

تقويم تشخيصي

المادة : رياضيات

المستوى : سنة ثالثة الشعب العلمية

نصر التمرين :

- I -** a و b عددين حقيقيين ، f دالة معرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ ب : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول $2cm$.
- عين a و b حتى تكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية لـ f .
- II -** نضع فيما يلي : $a = 1$ و $b = 2$.
- 1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - 2 أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا .
 - 3 ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 - 4 أثبت أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يُطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
 - 5 جد إحداثي Ω نقطة تقاطع (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي .
 - 6 أثبت أنّ Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
 - 7 أثبت أنّ لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل Ω .
 - 8 أرسم (C_f) ، المستقيمان المقاربين و المماس (T) .
 - 9 ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

* بالتوفيق في شهادة البكالوريا *

2022

تصحيح التقويم التشخيصي

المادة : رياضيات

المستوى : سنة ثالثة الشعب العلمية

I - □ تعيين a و b حتى تكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية لـ f :

$$\blacktriangleleft f(-1) = 0 \text{ معناه } \frac{a(-1)^2 + b(-1) + 1}{(-1) - 1} = 0 \text{ ومنه : (1) } a - b = -1 \dots$$

$$\blacktriangleleft f(-1) = 0 \text{ قيمة حدية لـ } f \text{ معناه } f'(-1) = 0 \text{ أي : } \frac{a(-1)^2 - 2a(-1) - b - 1}{((-1) - 1)^2} = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\bullet (a, b) = (1, 2) \text{ هو } \begin{cases} a - b = -1 \dots (1) \\ 3a - b = 1 \dots (2) \end{cases} \text{ وعليه حل الجملة}$$

$$\text{II - } a = 1 \text{ و } b = 2 \text{ تعني : } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

① حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

② حساب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ مع تفسير النتائج هندسيا :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$

◀ لدينا :

◀ التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 1$.③ دراسة تغيرات الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

$$\blacktriangleleft \text{لدينا : } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \text{ ، بما أن } (x - 1)^2 > 0 \text{ فإشارة } f'(x) \text{ من إشارة } x^2 - 2x - 3$$

$$\blacktriangleleft x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ معناه } x \in \{-1; 3\}$$

◀ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	8	$+\infty$

④ الإثبات مع دراسة الوضع النسبي :

◀ لدينا : $y = a'x + b'$: (Δ) حيث :

$$\begin{cases} a' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1 \\ b' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - a'x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2+2x+1}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 = 3 \end{cases}$$

◀ إذا : $y = x + 3$: (Δ) ، لندرس الآن الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :

◀ لدينا : $f(x) - y = \frac{4}{x-1} \neq 0$ ومنه :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$		-	+
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

⑤ إحدائي Ω :

◀ بتعويض $x = 1$ في معادلة (Δ) نجد $y = 1 + 3 = 4$ ومنه $\Omega(1; 4)$.

⑥ لنثبت أن Ω هي مركز تناظر لـ (C_f) :

◀ نشير أولاً أنه من أجل كل $\bar{x} \in \mathbb{R}/\{1\}$: فإن $2-x \in \mathbb{R}/\{1\}$ ومنه :

$$\begin{aligned} f(2-x) + f(x) &= \frac{(2-x)^2 + 2(2-x) + 1}{2-x-1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1} \\ &= -\frac{x^2 - 6x + 9}{x-1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1} \\ &= \frac{-x^2 + 6x - 9 + x^2 + 2x + 1}{x-1} \\ &= \frac{8(x-1)}{x-1} \\ &= 2(4) \end{aligned}$$

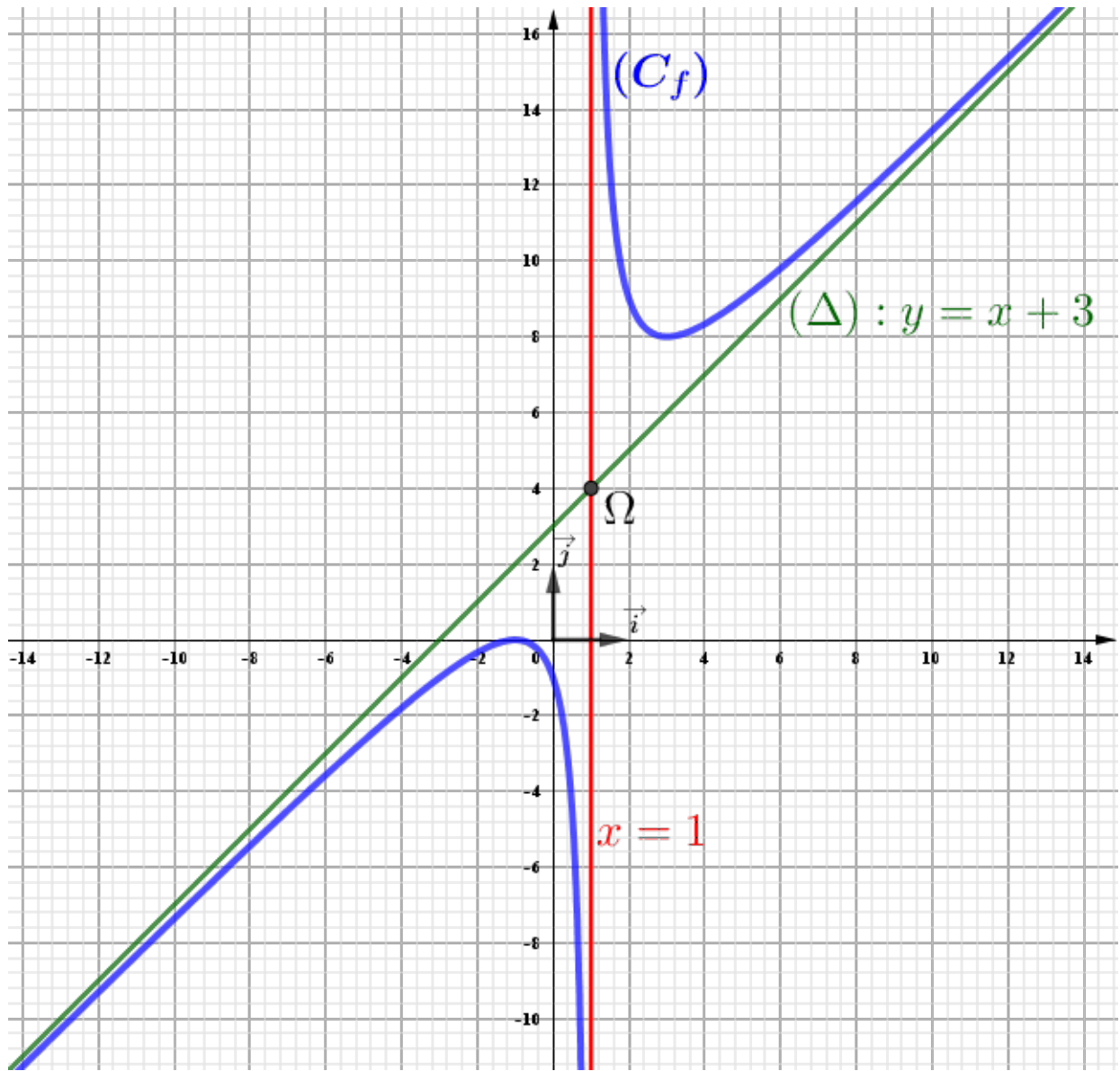
⑦ لنثبت أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل Ω :

◀ إذا وجد مماس لـ (C_f) يشمل Ω فإنه يوجد $x_0 \in \mathbb{R}/\{1\}$ يحقق $f'(x_0)(1-x_0) + f(x_0) = 4$

$$\text{يكافئ } 4 = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0 - 1} + (1-x_0) \frac{x_0^2 - 2x_0 + 3}{(x_0 - 1)^2} \text{ يكافئ } 4 = \frac{4x_0 - 2}{x_0 - 1} \text{ يكافئ } -2 = -4 \text{ وهذا}$$

تناقض وعليه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل Ω .

⑧ الرسم :



② المناقشة :

◀ مجموعة حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = m$:

- $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حلين مختلفي الإشارة .
- $m = -1$ للمعادلة حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .
- $m \in]-1; 0[$ للمعادلة حلين سالبين .
- $m = 0$ للمعادلة حل سالب .
- $m \in]0; 8[$ ليس للمعادلة أية حلول .
- $m = 8$ للمعادلة حل موجب .
- $m \in]8; +\infty[$ للمعادلة حلين موجبين .

* بالتوفيق في شهادة البكالوريا *

2022