

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} , z_B = i z_A \text{ و } z_C = \overline{z_A} \text{ (هو مرافق } z_A \text{)} .$$

(1) أكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الجبري .

(2) أ - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E) : \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi} \dots$

ب - إستنتج أن النقطة A هي صورة B بواسطة تحاك h مركزه النقطة Ω ذات اللاحة z_Ω (حيث : z_Ω هي حل المعادلة (E)) يطلب تعين نسبته ، ثم أكتب عبارته المركبة .

(3) أ - جد المركز و نصف القطر للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

ب - بين أن النقطة H ذات اللاحة $z_H = -1+3i$ هي مركز الدائرة (C') صورة (C) بالتحاكي h ، ثم عين معادلة ديكارتية للدائرة (C') .

(4) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا .

(5) أ - عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحة z حيث : $z = z_C - k \left(\frac{z_A}{z_C}\right)$ مع k يسمح $\mathbb{R}^+$.

ب - عين (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

(1) نسحب من الكيس ثلاث كرات في آن واحد :

أحسب إحتمال كل حادثة من الأحداث التالية :

A : "الكرات المسحوبة كلها حمراء" ، B : "توجد كرة واحدة حمراء في السحب"

C : "توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب" ، D : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة مثني مثني" .

(2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة خضراء حيث : $(n \geq 2)$ ، ثم نسحب كرتين منه على التوالي

و بدون إرجاع .

- نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (10-) نقطة و سحب كرة خضراء يساوي (5+) نقطة .
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها :
- أ - أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
- ب - عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .
- ج - كيف نختار عدد الكرات الخضراء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3} \end{cases}$$
- (1) عين قيم u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .
- (2) فيما يلي نضع : $u_0 = 0$
 - أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 \leq u_n < 1$.
 - ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة و أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$.
- ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- ج- إستنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد .
- (4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
 - أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 - ب- عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
 - ج - أحسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n حيث :
$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$
 و $\ln(T'_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$
 - (1) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .
 - (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,14 < \alpha < 1,15$.
 - (3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية .
- (II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$ ، (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

- (1) أ - أحسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج - بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- (2) أ - أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = 2x - 1$.
- ب - أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- ج - بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب تحديد معادلة له .
- د - أحسب كلا من : $f(0)$ و $f(2)$ ، ثم أنشئ : (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .
- (3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$ حلين متميزين .
- III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (x - 1)e^{-x+1}$.
- (1) باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0 .
- (2) ليكن λ عددا حقيقيا حيث : $\lambda > 1$ ، $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1$ و $x = \lambda$.
- أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ، ثم أحسب : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين (لا نفرق بينها عند اللمس).
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

(1) احسب احتمالات الأحداث التالية :

A : " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " .

B : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " .

C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

(2) أ- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها.

• عين قيم المتغير العشوائي X .

• بين أن: $P(X=3) = \frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ وعين قانون احتمال X .

ب - نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب مبلغ 50DA قبل اجراء السحب. ويكسب 25DA لكل لون من الألوان المحصل عليها .

• هل اللعبة مربحة له ؟ .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I (1) الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x+1)$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$.

(2) استنتج أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن: $\ln(x+1) \leq x$.

II) نضع : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n) \end{cases}$ (من أجل كل عدد طبيعي n).

(1) احسب u_1 ، u_2 .

(2) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

(3) أ - أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 1$.

ب - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة (C) كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^3 - 8$.

(1) تحقق أن : $(z-2)(z^2 + 2z + 4) = z^3 - 8$.

(2) استنتج كل حلول المعادلة : $z^3 - 8 = 0$..

- (II) نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A, B, C ذات اللواحق : $z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2$ على الترتيب .
- (1) اكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي.
 - (2) استنتج أن النقاط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة . (يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها).
 - (3) بين أن : $z_A^{2016} = 2^{2016} z_A^{2017}$ ، ثم استنتج مايلي : $(z_A^{2017} + z_B^{2017} + z_C^{2017})$.
 - (4) اكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي .
 - (5) أ - اعط تفسيرا هندسيا لطويلته وعمدته .
ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $h(x) = e^x - x + 2$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة h .
 - (2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - x - 1 \geq 0$.
- (II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}(x-1) + x + 1$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن : $f'(x) = e^{-x} \cdot h(x)$.
 - (2) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (3) بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - (4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) . عين معادلة له.
 - (5) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - (6) برهن أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.
- (III) ليكن (T_a) مستقيم معادلته : $y = x + a$ حيث : $a \in \mathbb{R}$.
- (1) عين a حتى يكون (T_a) مماسا لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيين احداثياتها .
 - (2) احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T_a) و (C_f) .
 - (3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^x - x + 1 = 0$.

إنتهى الموضوع الثاني