

تمارين من البكالوريات في الأعداد المركبة

بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2023 - الموضوع الثاني -

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير :

① حلا المعادلة $8z^2 - 4z + 1 = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما :

أ / $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ ب / $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ ج / $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

② الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو :

أ / $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ب / $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ج / $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

③ الجدران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما :

أ / $-1-3i$ و $1+3i$ ب / $1-3i$ و $1+3i$ ج / $-3-i$ و $3+i$

④ الشكل المثلي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو :

أ / $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ب / $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ج / $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2024 - الموضوع الثاني -

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-1+2\sqrt{3})(z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3})=0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C التي

لاحقاتها على الترتيب z_C و z_B و z_A حيث $z_C = \overline{z_A}$ و $z_B = 1-2\sqrt{3}$ و $z_A = 1-\sqrt{3}+i$.

① أكتب كلا من $z_A - 1$ و $z_C - 1$ و z_B على الشكل المثلي .

② جد z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

③ بين أن الرباعي $ABCD$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الأول -

(I) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z-8+6i)(z^2-2z+4)=0$

ب- الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$.

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C التي

لاحقاتها على الترتيب z_C و z_B و z_A حيث $z_C = -z_A$ و $z_B = iz_A$ و $z_A = 1+i\sqrt{3}$.

① تحقق أن: $z_A - z_B = i(z_C - z_B)$ ثم بين أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

② أ- أكتب كلا من z_A و z_B و z_C على الشكل المثلي .

ب- استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

③ النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

تمارين من البكالوريات في الأعداد المركبة

2

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الثاني-

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z^2 + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 6) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط $A; B; C$ التي

لاحقاتها على الترتيب $z_A; z_B; z_C$ حيث $z_A = 1 - i$ و $z_B = -z_A$ و $z_C = (1 + i)\sqrt{3}$.

① أكتب كلا من $z_A; z_B; z_C$ على الشكل المثلثي.

② أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم المثلي وبيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

③ أ- عين z_D لاحقة النقطة D مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثم أحسب نصف قطرها.

ب- النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم. بين أن الرباعي $ACDB$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2023 - الموضوع الثاني-

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z} - 1 + i\sqrt{3})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$

② المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط $A; B; C$ التي لاحقاتها على

الترتيب $z_A; z_B; z_C$ حيث $z_A = \sqrt{2}(1 + i)$ و $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

أ/ أكتب $z_A; z_B; z_C$ على الشكل المثلثي.

ب/ استنتج أن النقط $A; B; C$ التي تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

③ نضع: $K = \frac{z_C}{2z_A}$

أ/ أحسب طويلة العدد المركب K وعمدة له ثم أكتبه على الشكل الجبري.

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

④ n عدد طبيعي، نضع: $L_n = z_A^n + z_B^n$. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي.

بكالوريا شعبة علوم 2015 - الموضوع الثاني-

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط $A; B; C$ التي لاحقاتها على

الترتيب $z_A; z_B; z_C$ حيث $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B = -\bar{z}_A$ و $z_C = -(z_A + z_B)$

① أ/ أكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب/ استنتج أن النقط $A; B; C$ تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ج/ أنشئ الدائرة (γ) والنقط $A; B; C$.

② أ/ تحقق أن: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. ب/ استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

ج/ عين و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

③ أ/ عين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A . ب/ أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

تعيين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

① حلا المعادلة $8z^2 - 4z + 1 = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ الإجابة ج/

التبرير: نحل المعادلة $8z^2 - 4z + 1 = 0$ في $\mathbb{C}$:

حساب المميز: $\Delta = (-4)^2 - 4(8)(1) = -16 = 16i^2 = (4i)^2$

المعادلة تقبل حلين مركبان مترافقان.

$z_1 = \frac{4 - 4i}{2(8)} = \frac{4}{16} - \frac{4}{16}i = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ أو $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

② الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i}$ هو: الإجابة أ/

التبرير: الكتابة على الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i}$: $\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$

لدينا: $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(1 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$ (الضرب البسط والمقام في مرافق المقام)

ومنه: $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3} - 1 + i(1 + \sqrt{3} + 1)}{1^2 + 1^2}$ ومنه: $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$

③ الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8 + 6i$ هما: الإجابة أ/

الطريقة 1) في هذه الطريقة نستغل مفهوم إتمام للمربع لكتابة على شكل متطابقة شهيرة.

لدينا: $-8 + 6i = (3i)^2 + 1 + 2(3)i$ ومنه: $-8 + 6i = -9 + 1 + 2(3)i = 9i^2 + 1 + 2(3)i$

ومنه: $-8 + 6i = (3i + 1)^2$ إذن: الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8 + 6i$ هما: $1 + 3i$ و $-1 - 3i$

الطريقة 2) نضع: $-8 + 6i = (x + iy)^2$ حيث x و y عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

لدينا: $-8 + 6i = (x + iy)^2$ ومنه: $8 - 6i = x^2 - y^2 + i2xy$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 10 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} |x + iy|^2 = |8 - 6i| \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$ ومنه: $-8 + 6i = (x + iy)^2$

بجمع (1) و (2) نجد: $2x^2 = 2$ أي أن $x^2 = 1$ أي: $x = 1$ أو $x = -1$

بتعويض قيمة في (3) نجد: $\begin{cases} 2(1)y = 6 \\ 2(-1)y = 6 \end{cases}$ أي أن: $y = 3$ أو $y = -3$

إذن: الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8 + 6i$ هما: $1 + 3i$ و $-1 - 3i$

④ الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو: $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ الإجابة ب/

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{3}-i = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{array} \right. \text{ومنه:} \left\{ \begin{array}{l} 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \sqrt{3}-i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \end{array} \right. \text{ومنه:} \left\{ \begin{array}{l} 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \sqrt{3}-i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \text{لدينا:}$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ وبالتالي: } \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ وبالتالي: } \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2024 - الموضوع الثاني -

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-1+2\sqrt{3})(z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3})=0$

$$\boxed{z=1-2\sqrt{3}} \text{ إما: } z-1+2\sqrt{3}=0 \text{ أي أن:}$$

$$\text{أو: } z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}=0$$

$$\Delta = (-2(1-\sqrt{3}))^2 - 4(1)(5-2\sqrt{3}) = 4(1+3-2\sqrt{3}) - 20 + 8\sqrt{3}$$

$$\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2 \text{ أي أن: } \Delta = 16 - 8\sqrt{3} - 20 + 8\sqrt{3}$$

المعادلة تقبل حلين مركبان مترافقان.

$$z_2 = \bar{z}_1 = (1-\sqrt{3})+i \text{ أو } z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3})-2i}{2} = (1-\sqrt{3})-i$$

$$\boxed{S = \{(1-\sqrt{3})-i; (1-\sqrt{3})+i; 1-2\sqrt{3}\}} \text{ إذن:}$$

(II) لدينا: $z_C = \bar{z}_A$ و $z_B = 1-2\sqrt{3}$; $z_A = 1-\sqrt{3}+i$

① كتابة كلا من z_A-1 و z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي.

$$\boxed{z_A-1 = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)} \text{ إذن:}$$

$$\text{لدينا: } z_A-1 = -\sqrt{3}+i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$\boxed{z_C-1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)} \text{ إذن:}$$

$$\text{لدينا: } z_C-1 = \overline{z_A-1} = \overline{z_A}-1$$

② إيجاد z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1); (B;-1); (C;1)\}$.

$$\text{نعلم أن: } z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} \text{ ومنه: } z_D = 1-\sqrt{3}+i - (1-2\sqrt{3}) + 1-\sqrt{3}-i$$

$$\boxed{z_D=1} \text{ ومنه: } z_D = 1 - \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}$$

③ تبيان أن الرباعي $ABCD$ معين.

تذكير: المعين هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان.



« لدينا مما سبق: $z_A - 1 = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$ و $z_C - 1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right)$

ومنه:
$$\begin{cases} z_C - 1 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ z_A - 1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$
 وبالتالي: $\frac{z_A - 1}{z_C - 1} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ وبالتالي: $\frac{z_A - 1}{z_C - 1} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

حيث $k \in \mathbb{Z}$
$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}\right) = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$
 وبما أن: $z_D = 1$ فإن: $\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ هذا يعني أن:

حيث $k \in \mathbb{Z}$
$$\begin{cases} \frac{DA}{DC} = 1 \\ \arg(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$
 هذا يعني أن: (*).....

هذا يعني أن:
$$\begin{cases} DA = DC \\ \overrightarrow{DC} \backslash \overrightarrow{DA} \end{cases} (*).....$$
 (كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان)

« مما سبق: $z_A - 1 = -\sqrt{3} + i$ وبالتالي: $z_A - z_D = -\sqrt{3} + i$

لدينا: $z_B - z_C = 1 - 2\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3} - i) = -\sqrt{3} + i$ وبالتالي: $z_B - z_C = -\sqrt{3} + i$

وبالتالي: $z_B - z_C = -\sqrt{3} + i$

بما أن: $z_A - z_D = z_B - z_C$ فإن: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ أي أن: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ (#) $(ABCD)$ متوازي أضلاع من نستنتج أن: الرباعي $ABCD$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الأول -



(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - 8 + 6i)(z^2 - 2z + 4) = 0$

$$\begin{cases} z - 8 + 6i = 0 \dots\dots\dots (1) \end{cases}$$

لدينا: $(z - 8 + 6i)(z^2 - 2z + 4) = 0$ هذا يكفي: ou
$$\begin{cases} z^2 - 2z + 4 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

« من (1) نجد: $z = 8 - 6i$

« حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (2):

لدينا: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - i2\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$

إذن:
$$S = \{8 - 6i; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$$



ب) إيجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب $8-6i$:

الطريقة 1 نضع: $8-6i = (x+iy)^2$ ومنه: $8-6i = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots\dots\dots (1) \\ x^2 - y^2 = 8 \dots\dots\dots (2) \\ 2xy = -6 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad \begin{cases} |(x+iy)^2| = |8-6i| \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

بجمع (1) و (2) نجد: $2x^2 = 18$ أي أن: $x^2 = 9$ وبالتالي: $x = 3$ أو $x = -3$

من أجل $x = 3$ وبالتعويض في (3) نجد: $y = -1$ أي أن: $y = -1$

من أجل $x = -3$ وبالتعويض في (3) نجد: $y = 1$ أي أن: $y = 1$

إذن: الجذرين التربيعين للعدد المركب $8-6i$ هما: $3-i$ و $-3+i$

الطريقة 2 لدينا: $8-6i = 9-1-2(3)i$ ومنه: $8-6i = 3^2 + i^2 - 2(3)i$ أي أن: $8-6i = (3-i)^2$

إذن: الجذرين التربيعين للعدد المركب $8-6i$ هما: $3-i$ و $-3+i$

(II) لدينا: $z_A = 1+i\sqrt{3}$ و $z_B = iz_A = -\sqrt{3}+i$ و $z_C = -z_A = -1-i\sqrt{3}$

① التحقق أن: $z_A - z_B = i(z_C - z_B)$

الطريقة 1 لدينا: $z_A - z_B = 1+i\sqrt{3} - (-\sqrt{3}+i) = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ ومنه: $z_A - z_B = 1+i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i$

أي أن: $z_A - z_B = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

لدينا من جهة أخرى: $i(z_C - z_B) = i(-1-i\sqrt{3} - (-\sqrt{3}+i)) = i(-1-i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i)$ ومنه: $i(z_C - z_B) = i(-1-i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i)$

ومنه: $i(z_C - z_B) = -i + \sqrt{3} + i\sqrt{3} + 1$ أي أن: $i(z_C - z_B) = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

إذن: $z_A - z_B = i(z_C - z_B)$

الطريقة 2 لدينا: $i(z_C - z_B) = i(-z_A - iz_A) = -iz_A - i^2z_A$ ومنه: $i(z_C - z_B) = -iz_A + z_A$

ومنه: $i(z_C - z_B) = -iz_A + z_A$

ومنه: $i(z_C - z_B) = -z_B + z_A$ إذن: $i(z_C - z_B) = z_A - z_B$

تبيان أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

لدينا مما سبق: $z_A - z_B = i(z_C - z_B)$ ومنه: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ ومنه: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} \frac{BA}{BC} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{أي أن: } k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{هذا يعني أن: } k \in \mathbb{Z}$$

إذن: المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

② أ) كتابة كلاً من z_A ; z_B و z_C على الشكل المثلثي.

$$|z_A| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2: \text{طويلة } z_A$$

$$\text{عمدة } z_A: \text{نضع: } \arg(z_A) = \theta: \text{وبالتالي: } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أي أن: } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_A = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\text{بما أن: } z_B = iz_A \text{ و } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ فإن: } z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه: } z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{إذن: } z_B = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$$

$$\text{بما أن: } z_C = -z_A \text{ و } -1 = e^{i\pi} \text{ فإن: } z_C = e^{i\pi} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه: } z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\text{إذن: } z_C = 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

ب) إستنتاج أن النقط A ; B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
بما أن: $OA = OB = OC = 2$ فإن $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

إذن: النقط A ; B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف القطر $r = 2$

③ النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

تبيان أن الرباعي $ABCD$ مربع.

$$\text{لدينا مما سبق: المثلث } ABC \text{ قائم في } B \text{ ومتساوي الساقين هذا يعني أن: } \begin{cases} BA = BC \\ \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA} \end{cases} (*)$$

بما أن: النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم فإن: $z_D = -z_B$

ولدينا: $z_C = -z_A$ وبالتالي: $z_D - z_C = z_A - z_B$ هذا يعني أن: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ (#)

من (*) و (#) نستنتج أن: الرباعي $ABCD$ مربع

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الثاني-

$$(I) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: } (z^2 + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 6) = 0$$

$$\begin{cases} z^2 + 2i = 0 \dots\dots\dots (1) \\ \text{ou} \\ z^2 - 2\sqrt{3}z + 6 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ لدينا: } (z^2 + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 6) = 0 \text{ هذا يكفي:}$$



« من (1) نجد: $z^2 = -2i$ ومنه: $z^2 = 1 - 1 - 2i$ ومنه: $z^2 = 1 + i^2 - 2i$ ومنه: $z^2 = (1 - i)^2$

هذا يعني أن: $z = 1 - i$ أو $z = -1 + i$

« حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (2):

لدينا: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(6) = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ و $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} - i2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

إذن: $S = \{1 - i; -1 + i; \sqrt{3} - i\sqrt{3}; \sqrt{3} + i\sqrt{3}\}$

(II) لدينا: $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$; $z_B = -z_A = -1 + i$; $z_A = 1 - i$

① كتابة كلا من z_C و z_B ; z_A على الشكل المثلثي.

« طول z_A : $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

« عمدة z_A : نضع: $\arg(z_A) = \theta$ وبالتالي: $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي أن: $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

إذن: $z_A = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

بما أن: $z_B = -z_A$ و $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ فإن: $z_B = e^{i\pi} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه: $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

إذن: $z_B = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$

بما أن: $z_C = \sqrt{3}(1 + i) = \sqrt{3}\bar{z}_A$ و $\bar{z}_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ فإن: $z_C = \sqrt{3} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه: $z_C = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

إذن: $z_C = \sqrt{6} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

② كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري:

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{-2 + 2i}$ ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 1 + i}{-1 + i - 1 + i}$

ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1))(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)}$

ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} + 2 + i(-2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} - 2)}{2^2 + 2^2}$



$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - i4\sqrt{3}}{8} \quad \text{ومنه:}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل المثلثي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad \text{ومنه:} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{إذن:}$$

تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ومنه:} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AC}{AB} = 1 \\ (\overline{AB}; \overline{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{أي أن: } k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{هذا يعني أن: } k \in \mathbb{Z}$$

إذن: المثلث ABC متقايس الأضلاع.

③ تعيين لاحقة النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثم حساب نصف قطرها.

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله

$$z_G = \frac{\sqrt{3}}{3} + i \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{إذن:}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \quad \text{ومنه:} \quad z_G = \frac{z_A - z_A + \sqrt{3}(1+i)}{3}$$

حساب r نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC : لدينا: $r = GC$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3} |1+i| \quad \text{ومنه:} \quad r = \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} + i \frac{2\sqrt{3}}{3} \right| \quad \text{ومنه:} \quad r = \left| \sqrt{3} + i\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \quad \text{ومنه:} \quad r = |z_C - z_G|$$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{إذن: نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC: r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{وبالتالي: } r = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} \quad \text{أي أن: } r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(ب) تبيان أن الرباعي $ACBD$ معين.

$$\left\{ \begin{array}{l} CA = CB \\ \overline{CA} \not\parallel \overline{CB} \end{array} \right. \quad \text{لدينا مما سبق: المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع هذا يعني أن: } (*) \dots$$

(كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان)

بما أن: النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم فإن: $z_D = -z_C$

ولدينا: $z_B = -z_A$ وبالتالي: $z_D - z_B = z_A - z_C$ هذا يعني أن: $(\#) \dots \overline{BD} = \overline{CA}$ (متوازي أضلاع $ACBD$)

يمكن إستغلال، بما أن القطران $[AB]$ و $[DC]$ متناصفان ($z_B = -z_A$ و $z_D = -z_C$) فإن $ACBD$ متوازي أضلاع

من (*) و (#) نستنتج أن: الرباعي $ACBD$ معين

حل تمارين من البكالوريات في الأعداد المركبة

بكالوريا شعبة رياضيات 2023 - الموضوع الثاني -

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$

$$\begin{cases} \bar{z}-1+i\sqrt{3}=0 \dots\dots\dots (1) \\ \text{ou} \\ z^2-2\sqrt{2}z+4=0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

لدينا: $0=(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)$ هذا يكفي:

« من (1) نجد: $\bar{z}=1+i\sqrt{3}$ ومنه: $z=1+i\sqrt{3}$ »

« حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (2): »

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4(1)(4)=-8=(2\sqrt{2}i)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ و $z_2=\bar{z}_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

إذن: $S=\{1+i\sqrt{3}; \sqrt{2}-i\sqrt{2}; \sqrt{2}+i\sqrt{2}\}$

② لدينا: $z_A=\sqrt{2}(1+i)$ و $z_B=\bar{z}_A$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

ج / كتابة z_A و z_B و z_C على الشكل المثلثي.

إذن: $z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

لدينا: $z_A=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ ومنه: $z_A=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

إذن: $z_B=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

لدينا: $z_B=\bar{z}_A$

إذن: $z_C=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

لدينا: $z_C=1+i\sqrt{3}$ ومنه: $z_C=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

د / استنتاج أن النقط A و B و C التي تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

بما أن: $|z_B|=|z_A|=|z_C|=2$ فإن: $OB=OA=OC=2$

إذن: النقط A و B و C التي تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$

③ نضع: $K=\frac{z_C}{2z_A}$

أ / حساب طولية العدد المركب K وعمدة له .

نعلم أن: $\begin{cases} |K|=\frac{|z_C|}{2|z_A|}=\frac{|z_C|}{2|z_A|} \\ arg(K)=arg\left(\frac{z_C}{2z_A}\right)=arg(z_C)-arg(2z_A) \end{cases}$ أي أن: $\begin{cases} |K|=\frac{2}{2(2)}=\frac{1}{2} \\ arg(K)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12} \end{cases}$

إذن: طولية العدد المركب K هي $\frac{1}{2}$ وعمدة له $\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

✻ كتابة K على الشكل الجبري.

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} \text{ ومنه: } K = \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{1^2+1^2} \text{ ومنه:}$$

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right) \text{ ومنه:}$$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة لكل من: $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$

$$K = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \text{ وبالتالي: } \begin{cases} |K| = \frac{2}{2(2)} = \frac{1}{2} \\ \arg(K) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{cases} \text{ مما سبق:}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases} \text{ هذا يعني أن: } \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases} \text{ هذا يعني أن:}$$

④ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي.

$$\text{نعلم أن: } \begin{cases} z_A^n = 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) \\ z_B^n = 2^n \left(\cos \left(-\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{4} \right) \right) \end{cases} \text{ حسب دستور موافر.}$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} z_A^n = 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) \\ z_B^n = 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) - i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) \end{cases} \text{ إنطلاقاً من شفعية الدالتين } \cos \text{ و } \sin.$$

$$\text{بالجمع طرف نجد: } z_A^n + z_B^n = 2^n \left(2 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) \text{ هذا يعني أن: } L_n = 2^n \left(2 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right)$$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي

① أ. كتابة كلا من العددين المركبين z_C ; z_B على الشكل الأسّي.

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ z_B = -z_A \end{array} \right. \text{ لدينا } \left\{ \begin{array}{l} z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ z_B = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{array} \right. \text{ ومنه: } z_B = 2e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ ومنه: } z_B = 2e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ إذن: } z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

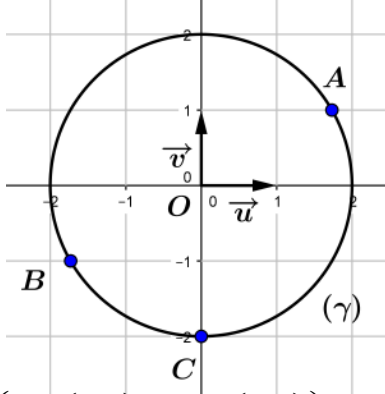
$$\left\{ \begin{array}{l} z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ z_B = -z_A \end{array} \right. \text{ لدينا } z_C = -(z_A + z_B) \text{ ومنه: } z_C = -\left(2e^{i\frac{\pi}{6}} + 2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$

$$\text{ومنه: } z_C = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\text{ومنه: } z_C = -2\left(i\right) \text{ أي } z_C = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{وبالتالي: } z_C = -2i \text{ بما أن: } z_C \text{ تخيلي صرف سالب فإن: } z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ب. استنتاج أن النقط $C; B; A$ تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها



بما أن: $|z_C| = |z_B| = |z_A| = 2$ فإن $OC = OB = OA = 2$

إذن: النقط $C; B; A$ تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2$.

ج. إثبات الدائرة (γ) والنقط $C; B; A$

$$\text{② أ. التحقق من أن: } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_B - z_C = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ z_B - z_A = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{array} \right. \text{ ومنه: } \left\{ \begin{array}{l} z_B - z_C = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} - 2e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_B - z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} - 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_B - z_C = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - 2(-i) \\ z_B - z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \text{ ومنه:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_B - z_C = -\sqrt{3} + 3i \\ z_B - z_A = -2\sqrt{3} \end{array} \right. \text{ ومنه:}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} \text{ وبالتالي: } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبالتالي:}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ إذن:}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ وبالتالي:}$$

ب. استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع أن النقطة O مركز ثقله.

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1 \end{array} \right. \quad \text{وبالتالي: } \left\{ \begin{array}{l} (\overline{AB}; \overline{CB}) = -\frac{\pi}{3} \\ AB = CB \end{array} \right.$$

بما أن: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه: $k \in \mathbb{Z}$

هذا يعني أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

بما أن O الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ومنه النقطة O مركز ثقل المثلث ABC .

ج. تعيين وإنشاء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

لدينا: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ ومنه $|z - 0| = |z - (\sqrt{3} - i)|$ وبالتالي: $|z - z_O| = |z - z_A|$ وبالتالي $OM = AM$

إذن: (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ هي محور القطعة $[OA]$

③ أ. تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A

بما أن r الدوران الذي مركزه O ويحول C إلى A

$$\frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ومنه: } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه: } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{-\pi}{2}}} \quad \text{ومنه: } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \frac{z_A}{z_C}$$

هذا يعني أن: زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A هي: $\frac{2\pi}{3}$

العبارة المركبة للدوران r هي: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

ب. إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$

لدينا: O مركز الدوران r فإن O نقطة صامدة بالدوران r

$$\text{ولدينا: } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A \quad \text{وبالتالي: } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right) \quad \text{ومنه: } z' = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_B$$

هذا يعني أن: الدوران r الذي مركزه O ويحول A إلى B (صورة A بالدوران r)

لدينا مما سبق: (E) هي محور القطعة $[OA]$

وبالتالي صورة محور القطعة $[OA]$ بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$

