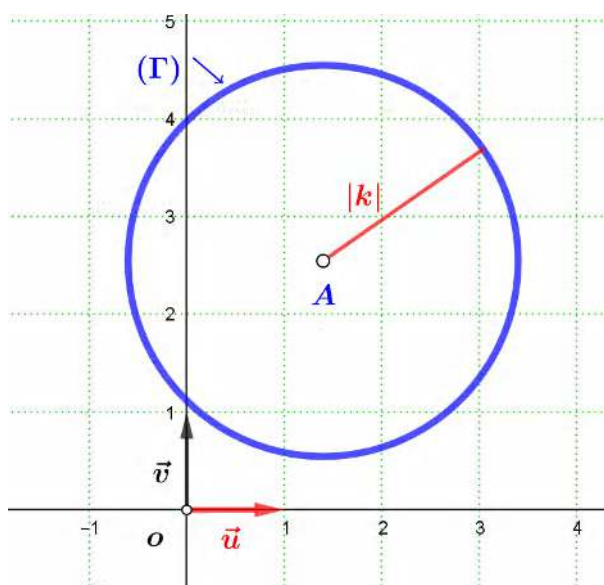
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعت النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الثانية: k حقيقي معلوم وثابت و θ حقيقي متغير



$$M(z) \in (\Gamma) \quad -1$$

حيث

$$[|z - z_A| = |k|] \Leftrightarrow [\theta \in \mathbb{R} \text{ و } z = z_A + k e^{i\theta}]$$

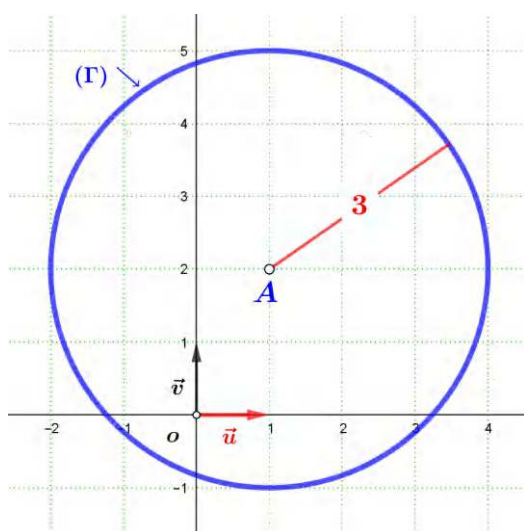
$\Downarrow$

$$AM = |k| \Rightarrow \begin{cases} k = 0 & ; M = A \\ k \in \mathbb{R}^* & ; M \in (C)_{(A, r=|k|)} \end{cases}$$

- في حالة $k = 0$ فان $(\Gamma) = \{A\}$

- في حالة $k \in \mathbb{R}^*$ فان (Γ) هي الدائرة

التي مركزها A
عنف ق طرها $|k|$



$$M(z) \in (\Gamma) \quad \text{مثال}$$

حيث

$$[\theta \in \mathbb{R} ; z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}]$$

$\Updownarrow$

$$[z - (1 + 2i) = 3e^{i\theta}]$$

$\Downarrow$

$$|z - (1 + 2i)| = 3$$

$\Updownarrow$

$$AM = 3 / A(z_A = 1 + 2i)$$

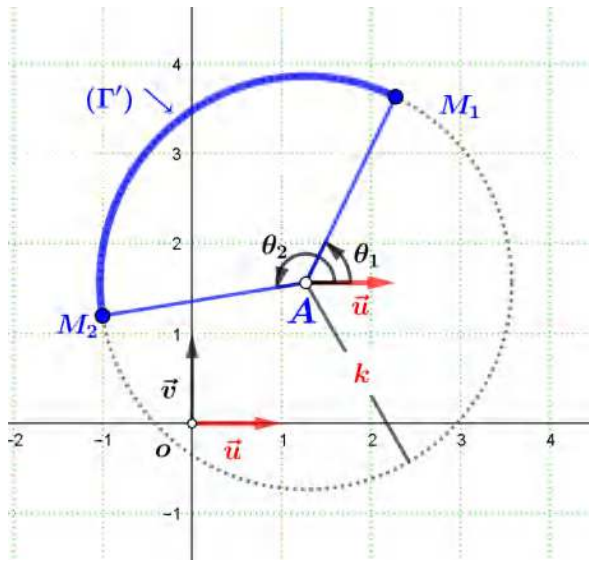
ومن ثم (Γ) هي الدائرة التي مركزها A
عنف ق طرها 3

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الثانية: k حقيقي معلوم وثابت و θ حقيقي متغير



$$M(z) \in (\Gamma')$$

حيث

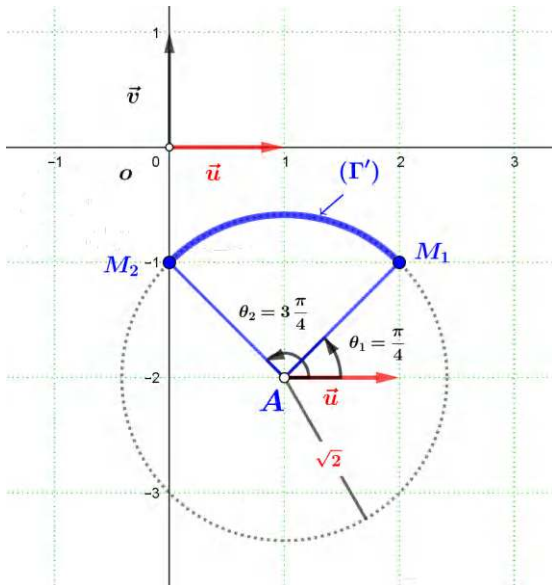
$$z = z_A + ke^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in [\theta_1; \theta_2] \\ 0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi \\ k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = z_A + ke^{i\theta_1}) \\ M_2(z_2 = z_A + ke^{i\theta_2}) \end{cases}$$

فان (Γ) هي القوس M_1M_2 في الاتجاه المباشر

من الدائرة التي مركزها A نصف قطرها k



$$M(z) \in (\Gamma')$$

حيث

$$z = 1 - 2i + \sqrt{2}e^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \\ \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = 2 - i) \\ M_2(z_2 = -i) \end{cases}$$

فان (Γ') هي القوس M_1M_2 في الاتجاه المباشر

من الدائرة التي مركزها $A(1; -2)$ نصف قطرها $\sqrt{2}$



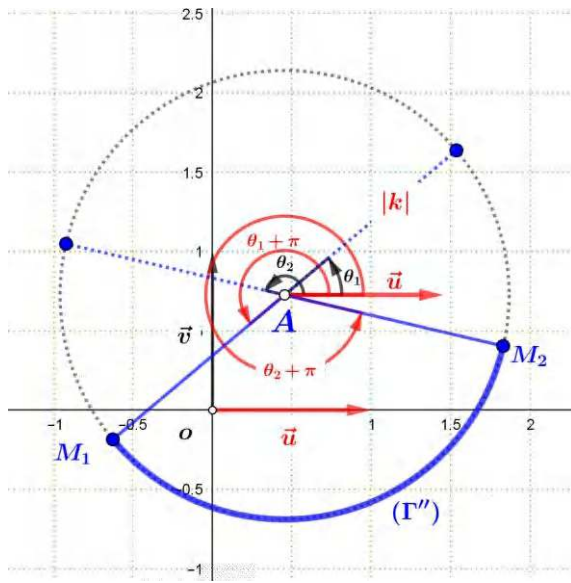
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواقع النقطتين M و A على الترتيب θ و k عددين حقيقيين.

حالة الثانية: k حقيقي معلوم وثابت و θ حقيقي متغير



$$M(z) \in (\Gamma'') \quad -3$$

حيث

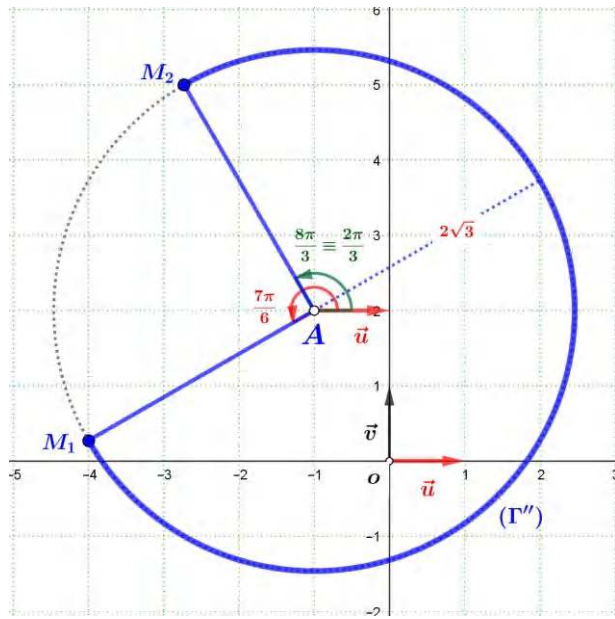
$$z = z_A + k e^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in [\theta_1; \theta_2] \\ 0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi \\ k \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1 M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = z_A - k e^{i(\pi+\theta_1)}) \\ M_2(z_2 = z_A - k e^{i(\pi+\theta_2)}) \end{cases}$$

فان (Γ'') هي القوس $M_1 M_2$ في الاتجاه المباشر

من الدائرة التي مركزها A نصف قطرها $|k|$



$$M(z) \in (\Gamma') \quad \text{مثال}$$

حيث

$$z = -1 + 2i - 2\sqrt{3} e^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right] \\ \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1 M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = -4 + (2 - \sqrt{3})i) \\ M_2(z_2 = (-1 - \sqrt{3}) + 5i) \end{cases}$$

فان (Γ'') هي القوس $M_1 M_2$ في الاتجاه المباشر

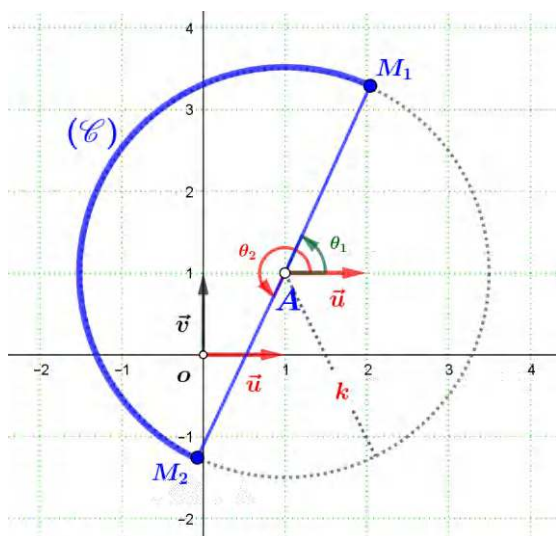
من الدائرة التي مركزها $A(-1; 2)$ نصف قطرها $2\sqrt{3}$

مجموعة النقط في المستوي المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الثانية: k حقيقي معلوم وثابت و θ حقيقي متغير



$$M(z) \in (C) \quad -4$$

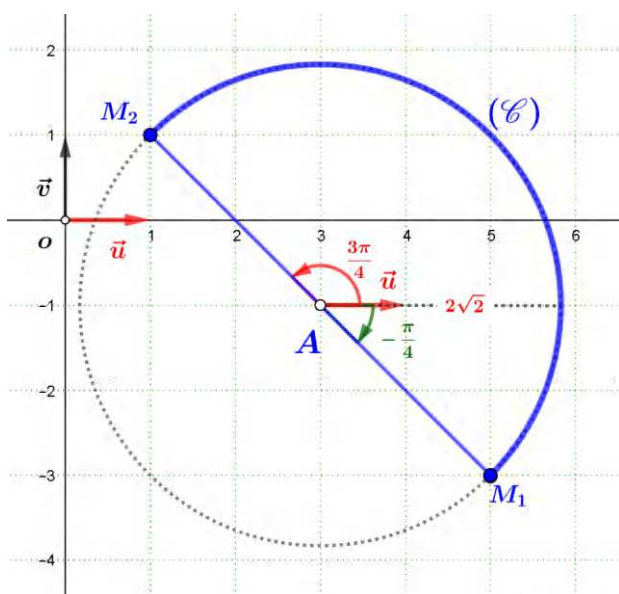
حيث

$$z = z_A + ke^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in [\theta_1; \theta_2] \\ \theta_2 - \theta_1 = \pi \\ k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = z_A + ke^{i\theta_1}) \\ M_2(z_2 = z_A + ke^{i\theta_2}) \end{cases}$$

فان (C) هي القوس M_1M_2 في الاتجاه المباشر
و تمثل نصف الدائرة التي مركزها A
و نصف قطرها k



$$M(z) \in (C) \quad \text{مثال}$$

حيث

$$z = 3 - i + 2\sqrt{2}e^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \\ \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = 5 - 3i) \\ M_2(z_2 = 1 + i) \end{cases}$$

فان (C) هي القوس M_1M_2 في الاتجاه المباشر

و تمثل نصف الدائرة التي مركزها $A(3; -1)$
و نصف قطرها $2\sqrt{2}$



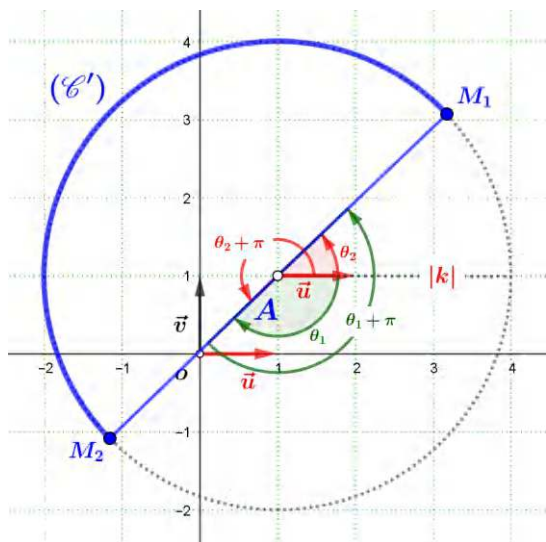
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

مجموعة النقط في المستوى المركب باستعمال العمدة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

العددين المركبين z و z_A لواحق النقطتين M و A على الترتيب. θ و k عددين حقيقيين.

حالة الثانية: k حقيقي معلوم وثابت و θ حقيقي متغير



$$M(z) \in (C') \quad -5$$

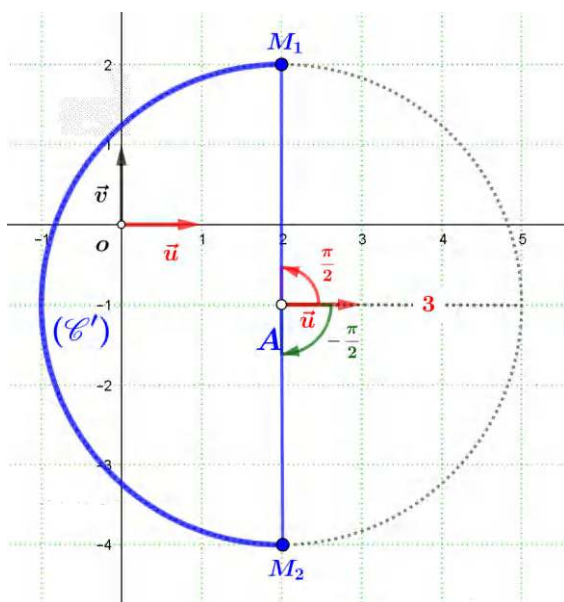
حيث

$$z = z_A + ke^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in [\theta_1; \theta_2] \\ \theta_2 - \theta_1 = \pi \\ k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1 M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = z_A - ke^{i(\pi+\theta_1)}) \\ M_2(z_2 = z_A - ke^{i(\pi+\theta_2)}) \end{cases}$$

فان (C') هي القوس $M_1 M_2$ في الاتجاه المباشر
و تمثل نصف الدائرة التي
مركزها A
عبر قطرها k



$$M(z) \in (C') \quad \text{مثال}$$

حيث

$$z = 2 - i - 3e^{i\theta} / \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{cases}$$

↓

$$M \in M_1 M_2 / \begin{cases} M_1(z_1 = 2 + 2i) \\ M_2(z_2 = 2 - 4i) \end{cases}$$

فان (C') هي القوس $M_1 M_2$ في الاتجاه المباشر

و تمثل نصف الدائرة التي
مركزها $A(2; -1)$
عبر قطرها 3



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $e^{i\theta}$ هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

عواص		نتائج
θ و θ' عدنان حقيقيان. $e^{i\theta + \theta'} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$ $\frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{-i\theta'}$ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$		z و z' من $\mathbb{C}^*$ حيث $z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$ فان $z \cdot z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$ $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$ $\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}$
دستور موافر		قوانين أولر
z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $e^{i\theta n} = e^{in\theta}$ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$		$\begin{cases} e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \\ e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$ $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}$ $\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$
$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ $1 - e^{i\theta} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right)}$ $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)} \right]$		



طبيعة المثلث ABC انطلاقاً من طويلة و عمدة العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_C لواقع النقط A ، B و C على الترتيب .

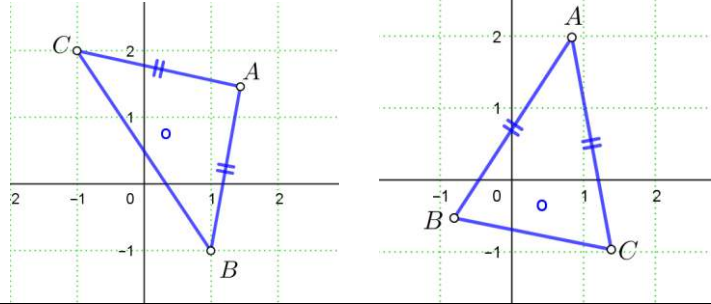
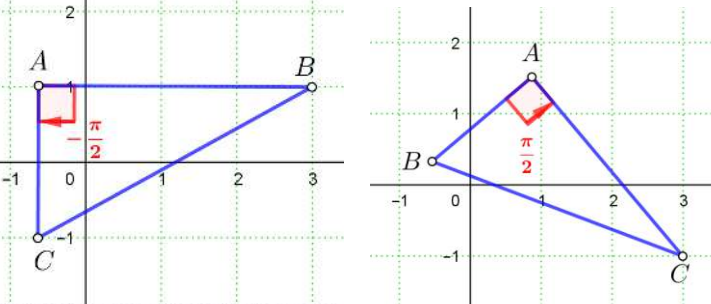
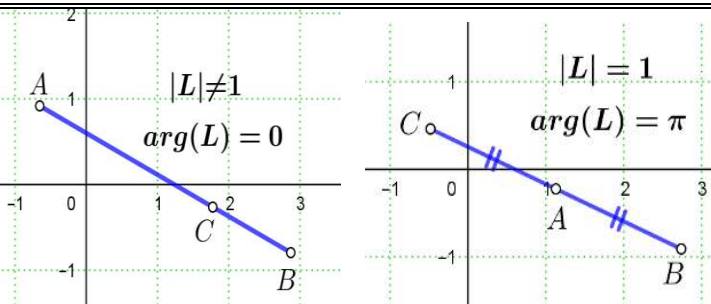
نعلم ان $|L| = \frac{AC}{AB}$ و $\arg(L) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

فان المثلث ABC	و كان $\arg(L)$	إذا كان $ L $
متقايس الاضلاع	$-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$	1
	$L = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $L = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	
فان المثلث ABC	$-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$	1
متساوي الساقين و قائم في النقط A	$-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$	1
	$L = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $L = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$	



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين



إذا كان $ L $	و كان $arg(L)$	فان المثلث ABC
1	تختلف عن كل من $-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ π و 0	متساوي الساقين رأسه الأساسي A 
إذا كان $ L $	و كان $arg(L)$	فان المثلث ABC
يختلف عن 1	$-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$	قائم في النقطة A 
إذا كان $ L $	و كان $arg(L)$	فان المثلث ABC
$\mathbb{R}_+^*$	$k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$	مسطح (النقط A, B, C في استقامية) 

طبيعة المثلث ABC باستعمال الدوران

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_Ω لواقع النقطة A ، B و Ω على الترتيب.

إذا كانت

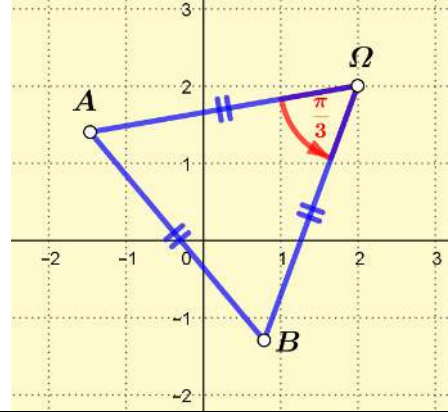
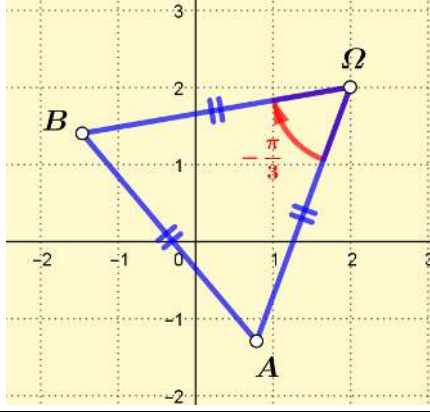
$$A(z_A) \xrightarrow{r_{\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right)}} B(z_B)$$

إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{r_{\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$
متقايس الاضلاع

فان المثلث $A\Omega B$
متقايس الاضلاع



إذا كانت

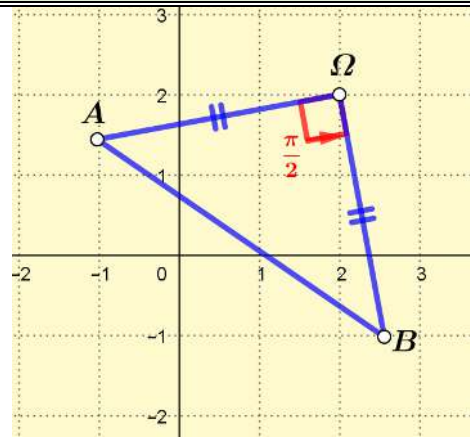
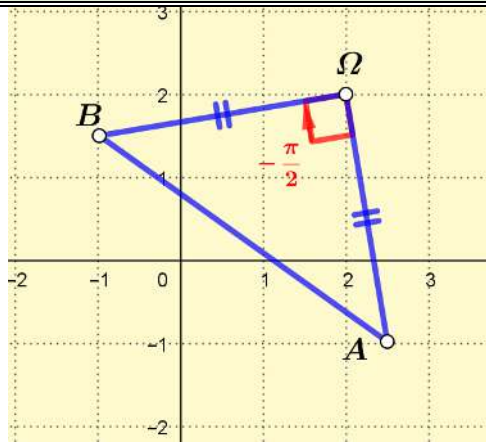
$$A(z_A) \xrightarrow{r_{\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)}} B(z_B)$$

إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{r_{\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$
متساوي الساقين وقائم في Ω

فان المثلث $A\Omega B$
متساوي الساقين وقائم في Ω



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

طبيعة المثلث ABC باستعمال التشابه المباشر

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_Ω لواحق النقط A ، B و Ω على الترتيب .

إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{S_{\left(\Omega; \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)}} B(z_B)$$

إذا كانت

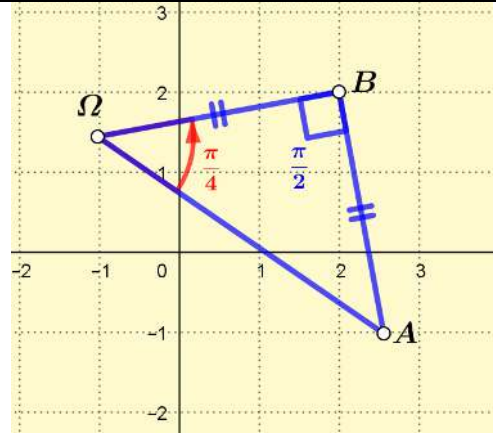
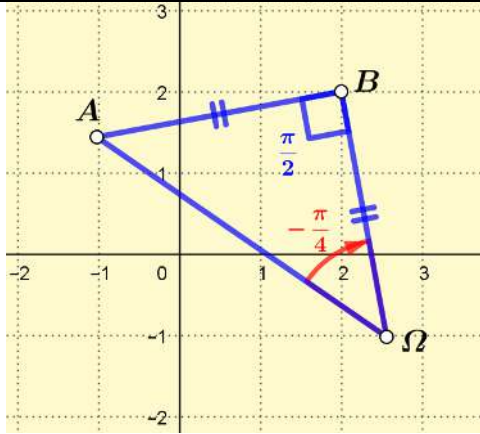
$$A(z_A) \xrightarrow{S_{\left(\Omega; \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين وقائم في B

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين وقائم في B



إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{S_{\left(\Omega; \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)}} B(z_B)$$

إذا كانت

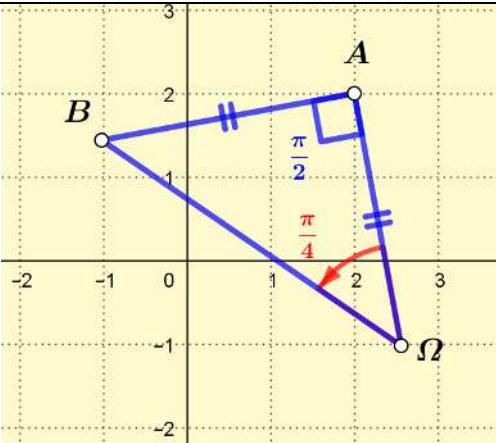
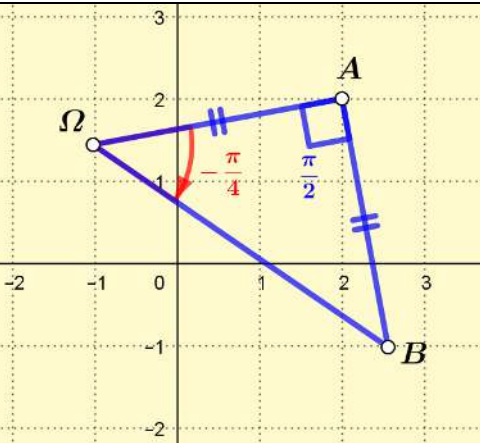
$$A(z_A) \xrightarrow{S_{\left(\Omega; \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين وقائم في A

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين وقائم في A



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

طبيعة المثلث ABC باستعمال التشابه المباشر	
المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_Ω لواقع النقط A ، B و Ω على الترتيب .	
إذا كانت $A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)} B(z_B)$	إذا كانت $A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{6}\right)} B(z_B)$
فان المثلث $A\Omega B$ قائم في B	فان المثلث $A\Omega B$ قائم في B
إذا كانت $A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; 2\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)} B(z_B)$	إذا كانت $A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; 2\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\pi}{6}\right)} B(z_B)$
فان المثلث $A\Omega B$ قائم في A	فان المثلث $A\Omega B$ قائم في A

طبيعة المثلث ABC باستعمال التشابه المباشر

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_Ω لواحد النقط A ، B و Ω على الترتيب .

إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; \frac{1}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)} B(z_B)$$

إذا كانت

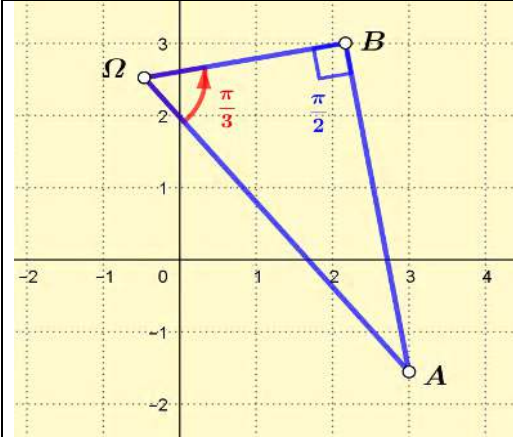
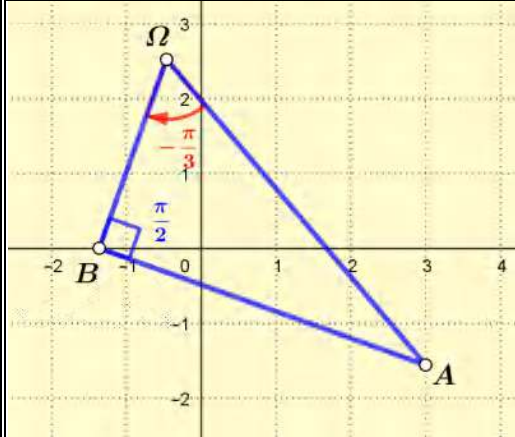
$$A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في B

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في B



إذا كانت

$$A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; 2; -\frac{\pi}{3}\right)} B(z_B)$$

إذا كانت

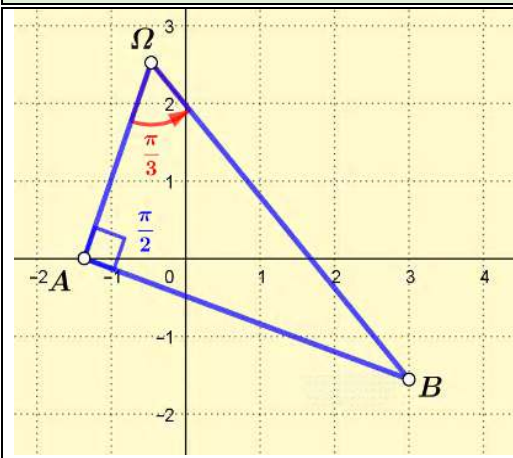
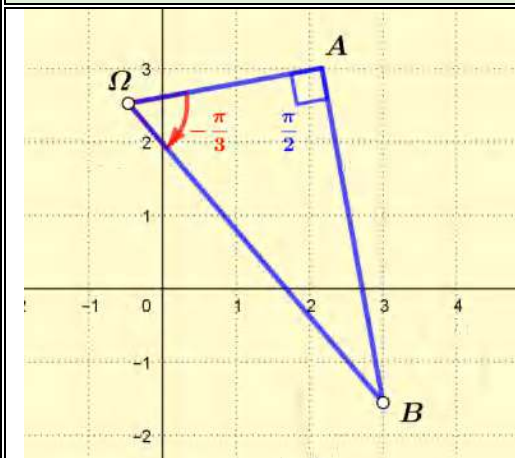
$$A(z_A) \xrightarrow{S\left(\Omega; 2; \frac{\pi}{3}\right)} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في A

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في A



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

طبيعة المثلث ABC باستعمال التشابه المباشر أو الدوران

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A ، z_B و z_Ω لواقع النقط A ، B و Ω على الترتيب .

إذا كانت $k \neq 1$ و

$$A(z_A) \xrightarrow{S_{(\Omega; k; -\frac{\pi}{2})}} B(z_B)$$

إذا كانت $k \neq 1$ و

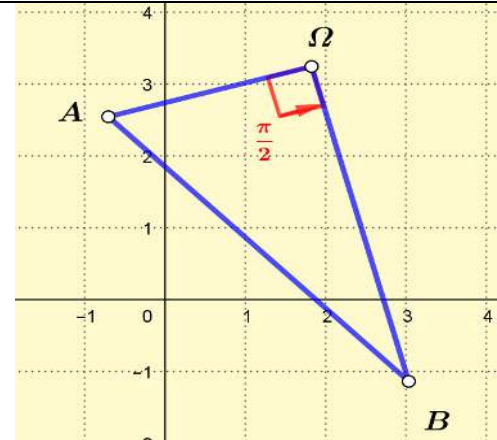
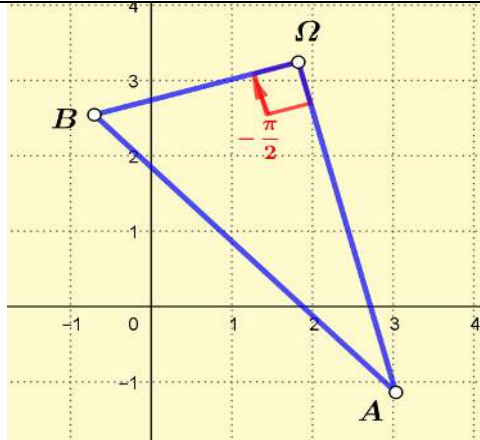
$$A(z_A) \xrightarrow{S_{(\Omega; k; \frac{\pi}{2})}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في Ω

فان المثلث $A\Omega B$

قائم في Ω



إذا كانت $\theta \notin \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}, k\pi\}$ و

$$A(z_A) \xrightarrow{r_{(\Omega; \theta)}} B(z_B)$$

إذا كانت $\theta \notin \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}, k\pi\}$ و

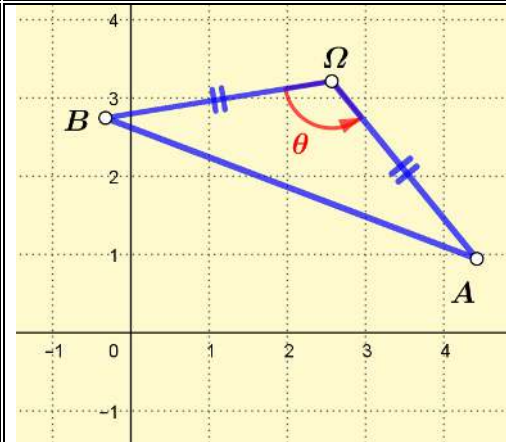
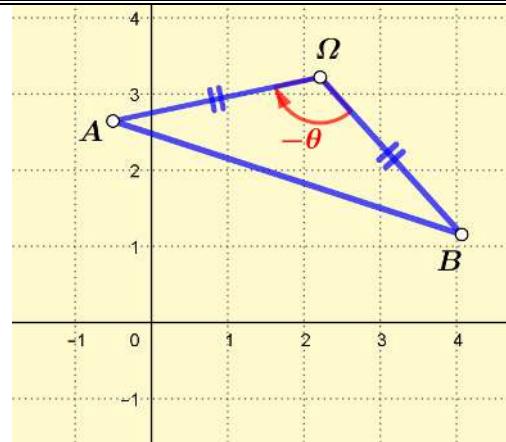
$$A(z_A) \xrightarrow{r_{(\Omega; \theta)}} B(z_B)$$

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين رأسه الأساسي Ω

فان المثلث $A\Omega B$

متساوي الساقين رأسه الأساسي Ω



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

طبيعة الرباعي ABCD

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A, z_B, z_C, z_D لواقع النقط A, B, C, D على الترتيب.
حيث النقط ليست في إستقامة

احد الشروط التالية محققة

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

القطران متناصفان

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$z_D - z_A = z_C - z_B$$

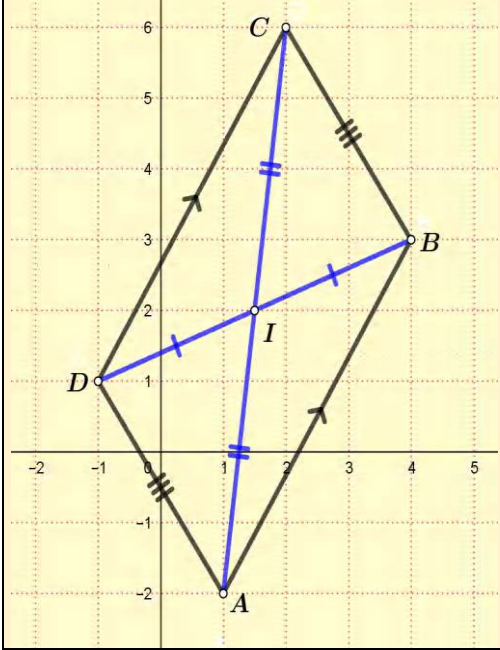
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ و } \left|\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ و } \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1$$

$$C = t_{\overrightarrow{AB}}(D)$$

C صورة D بالانسحاب
الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$



الرباعي ABCD متوازي أضلاع

احد الشروط التالية محققة

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

القطران متناصفان

$$|z_C - z_A| = |z_B - z_D| \text{ و } |z_D - z_A| = |z_C - z_B|$$

و متساويان

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

القطران متناصفان

$$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

وضلعان متتاليين متعامدان

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

ضلعان متقابلان متقابلان

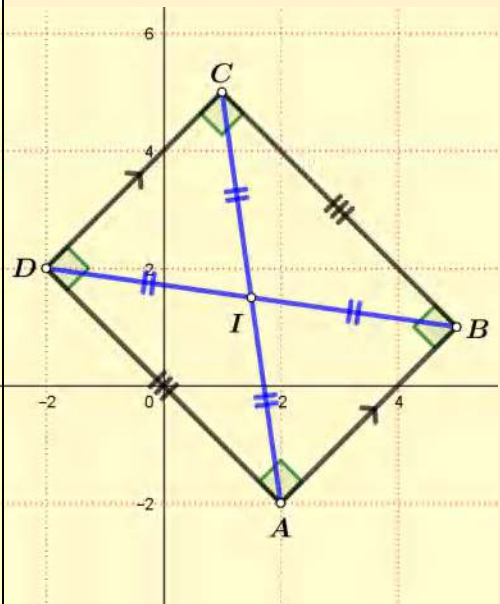
$$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

وخاملاهما متوزيان
وضلعان متتاليين متعامدان

$$\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ مع } B = r_{(I, \theta)}(A) \text{ و } \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = z_I$$

$$k \neq 1 \text{ مع } D = S_{\left(A, k, \frac{\pi}{2}\right)}(B) \text{ و } z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$k \neq 1 \text{ مع } D = S_{\left(A, k, \frac{\pi}{2}\right)}(B) \text{ و } z_A + z_C = z_B + z_D$$



الرباعي ABCD مستطيل

طبيعة الرباعي ABCD

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
الاعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C و z_D لواقع النقط A ، B ، C و D على الترتيب .
حيث النقط ليست في إستقامة

احد الشروط التالية محققة

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

القطران متناصفان

و متعامدان

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_D|$$

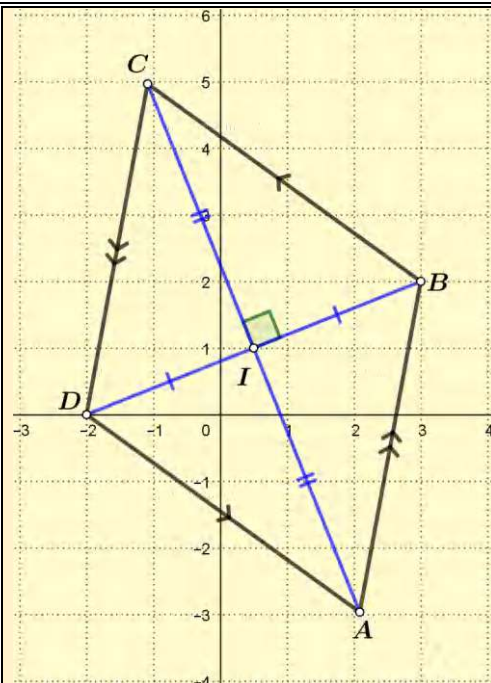
$\vec{AB} = \vec{DC}$
وضلعان متتالين متقايسان

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = z_I$$

$$D = S_{\left(I, k, \frac{\pi}{2}\right)}(C) \text{ و } B = S_{\left(I, k, \frac{\pi}{2}\right)}(A) \text{ مع } k \neq 1$$

$$B = S_{\left(I, k, \frac{\pi}{2}\right)}(A) \text{ (المثلث } AIB \text{ قائم في } I) \text{ و}$$

$$C = \sigma_I(A) \text{ و } D = \sigma_I(B)$$



الرباعي ABCD معين

احد الشروط التالية محققة

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

$$\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = i$$

القطران متناصفان

و متساويان ومتعامدان

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right) = i \text{ و}$$

القطران متناصفان
وضلعان متتالين متقايسان
ومتعامدان

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right) = i \text{ و}$$

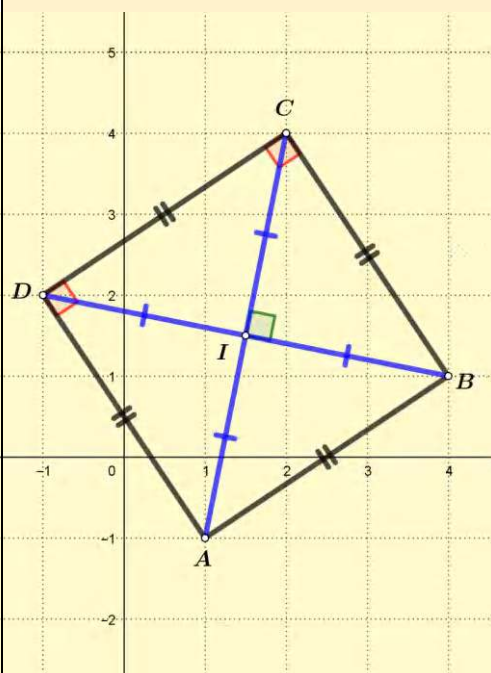
ضلعان متقابلان متقايسان
وحاملهما متوازيان وضلعان
متتالين متقايسان ومتعامدان

$$C = \sigma_I(A) \text{ و } \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right) = i$$

$$C = \sigma_I(A) \text{ و } \left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I}\right) = i$$

$$D = \sigma_I(B)$$

$$D = r_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}(C) \text{ و } C = r_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}(B) \text{ و } B = r_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}(A)$$



الرباعي ABCD مربع

طبيعة الرباعي ABCD

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

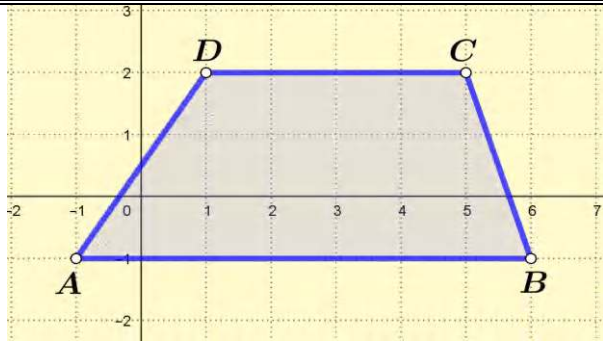
الاعداد المركبة z_A, z_B, z_C, z_D لواقع النقط A, B, C, D على الترتيب.
حيث النقط ليست في إستقامة

إذا كان $\overline{AB} = k \overline{DC}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

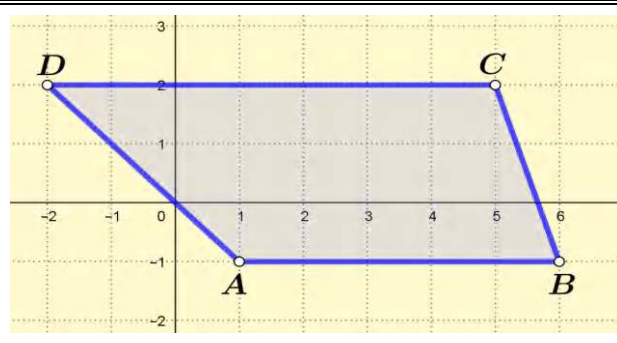
أو $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = k$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

أو $D(z_D) \xrightarrow{h(\Omega, k)} A(z_A)$ و $C(z_C) \xrightarrow{h(\Omega, k)} B(z_B)$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$k > 1$



$0 < k < 1$



إذا كان $\overline{AB} = k \overline{DC}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ و $(AD = BC \text{ أو } AC = BD)$

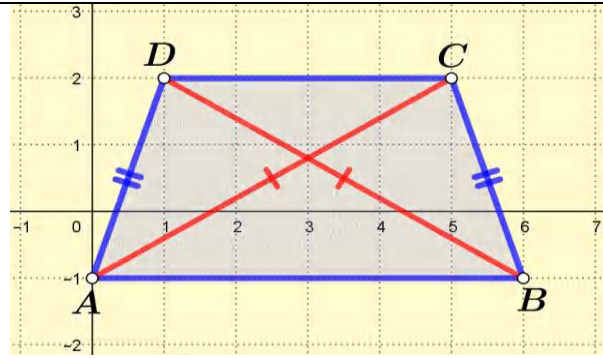
أو $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = k$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

و $(|z_D - z_A| = |z_C - z_B| \text{ أو } |z_A - z_C| = |z_D - z_B|)$

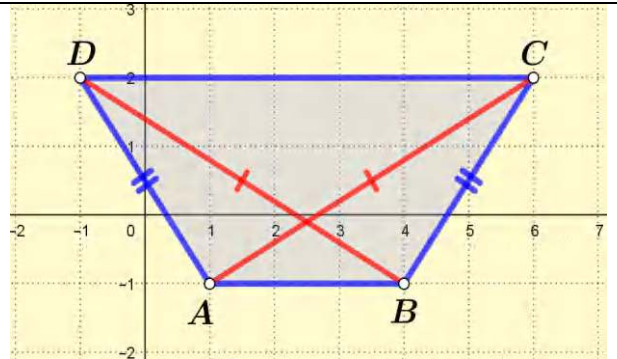
أو $D(z_D) \xrightarrow{h(\Omega, k)} A(z_A)$ و $C(z_C) \xrightarrow{h(\Omega, k)} B(z_B)$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

و $A(z_A) \xrightarrow[r \neq k\pi]{r(\Omega, \theta)} B(z_B)$

$k > 1$



$0 < k < 1$



الرباعي ABCD شبه منحرف

الرباعي ABCD شبه منحرف متساوي الساقين

إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

طبيعة الرباعي ABCD

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
الاعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C و z_D لواقع النقط A ، B ، C و D على الترتيب .
حيث النقط ليست في إستقامة

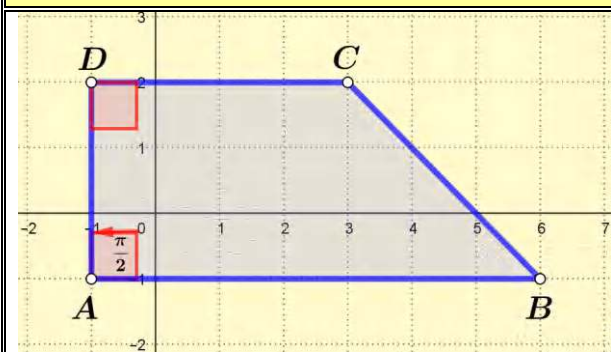
إذا كان $\overline{AB} = k \overline{DC}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ و $(\overline{AB} \perp \overline{AD} \text{ أي } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0)$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \beta i / \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ مع } k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \text{ أو } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = k$$

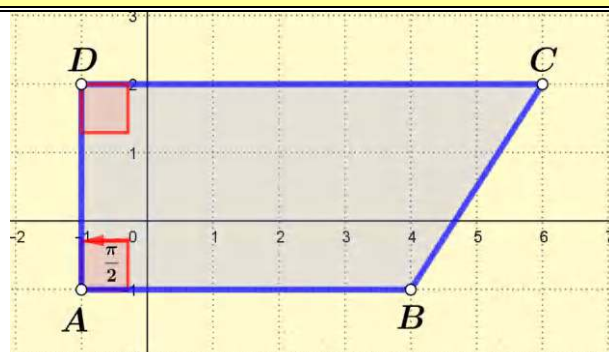
$$\text{أو } C(z_C) \xrightarrow{h_{(\Omega, k)}} B(z_B) \text{ و } D(z_D) \xrightarrow{h_{(\Omega, k)}} A(z_A) \text{ مع } k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$$\text{و } D(z_D) \xrightarrow{S_{(A, \lambda, \frac{\pi}{2})}} B(z_B) \text{ مع } \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

$k > 1$



$0 < k < 1$



الرباعي ABCD شبه منحرف قائم في A

إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

استقامية أربعة نقط او انتمؤها لنفس الدائرة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الاعداد المركبة z_A, z_B, z_C, z_D لواقع النقط A, B, C, D على الترتيب.

النقط A, B, C, D في استقامية

تحقيق الشرط التالي

$$\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \right) = a / a \in \mathbb{R}^*$$

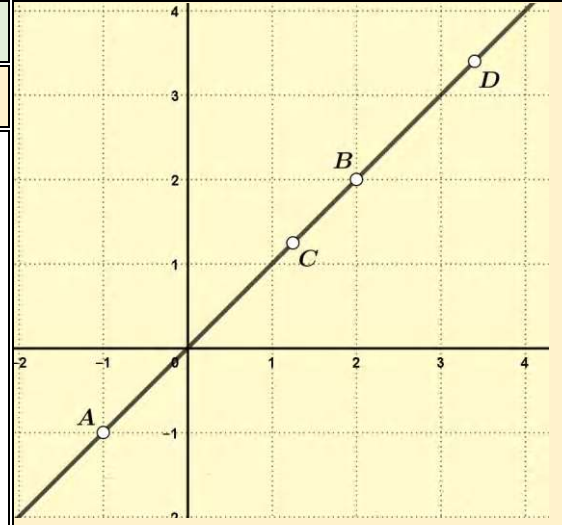
و

$$\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \right) = b / b \in \mathbb{R}^*$$

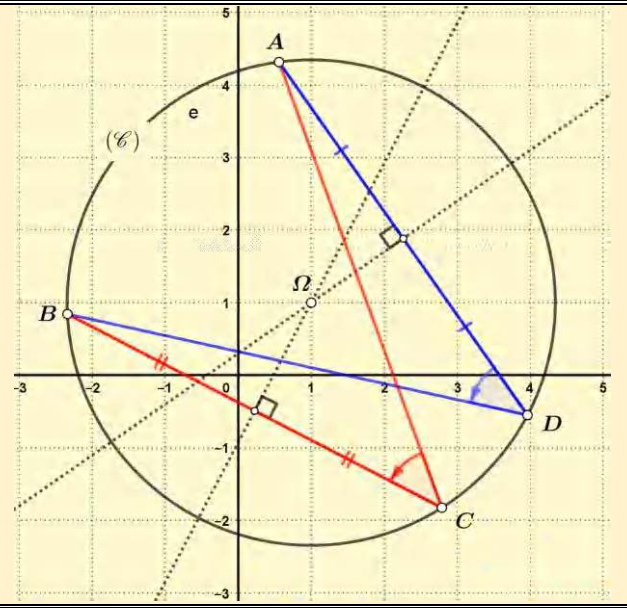
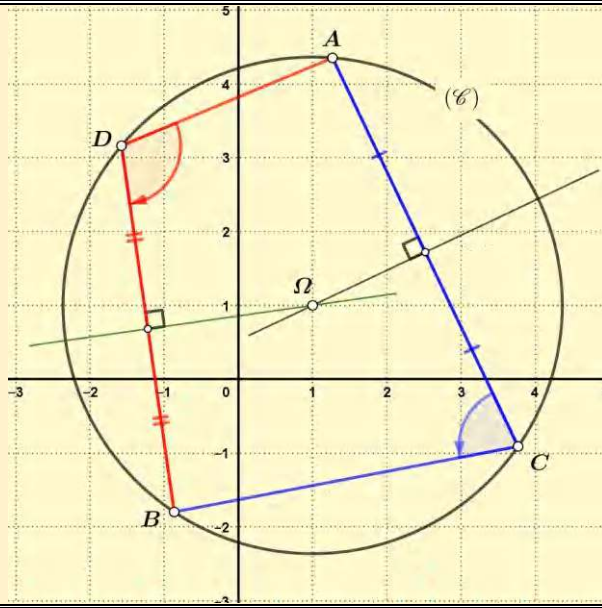
$$(\overline{CA}, \overline{CB}) = k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

و

$$(\overline{DA}, \overline{DB}) = k\pi / k \in \mathbb{Z}$$



النقط A, B, C, D تنتمي الى نفس الدائرة



تحقيق الشرط التالي

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) / \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \right) = \lambda / \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$(\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, \overline{DB}) + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) - \arg \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \right) = k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

تساوي عددين مركبين (في شكلهما الجبري)

مبرهنة: يكون عددا مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطول، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \text{ معناه } z = z'$$

الجزران التربيعيان لعدد مركب

تعريف: عدد مركب .

يسمى حل المعادلة $z^2 = \omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

نتيجة 1: (الجذران التربيعيان على الشكل الجبري)

ω عدد مركب معلوم وغير معدوم حيث $\omega = a + ib$ و z عدد مركب حيث $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\omega| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow z^2 = \omega \text{ فان } z \text{ جزرا تربيعيا للعدد } \omega$$

x و y
من نفس الإشارة

فان

$$b > 0$$

x و y مختلفين
في الإشارة

فان

$$b < 0$$

و في حالة :

$$\text{ومنه } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{|\omega|+a}{2}} \text{ و } x \pm \sqrt{\frac{|\omega|-a}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{|\omega|-a}{2}} \text{ و } y \pm \sqrt{\frac{|\omega|+a}{2}} \end{cases}$$

ومنه الجذران التربيعيان $z_1 = x + iy$ و $z_2 = -z_1$

تساوي عددين مركبين (في شكلهما المثلثي)

مبرهنة: يكون عددا مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطول، و عمدان متوافقان بترديد 2π .

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z') = \arg(z) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ معناه } z = z'$$

نتيجة 2: (الجذران التربيعيان على الشكل المثلثي)

$\omega = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ عدد مركب معلوم وغير معدوم حيث

و $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عدد مركب حيث

$$\begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\theta = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2| = |\omega| \\ \arg(z^2) = \arg(\omega) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ فان: } z \text{ جزرا تربيعيا للعدد } \omega$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\rho} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ z_2 = \sqrt{\rho} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) \right] = -z_1 \end{cases} \text{ ومنه الجذران التربيعيان: } \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ ومنه}$$



حل معادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية		
نعتبر المعادلة (1) $az^2 + bz + c = 0 \rightarrow$ حيث $a \neq 0$ و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ نحسب المميز		
$\Delta \in \mathbb{R}_+$ في حالة	$\Delta \in \mathbb{R}_-$ في حالة	
المعادلة (1) تقبل حلين حقيقيين $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة (1) تقبل حلين مركبين مترافقين $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a} ; z_1 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$	
حل معادلات من الدرجة الثانية بمعاملات مركبة		
نعتبر المعادلة (2) $az^2 + bz + c = 0 \rightarrow$ حيث $a \neq 0$ و b و c أعداد مركبة مع $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ نحسب المميز		
$\Delta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ في حالة	$\Delta \in \mathbb{R}_+$ في حالة	$\Delta \in \mathbb{R}_-$ في حالة
المعادلة (2) تقبل حلين حقيقيين $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$	المعادلة (2) تقبل حلين مركبين حقيقيين $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a} \end{cases}$	المعادلة (2) تقبل حلين مركبين $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \end{cases}$ حيث δ أحد الجذرين التربيعيين لـ Δ

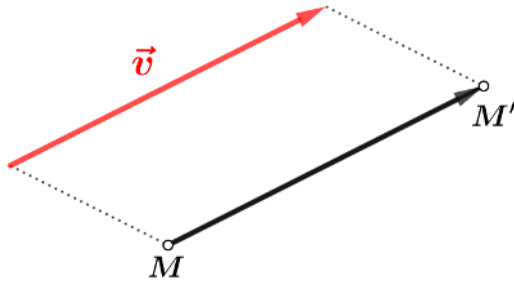
التحويلات النقطية

1 - الانسحاب $t_{\vec{v}}$

- Translation -

شعاع السحب هو $\vec{v}(\alpha; \beta)$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \quad \text{حيث} \quad M \xrightarrow{t_{\vec{v}}} M'$$



خواص التحويل

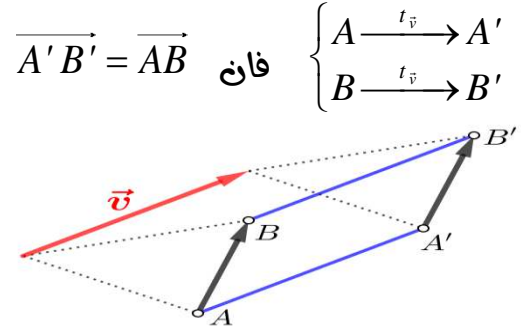
الخاصية المميزة

- تقابلي .

- تحويل عكسي $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$.

- تقايس : $A'B' = AB$.

- $\vec{v} \neq \vec{0}$ لا توجد نقاط صامدة .



التركيب

حالات خاصة للتحويل

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{(\vec{v} + \vec{u})} \quad -$$

- عندما $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $t_{\vec{v}} = I_{(P)}$

$$\underbrace{t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{v}} \circ \dots \circ t_{\vec{v}}}_{\text{مرّة } n} = t_{\vec{v}}^n = t_{(n\vec{v})} \quad -$$

أي التحويل الحيدري أو الطابق .

عبارة التحويل في المستوى المركب

العبارة التحليلية في المستوى التآلفي

$$M(z) \xrightarrow{t_{\vec{v}}} M(z')$$

$$M(x; y) \xrightarrow{t_{\vec{v}}} M(x'; y')$$

$$z' = z + z_{\vec{v}}$$

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$$

$$z' = z + \alpha + \beta i$$

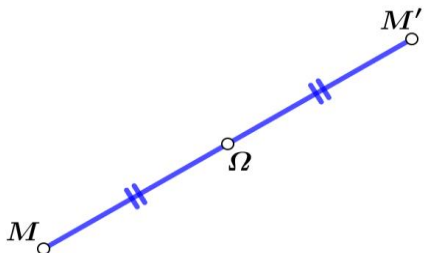
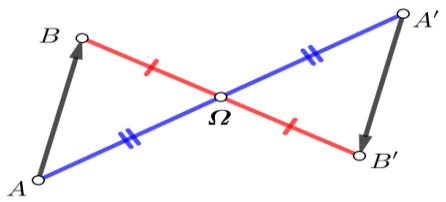
ملاحظات على التحويل : الانسحاب يحافظ على كل من

- الاستقامية - التوازي - التعامد - الزوايا و اتجاهها - المربع - الاشكال -
- الاطوال - المساحات -



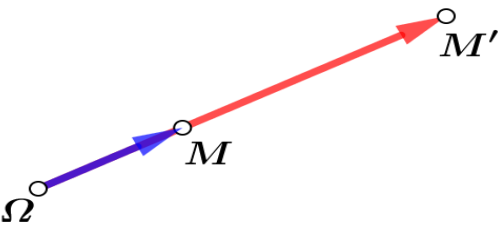
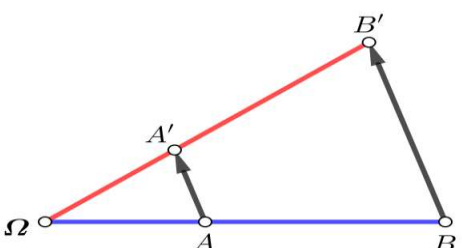
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

التحويلات النقطية

Ω منتصف القطعت $[MM']$ 	2 - التناظر المركزي σ_Ω - Symétrie centrale - مركز التناظر هي النقطة $\Omega(x_0; y_0)$ $M \xrightarrow{\sigma_\Omega} M'$ حيث $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$
خواص التحويل	الخاصية المميزة
- تقابلي . - تحويل عكسي $\sigma_\Omega^{-1} = \sigma_\Omega$ (تضامني). - تقايس : $A'B' = AB$. - Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة .	فان $\begin{cases} A \xrightarrow{\sigma_\Omega} A' \\ B \xrightarrow{\sigma_\Omega} B' \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ 
التركيب	حالات خاصة للتحويل
- $\sigma_{\Omega_2} \circ \sigma_{\Omega_1} = t_{2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}$ - $\underbrace{\sigma_\Omega \circ \sigma_\Omega \circ \dots \circ \sigma_\Omega}_{\text{مرّة } n} = \begin{cases} I_{(P)} / n & \text{في} \\ \sigma_\Omega / n & \text{بني} \end{cases}$	- عندما $\Omega = O$ يسمى تناظر بالنسبة للمبدأ المعلم .
عبارة التحويل في المستوي المركب	العبارة التحليلية في المستوي النألي
$M(z) \xrightarrow{\sigma_\Omega} M(z')$ $z' - z_\Omega = -(z - z_\Omega)$ $z' = -z + 2z_\Omega$	$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_\Omega} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$
$M(z) \xrightarrow{\sigma_\Omega} M(z')$ $z' = -z$	$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_O} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ عندما $\Omega = O$
ملاحظات على التحويل : التناظر المركزي يحافظ على كل من	
- الاستقامية - التوازي - التعامد - الزوايا وإتجاهها - المرجع - الاشكال - - الاطوال - المساحات -	



التحويلات النقطية

النقطة Ω ، M و M' في إستقامية 	3 - التماكي $h_{(\Omega,k)}$ - Homothétie - مركزه $\Omega(x_0; y_0)$ و نسبته $k \in \mathbb{R}^*$ $M \xrightarrow{h_{(\Omega,k)}} M'$ حيث $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$
خواص التحويل	الخاصية المميزة
- تقابلي . - تحويل عكسي $h_{(\Omega,k)}^{-1} = h_{(\Omega, \frac{1}{k})}$ - ليس تقايس $A'B' = k AB$ مع $(k \neq \pm 1)$ - Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة $(k \neq 1)$	فان $\begin{cases} A \xrightarrow{h_{(\Omega,k)}} A' \\ B \xrightarrow{h_{(\Omega,k)}} B' \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$ 
التركيب	حالات خاصة للتحويل
- $h_{(\Omega,k_1)} \circ h_{(\Omega,k_2)} = h_{(\Omega,k_1 \times k_2)}$ - $h_{(\Omega,k)} \circ h_{(\Omega,k)} \circ \dots \circ h_{(\Omega,k)} = h_{(\Omega,k)}^n = h_{(\Omega,k^n)}$ مر n	- عندما $k=1$ فان $h_{(\Omega,1)} = I_{(\pi)}$ - عندما $k=-1$ فان $h_{(\Omega,-1)} = \sigma_{\Omega}$
عبارة التحويل في المستوي المركب	العبارة التحليلية في المستوي التآلي
$M(z) \xrightarrow{h_{(\Omega,k)}} M(z')$ $z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$ $z' = k z + (1-k) z_{\Omega}$	$M(x; y) \xrightarrow{h_{(\Omega,k)}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = k x + (1-k) x_0 \\ y' = k y + (1-k) y_0 \end{cases}$
$M(z) \xrightarrow{h_{(O,k)}} M(z')$ $z' = k z$	$M(x; y) \xrightarrow{h_{(O,k)}} M(x'; y')$ عندما $\Omega = O$: $\begin{cases} x' = k x \\ y' = k y \end{cases}$
ملاحظات على التحويل: التماكي يحافظ على كل من	
- الاستقامية - التوازي - النعامد - الزوايا و إتجاهها - المرجح - - الاشكال لكن : في حالة $k < 1$ (تصغير) - في حالة $k > 1$ (تكبير) -	



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

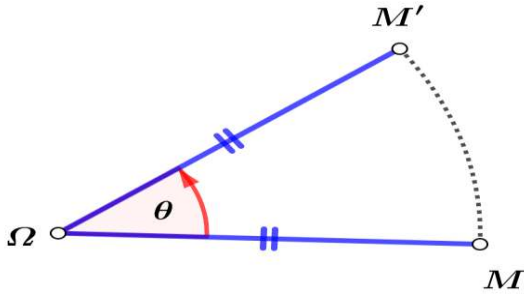
التحويلات النقطية

4 - الدوران $r_{(\Omega, \theta)}$

- Rotation -

مركزه $\Omega(x_0; y_0)$ و زاويته $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \theta + 2\lambda\pi \end{cases} \text{ حيث } M \xrightarrow{r_{(\Omega, \theta)}} M'$$

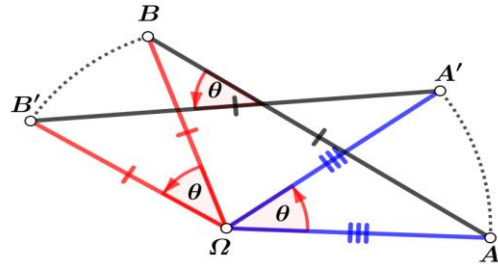


خواص التحويل

الخاصية المميزة

- تقابلي .
- تحويله العكسي $r_{(\Omega, \theta)}^{-1} = r_{(\Omega, -\theta)}$
- تقايس $A'B' = AB$
- Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة

$$\begin{cases} A'B' = AB \\ \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \text{ فان } \begin{cases} A \xrightarrow{r_{(\Omega, \theta)}} A' \\ B \xrightarrow{r_{(\Omega, \theta)}} B' \end{cases}$$



التركيب

حالات خاصة للتحويل

$$\begin{aligned} & r_{(\Omega, \theta_1)} \circ r_{(\Omega, \theta_2)} = r_{(\Omega, \theta_1 + \theta_2)} \\ & \underbrace{r_{(\Omega, \theta)} \circ r_{(\Omega, \theta)} \circ \dots \circ r_{(\Omega, \theta)}}_{n \text{ مرّات}} = r_{(\Omega, \theta)}^n = r_{(\Omega, n\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{عندما } \theta = 2\lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \\ & \text{فان } r_{(\Omega, \theta)} = I_{(P)} \\ & \text{عندما } \theta = (2\lambda + 1)\pi / \lambda \in \mathbb{Z} \\ & \text{فان } r_{(\Omega, \theta)} = \sigma_{\Omega} \end{aligned}$$

عبارة التحويل في المستوى المركب

العبارة التحليلية في المستوى التآلي

$$\begin{aligned} M(z) & \xrightarrow{r_{(\Omega, \theta)}} M(z') \\ z' - z_{\Omega} & = e^{i\theta} (z - z_{\Omega}) \\ z' & = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) z_{\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x; y) & \xrightarrow{r_{(\Omega, \theta)}} M(x'; y') \\ \begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta \\ y' - y_0 = (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(z) & \xrightarrow{r_{(O, \theta)}} M(z') \\ z' & = e^{i\theta} z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x; y) & \xrightarrow{r_{(O, \theta)}} M(x'; y') \\ \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} & \text{عندما } \Omega = O \end{aligned}$$

ملاحظات على التحويل: الدوران يحافظ على كل من

- الاستقامية - التوازي - التعامد - الزوايا و اتجاهها - المرجع - الاشكال -
- الاطوال - المساحات -

التحويلات النقطية

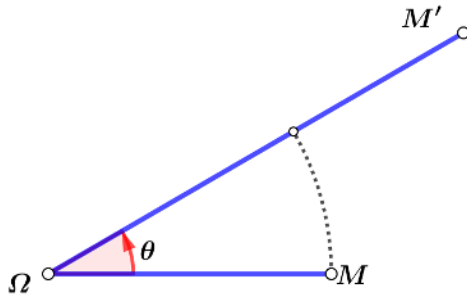
5 - التشابه المباشر $\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}$

- Similitude directe -

مركزه $\Omega(x_0, y_0)$ و زاويته $\theta \in \mathbb{R}$

ونسبته $k \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \theta + 2\lambda\pi \end{cases} \text{ حيث } M \xrightarrow{\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}} M'$$



خواص التحويل

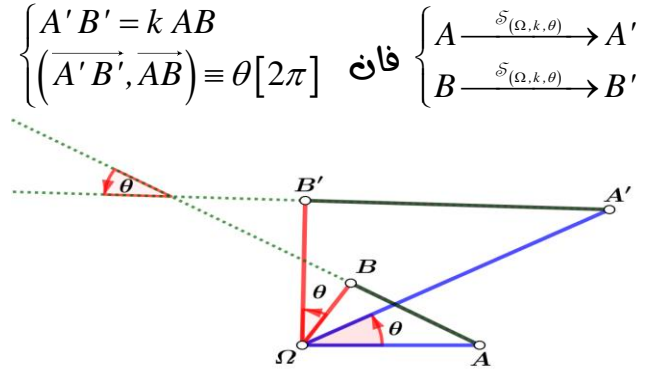
الخاصية المميزة

- تقابلي .

$$\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}^{-1} = \mathcal{S}_{\left(\Omega, \frac{1}{k}, -\theta\right)}$$

- ليس تقايس لان $A'B' = k AB$ مع $k \neq 1$

- Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة



التركيب

حالات خاصة للتحويل

$$\mathcal{S}_{(\Omega, k_1, \theta_1)} \circ \mathcal{S}_{(\Omega, k_2, \theta_2)} = \mathcal{S}_{(\Omega, k_1 k_2, \theta_1 + \theta_2)}$$

$$\underbrace{\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} \circ \mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} \circ \dots \circ \mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}}_{n \text{ مرات}} = \mathcal{S}_{(\Omega, k^n, n\theta)}$$

$$\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} = r_{(\Omega, \theta)} \circ h_{(\Omega, k)} = h_{(\Omega, k)} \circ r_{(\Omega, \theta)}$$

$$r_{(\Omega, \theta)} \circ h_{(\Omega, k)} = \begin{cases} \mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} & / k > 0 \\ \mathcal{S}_{(\Omega, -k, \pi + \theta)} & / k < 0 \end{cases}$$

- عندما $\theta = 2\lambda\pi / \lambda \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} = h_{(\Omega, k)} \text{ فان}$$

- عندما $\theta = (2\lambda + 1)\pi / \lambda \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} = h_{(\Omega, -k)} \text{ فان}$$

- عندما $k = 1$ فان $\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)} = r_{(\Omega, \theta)}$

عبارة التحويل في المستوي المركب

العبارة التحليلية في المستوي التآلفي

$$\begin{aligned} M(z) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}} M(z') \\ z' - z_\Omega &= k e^{i\theta} (z - z_\Omega) \\ z' &= k e^{i\theta} z + (1 - k e^{i\theta}) z_\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x; y) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{(\Omega, k, \theta)}} M(x'; y') \\ \begin{cases} x' - x_0 = k [(x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta] \\ y' - y_0 = k [(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(z) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{(O, k, \theta)}} M(z') \\ z' &= k e^{i\theta} z \end{aligned}$$

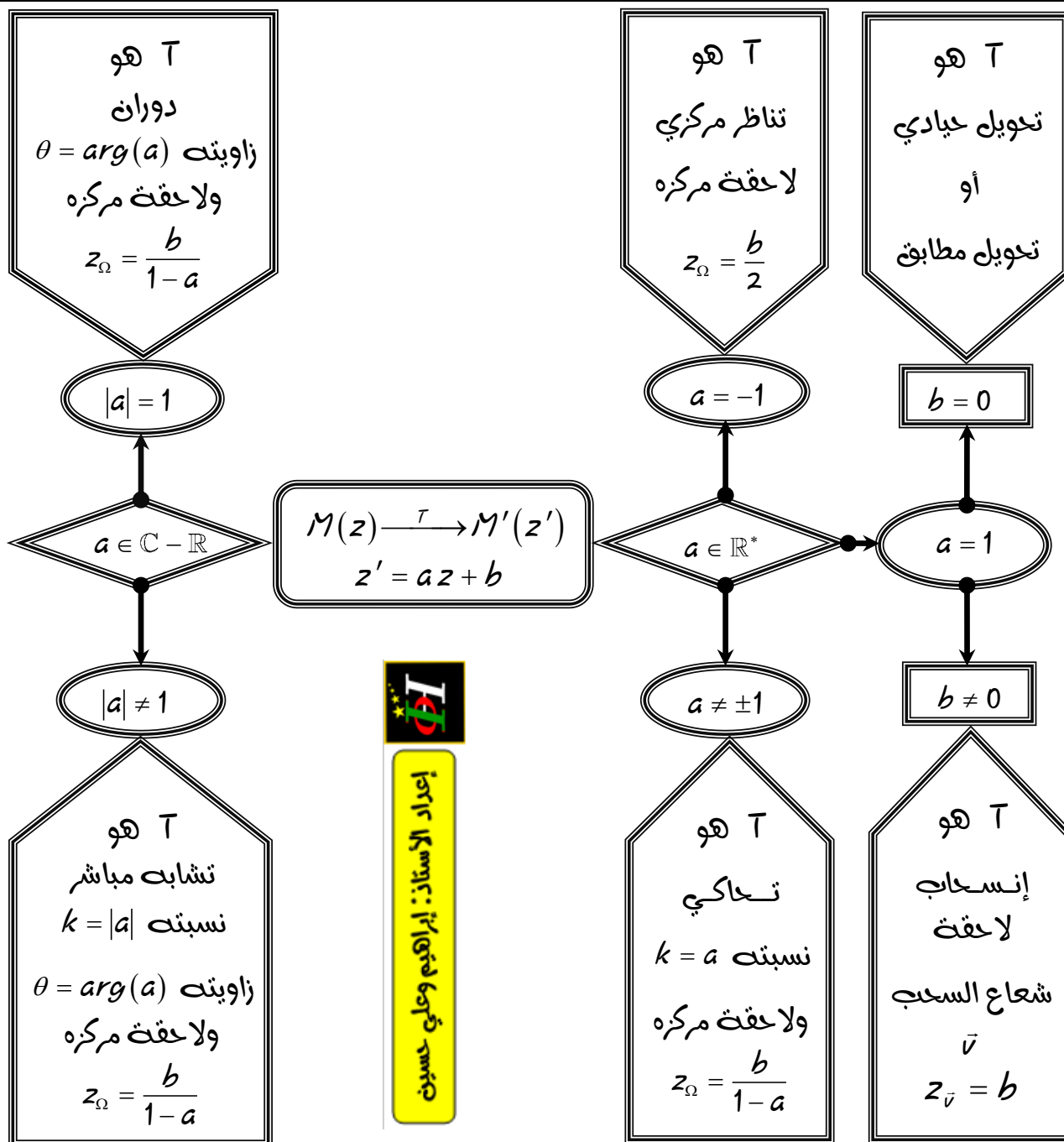
$$\begin{aligned} M(x; y) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{(O, k, \theta)}} M(x'; y') \\ \begin{cases} x' = k(x \cos \theta - y \sin \theta) \\ y' = k(x \sin \theta + y \cos \theta) \end{cases} \end{aligned} \quad \text{عندما } \Omega = O$$

ملاحظات على التحويل: التشابه المباشر يحافظ على كل من

- الاستقامة - التوازي - التعامد - الزوايا و اتجاهها - المربع -
- الاشكال لكن : في حالة $0 < k < 1$ (تصغير) - في حالة $k > 1$ (تكبير) -

طبيعة التحويل T

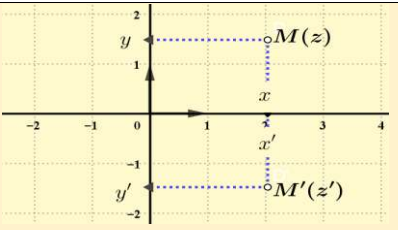
$a \neq 0$ و $a, b, c \in \mathbb{C}$ حيث $z' = az + b$ مع $M(z) \xrightarrow{T} M'(z')$



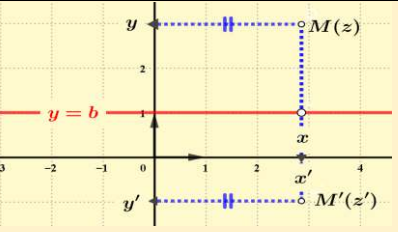
إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

التناظرات التعامدية الشكيرة

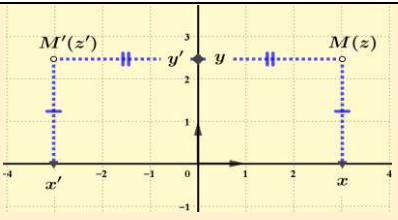
التناظر بالنسبة لمحور الـ y فواصل

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(xx')}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(xx')}} M(z')$ $Z' = \bar{Z}$	

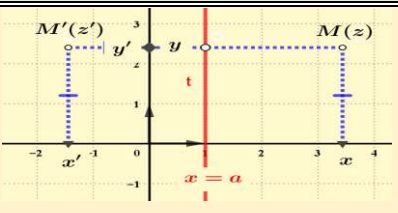
التناظر بالنسبة لمستقيم موازي لمحور الـ y فواصل

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(y=b)}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(y=b)}} M(z')$ $Z' = \bar{Z} + 2ib$	

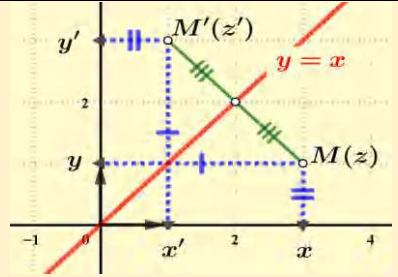
التناظر بالنسبة لمحور الـ x ترتيب

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(yy')}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(yy')}} M(z')$ $Z' = -\bar{Z}$	

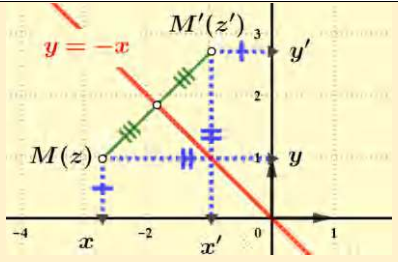
التناظر بالنسبة لمستقيم موازي لمحور الـ x ترتيب

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(x=a)}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(x=a)}} M(z')$ $Z' = -\bar{Z} + 2a$	

التناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول (y=x)

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(y=x)}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(y=x)}} M(z')$ $Z' = i\bar{Z}$	

التناظر بالنسبة لمنصف الربع الثاني (y=-x)

عبرة التحليل في المستوي التآلي	عبرة التحويل في المستوي المركب	
$M(x; y) \xrightarrow{\sigma_{(y=-x)}} M(x'; y')$ $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$	$M(z) \xrightarrow{\sigma_{(y=-x)}} M(z')$ $Z' = -i\bar{Z}$	

طبيعة التحويل T

$$M(z) \xrightarrow{T} M'(z')$$

حيث

$$z' = az + b$$

علما أن

$$\begin{cases} B = T(A) \\ D = T(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \xrightarrow{T} B \\ C \xrightarrow{T} D \end{cases}$$

فإن

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$$

يحدد طبيعة التحويل

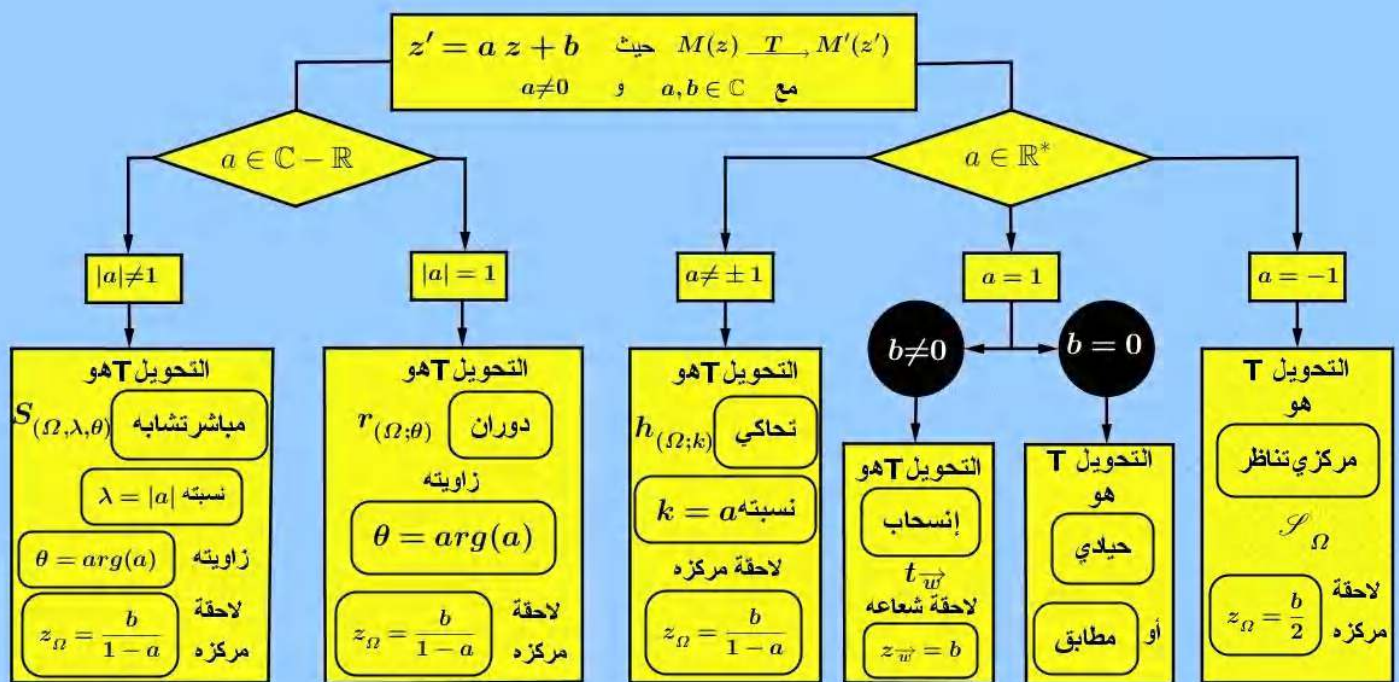
انطلاق من طبيعة

العدد a

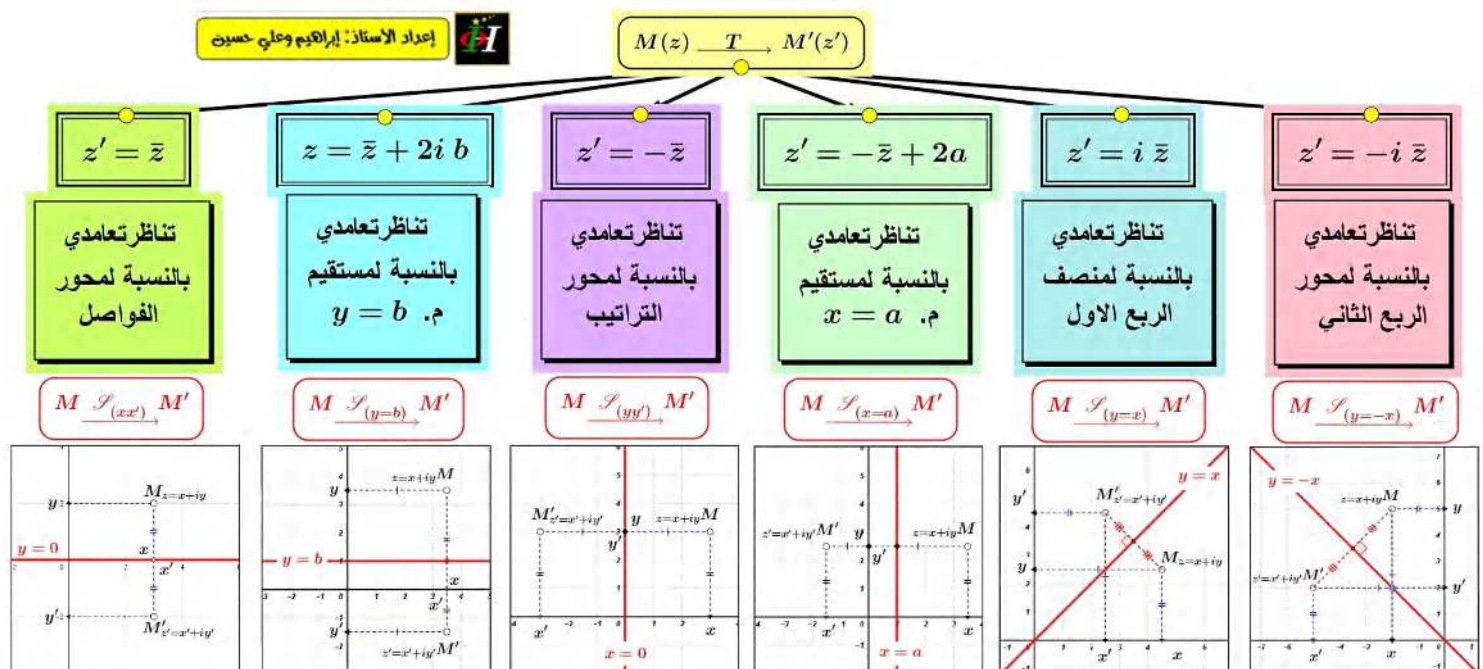
$$\begin{cases} a = \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \\ b = z_B - az_A \end{cases} \quad \text{و بذلك}$$



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين



التحاكي

موضع مركز تحاكي بالنسبة لنقطة وصورتها

$$A \neq B \quad \text{مع} \quad A \xrightarrow{h(C,k)} B$$

$$k \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad \text{حيث} \quad \overrightarrow{BC} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{BA} \quad \text{ومنه} \quad \overrightarrow{CB} = k \overrightarrow{CA}$$

$$k > 1$$

فان



$$\frac{k}{k-1} > 1$$



$$C \in]A; -\overrightarrow{AB})$$

$$k < 0$$

فان



$$0 < \frac{k}{k-1} < 1$$



$$C \in]AB[$$

$$0 < k < 1$$

فان

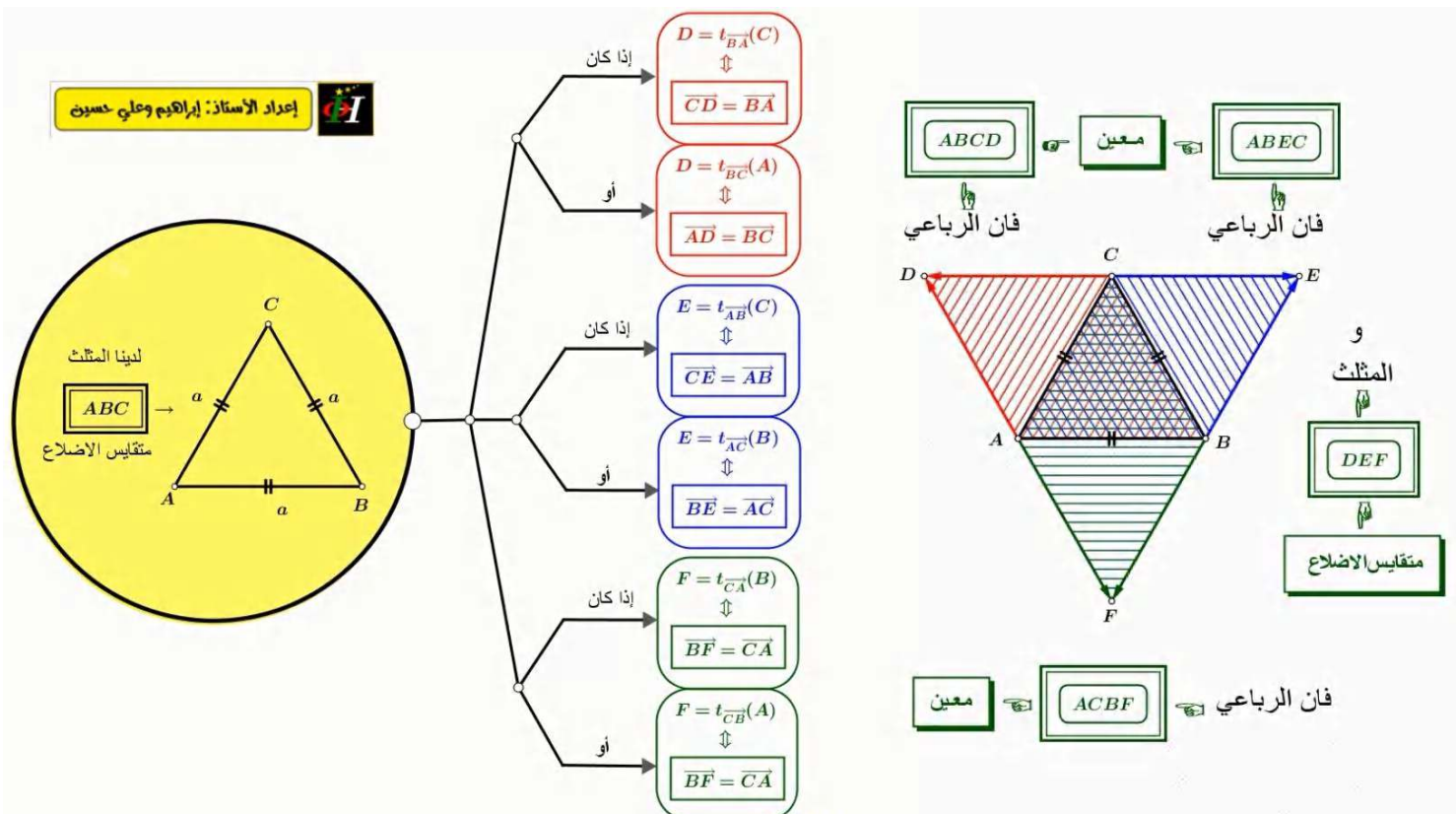
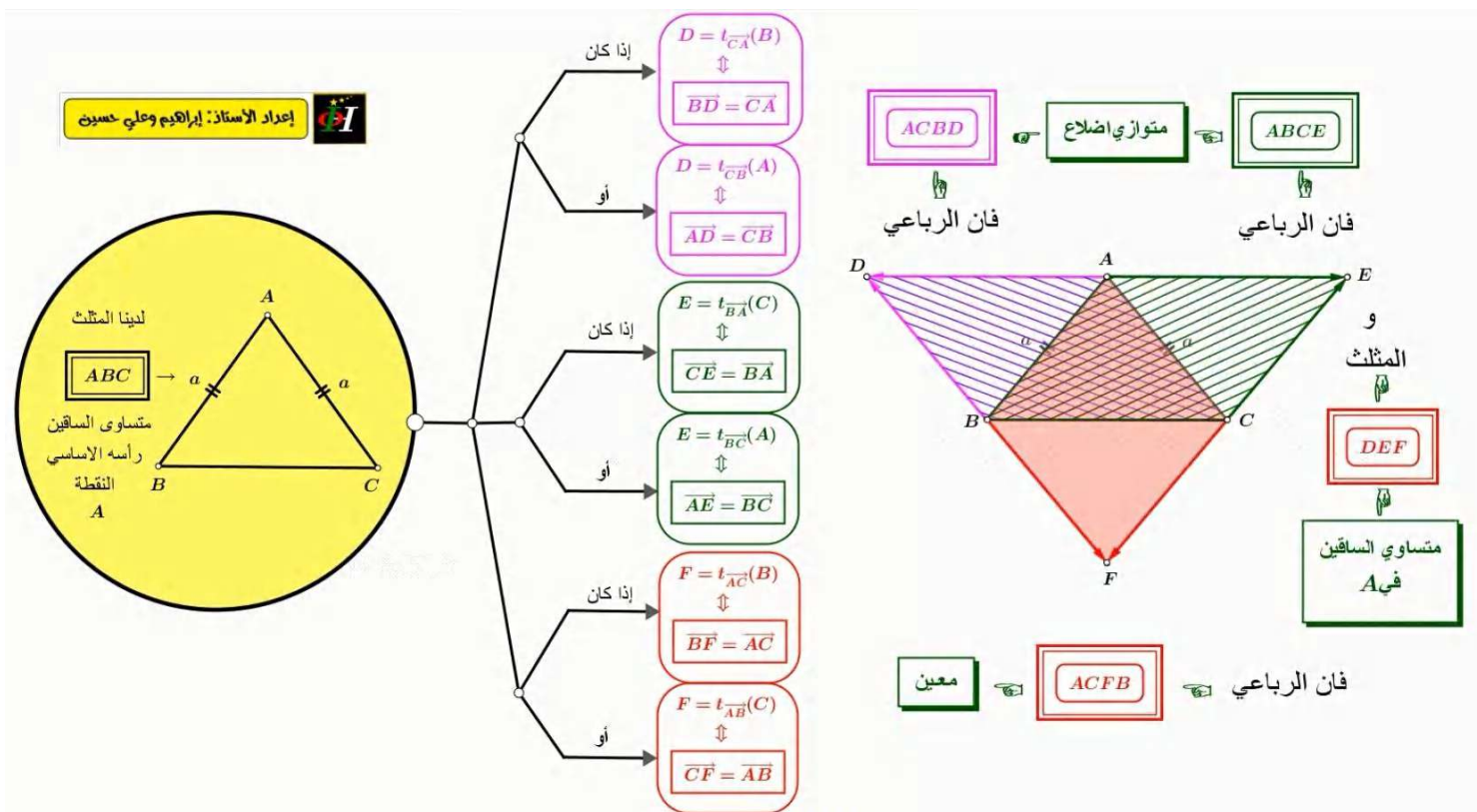


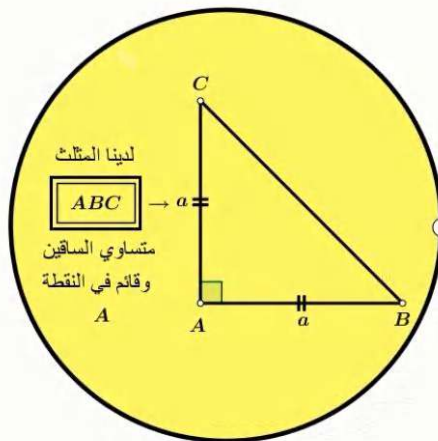
$$\frac{k}{k-1} < 0$$



$$C \in]B; \overrightarrow{AB})$$







إذا كان

$$D = t_{\overline{AC}}(B)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{BD} = \overline{AC}$$

أو

$$D = t_{\overline{AB}}(C)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{CD} = \overline{AB}$$

إذا كان

$$D = t_{\overline{BC}}(A)$$

$$\Downarrow$$

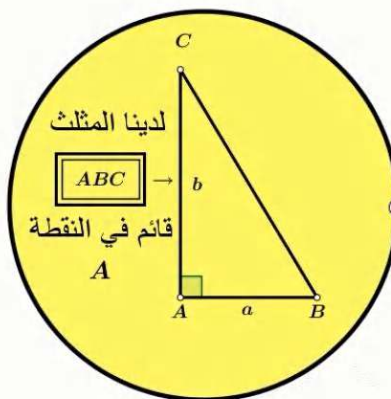
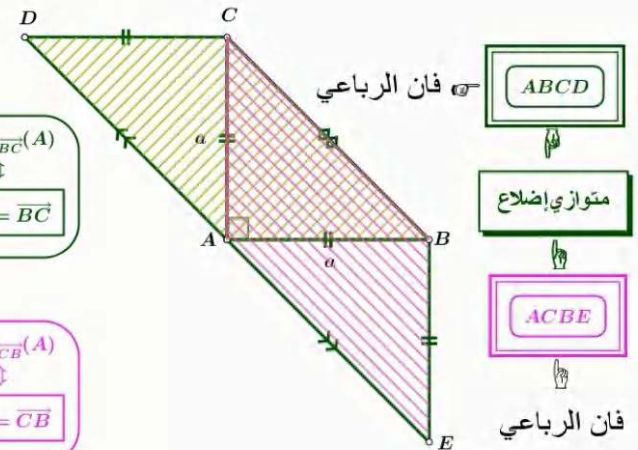
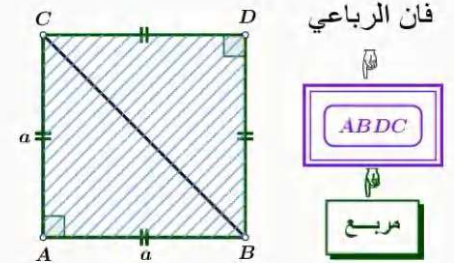
$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

إذا كان

$$E = t_{\overline{CB}}(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{AE} = \overline{CB}$$



إذا كان

$$D = t_{\overline{AC}}(B)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{BD} = \overline{AC}$$

أو

$$D = t_{\overline{AB}}(C)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{CD} = \overline{AB}$$

إذا كان

$$D = t_{\overline{BC}}(A)$$

$$\Downarrow$$

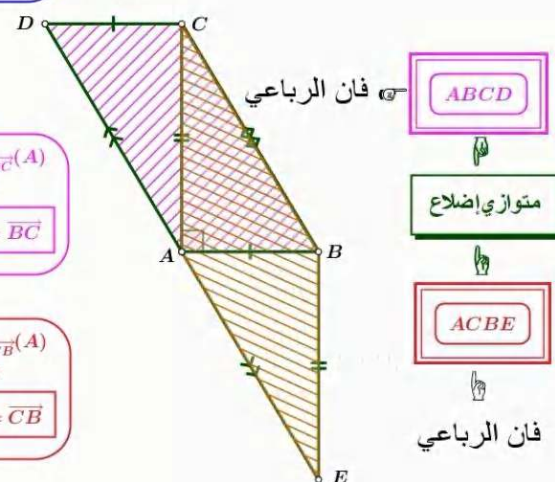
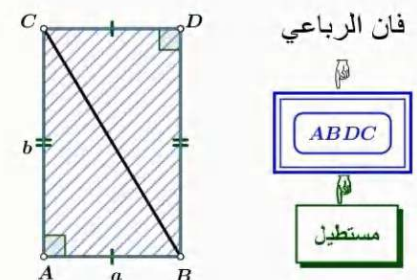
$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

إذا كان

$$E = t_{\overline{CB}}(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{AE} = \overline{CB}$$



المعادلات المثلثية البسيطة

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x = -\alpha + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = -g(x) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x = (\pi - \beta) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = (\pi - g(x)) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \end{cases}$$

$$\cos x = \sin \alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x = \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \delta \Leftrightarrow (x = \delta + k\pi / k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} \tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi ; g(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k'' \quad / k', k'' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



إعداد الأستاذ: إدريس وعلي حسين

$$(1) \leftarrow \cos x = a$$



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

في حالة :



$$a \in [-1; 1]$$

فان

فانه يوجد على الأقل
عدد حقيقي α حيث
 $\cos \alpha = a$

فان

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow (1)$$



$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x = -\alpha + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

في حالة :



$$a \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

فان

$$S_{(1)} = \emptyset$$

$$(2) \leftarrow \sin x = b$$

في حالة :



$$b \in [-1; 1]$$

فان

فانه يوجد على الأقل
عدد حقيقي β حيث
 $\sin \beta = b$

فان

$$\sin x = \sin \beta \Leftrightarrow (2)$$



$$\begin{cases} x = \beta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ x = (\pi - \beta) + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

في حالة :



$$b \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

فان

$$S_{(2)} = \emptyset$$



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

المعادلات المثلثية الشهيرة

$$(\cos x = 1) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z})$$

$$(\cos x = 0) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$(\cos x = -1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x = \pi + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}) \\ (x = -\pi + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$(\cos x = -\sin x) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$(\sin x = 0) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z})$$

$$(\sin x = 1) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right)$$



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

$$(\sin x = -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right) \\ \left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right) \end{cases}$$

$$(\cos x = \sin x) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$(\tan x = 1) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$(\tan x = 0) \Leftrightarrow (x = k\pi \quad / k \in \mathbb{Z})$$

$$(\tan x = -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right) \\ \left(x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \right) \end{cases}$$

بعض العلاقات المثلثية

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1 \end{array} \right\} / \alpha \in \mathbb{R}$$



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين



إعداد الأستاذ: إبراهيم وعلي حسين

$$\alpha \in \mathbb{R} ; \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} ; \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\alpha \in \mathbb{R} ; \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$