

سلاسل العشري في الرياضيات - السلسلة الأولى (التمارين) - المحور: المتتاليات العددية
الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية

التحضير الجيد لباكوريا: 2020

التمرين الأول: (05 نقاط) باكوريا 2008 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ احسب u_0, u_1, u_2 .

2/ بين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغير (u_n).

3/ تحقق أن العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4/ احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط) باكوريا 2008 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

1/ احسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1 .

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$.

التمرين الثالث: (06 نقاط) باكوريا 2009 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1/ أ- احسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب- احسب الحد العاشر.

2/ اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3/ بين أن العدد (-2008) هو حدّاً من حدود (u_n). محدّد رتبته.

4/ احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط) باكوريا 2009 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1- عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث:

$$S_n = 1134$$

التمرين الخامس: (05 نقاط) باكوريا 2010 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

1/ (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحددين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1- عيّن أساسها وحدّها الأول u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n .

3- بين أن 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n).

4- احسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$.

- (II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.
- 1- بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .
- 2- أحسب بدلالة n المجموع $S' : S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين السادس: (07 نقاط) بكالوريا 2010 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث:
- $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.
1. أ- أحسب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n) .
- ب- استنتج أن عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$.
2. أ- علماً أن $256 = 2^8$ ؛ بين أن العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n) .
- ب- أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.
3. (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
- أ- أحسب: v_1, v_2, v_3 .
- ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 \times 2^n + 1$.
- ج- أحسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$.

التمرين السابع: (06 نقاط) بكالوريا 2011 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.
1. احسب u_0 ، ثم اكتب الحد العام u_n بدلالة n .
2. احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.
- ب) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $v_n = 1 - 5n$.
1. بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ثم استنتج اتجاه تغيّرها.
2. احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.
- ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $k_n = 1 + 3^n - 5n$.
- تحقّق أن: $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$.

التمرين الثامن: (06 نقاط) بكالوريا 2011 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.
- عيّن في كلّ حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3	
هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية	1 (u_n) هي متتالية
-90	-92	-88	2 الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي
$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$	3 المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي
$\frac{1}{9}$	9	-9	4 (v_n) متتالية هندسية أساسها
متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة	5 المتتالية (v_n)

التمرين التاسع: (06 نقاط) بكالوريا 2012 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.
1. أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r .
- ب) علماً أن: $a \times c = -16$

- عيّن الأساس r ثم استنتج a و c .
2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول -2 و $u_0 = -2$ وأساسها 5.
- (أ) عبّر عن الحدّ العام u_n بدلالة n .
- (ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.
3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$.
- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

التمرين العاشر: (06 نقاط) بكالوريا 2012 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.
1. (أ) احسب بدلالة r الجداثين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.
- (ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.
2. نضع $r = 3$.
- (أ) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .
- (ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- بيّن أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.
- (ج) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.
3. (أ) اكتب الحدّ u_{n+5} بدلالة n .
- (ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.
- (ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

التمرين الحادي عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2013 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول 2 و $v_0 = 2$ وأساسها 3.
- 1- (أ) عبّر عن v_n بدلالة n .
- (ب) احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .
- 2- نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
- (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n .
- (ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.
- (ج) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين الثاني عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2013 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.
- 1- احسب u_0 .
- 2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$.
- 3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.
- 4- أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$.
- 5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 1$.
- (أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .
- (ب) أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$.

التمرين الثالث عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2014 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التعليل:
- (1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.
 الحد العام للمتتالية (u_n) هو: (أ) $u_n = 1 + 3n$ (ب) $u_n = 7 + 3n$ (ج) $u_n = -5 + 3n$.
 (2) n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي:

(أ) $\frac{n^2+n}{2}$ (ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ (ج) $\frac{n^2+1}{2}$

- (3) x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:
 (أ) $x = 3$ (ب) $x = 5$ (ج) $x = -2$.
 (4) (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:
 (أ) 2 (ب) 3 (ج) 6.

التمرين الرابع عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2014 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (1) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = 5v_n + 4$.
 احسب: v_1 ، v_2 و v_3 .
 (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = v_n + 1$.
 أ- بَيِّن أنَّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$.
 ب- اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n .
 ج- حلّ العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية واستنتج أنّه حد من حدود المتتالية (u_n) .
 (3) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
 ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

التمرين الخامس عشر: (07 نقاط) بكالوريا 2015 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (1) (u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.
 احسب u_1 و u_2 .
 (2) اكتب u_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_5 .
 (3) عَيِّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
 (4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.
 ب) استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \dots + 486$.
 (5) أ) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2 ، 3^3 و 3^4 .
 ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1 [5]$.
 (6) عَيِّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين السادس عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2015 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (1) (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.
 (أ) بَيِّن أنَّ: $u_1 + u_3 = 1$.
 (ب) عَيِّن الحدّ الأول u_1 ؛ ثم استنتج أنَّ $r = -\frac{5}{2}$.
 (2) اكتب u_n بدلالة n .
 (3) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

- (ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$.
- (4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.
- (أ) تحقّق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.
- (ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين السابع عشر: (07 نقاط) بكالوريا 2016 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.
- (1) احسب u_0, u_1, u_2 و u_3 .
- (2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها.
- (3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
- (4) بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.
- (5) (أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (ب) عيّن العدد n بحيث يكون: $S_n = 328$.

التمرين الثامن عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2016 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.
- (1) احسب الحد الأول u_0 .
- (2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.
- (4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_49$.
- (5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.
- احسب المجموع S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_49$.

التمرين التاسع عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2017_1 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) المتتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.
- (1) بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5.
- (2) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة حدّها السابع.
- (3) (أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- (ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$.

التمرين العشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_1 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- (u_n) متتالية حسابية معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.
- (1) عيّن الأساس r للمتتالية (u_n) .
- (2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$.
- (3) اثبت أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ما هي رتبته؟
- (4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الحادي وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_2 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

- نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r .

- (1) احسب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.
- (2) احسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.
- (3) استنتج قيمة r واحسب u_0 .
- (4) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3n - 2$.
- (5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- (6) جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

التمرين الثاني وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_2 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، يُطلب تحديدها مع التعليل.

- (1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول 1 هو:
 - (أ) -17
 - (ب) -14
 - (ج) -11
- (2) مجموع 100 حدّ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو:
 - (أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$
 - (ب) $\frac{1-3^{100}}{2}$
 - (ج) $\frac{3^{100}-1}{2}$
- (3) نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:
 - (أ) $x = \frac{4}{3}$
 - (ب) $x = 0$
 - (ج) $x = \frac{3}{4}$
- (4) المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:
 - (أ) حسابية أساسها 1
 - (ب) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
 - (ج) لا حسابية ولا هندسية.

التمرين الثالث وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2018 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

- (1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$
 - (أ) متزايدة تماما
 - (ب) متناقصة تماما
 - (ج) ليست رتيبة.
- (2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$
 - (أ) $v_n = 3 \times 2^n$
 - (ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$
 - (ج) $v_n = 2 \times 3^n$
- (3) صندوق به 10 كريات لانفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة. احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ 3 هو:
 - (أ) $\frac{1}{3}$
 - (ب) $\frac{3}{10}$
 - (ج) $\frac{7}{10}$
- (4) المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يُساوي:
 - (أ) $3(2^n - 1)$
 - (ب) $(2^n - 1)$
 - (ج) $2(3^n - 1)$
- (5) احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ 3 هو:
 - (أ) $\frac{9}{10}$
 - (ب) $\frac{3}{10}$
 - (ج) $\frac{1}{10}$

التمرين الرابع وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2018 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

(1) بيّن أنّ $u_1 = 24$ ، ثمّ استنتج قيمة u_0 .

(2) بيّن أنّ $q = 4$ ، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(4) احسب 4^4 ، ثمّ تحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

(5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين الخامس وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2019 الموضوع 01 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

(1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1 .

(2) عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

(3) احسب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$.

(4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .

(ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التمرين السادس وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2019 الموضوع 02 - آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عيّن u_1 .

(2) علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عيّن الحد الأول u_0 ، ثمّ استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n) .

(3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) (أ) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

(ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) .

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(6) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$.



سلاسل العشري في الرياضيات

الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية

السلسلة الأولى (جزء الحلول) -

المحور: المتتاليات العددية

التحضير الجيد لباكوريا: 2020

حل التمرين الأول:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$

1/ حساب u_0, u_1, u_2 :

$$u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

2/ تبين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها:

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت

لدينا:

$$u_n = 3n + 1$$

$$u_{n+1} = 3(n+1) + 1$$

$$= 3n + 3 + 1 = 3n + 4$$

ومنه:

وعليه الفرق يكون كالتالي:

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1)$$

$$= 3n + 4 - 3n - 1 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية أساسها 3.

تعيين اتجاه تغير (u_n) :

بما أن: (u_n) حسابية أساسها موجب تماما ($3 > 0$), فإنها:

متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3/ التحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$\text{نضع: } u_n = 2008 \text{ نجد: } 3n + 1 = 2008$$

$$\text{ومنه: } 3n = 2008 - 1$$

$$\text{أي: } n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{669} = 2008 \text{)}$$

إذن: 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) .

رتبته: $669 + 1 = 670$ لأن الحد الأول هو u_0 .

4/ حساب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{669}$$

$$= (669 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{669}}{2} \right)$$

$$= 670 \left(\frac{1 + 2008}{2} \right)$$

$$= 670 \left(\frac{2009}{2} \right)$$

$$= 670(1004,5) = 673015$$

حل التمرين الثاني:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

لدينا: (u_n) متتالية معرفة بـ:

1/ حساب u_2, u_3, u_4 :

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 63$$

$$(v_n) \text{ متتالية معرفة كما يأتي: } v_n = u_n + 1$$

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها

q وحدها الأول v_1 :

ط01 نُبين أن الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

لدينا:

$$v_n = u_n + 1$$

ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1$$

$$= (2u_n + 1) + 1$$

$$= 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_n + 1)}{u_n + 1} = 2 \text{ وعليه:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول

$$v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$$

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

بما أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} \text{ فإن: } v_1 = 8$$

$$\text{بالتعويض نجد: } v_n = 8 \times 2^{n-1}$$

استنتاج u_n بدلالة n:

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 1$$

$$\text{ومنه: } u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1$$

ج- حساب S_n بدلالة n:

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= v_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 8 \left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = \frac{8}{-1} (1 - 2^n)$$

$$\text{إذن: } S_n = 8(2^n - 1)$$

د- تعيين n علماً أن $S_n = 1016$:

$$8(2^n - 1) = 1016 \text{ معناه: } 2^n - 1 = \frac{1016}{8}$$

$$\text{ومنه: } 2^n - 1 = \frac{1016}{8}$$

$$\text{أي: } 2^n - 1 = 127$$

$$\text{وعليه: } 2^n = 128 = 2^7$$

$$\text{(لأن } 128 = 2^7 \text{)}$$

$$\text{إذن: } n = 7 \text{ (} S_7 = 1016 \text{)}$$

حل التمرين الثالث:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول

$$u_1 = 2 \text{ وبالعلاقة } u_2 - 2u_5 = 19.$$

(1) - حساب الأساس r للمتتالية (u_n) :نكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة الحد الأول u_1 المعطى

$$\text{حسب العلاقة } u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + (2-1)r = 2 + r \\ u_5 = u_1 + (5-1)r = 2 + 4r \end{cases} \text{ نجد:}$$

$$\text{العلاقة } u_2 - 2u_5 = 19$$

$$\text{نصبح: } (2+r) - 2(2+4r) = 19$$

$$\text{ومنه: } 2+r-4-8r = 19$$

$$\text{وعليه: } -7r = 21 \text{ إذن: } r = \frac{21}{-7} = -3.$$

ب- حساب الحد العاشر:

بما أن الحد الأول هو u_1

$$\text{إذن الحد العاشر هو } u_{10} = u_1 + (10-1)r$$

$$= u_1 + 9r$$

$$= 2 + 9(-3) = 2 - 27 = -25$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$\text{ومنه: } u_n = 2 + (n-1)(-3)$$

$$\text{إذن: } u_n = -3n + 5.$$

(3) تبين أن العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n)

$$\text{نضع: } u_n = -2008$$

$$\text{نجد: } -3n + 5 = -2008$$

$$\text{ومنه: } -3n = -2008 - 5$$

$$\text{أي: } n = \frac{-2013}{-3} = 671 \in \mathbb{N}$$

$$(u_{671} = -2008)$$

إذن: (-2008) حد من حدود المتتالية (u_n) .رتبته: 671 لأن الحد الأول هو u_1 .(4) حساب المجموع، $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$$

$$= (671-1+1) \left(\frac{u_1 + u_{671}}{2} \right)$$

$$= 671 \left(\frac{2 + (-2008)}{2} \right)$$

$$= 671 \left(\frac{-2006}{2} \right)$$

$$= 671(-1003) = -673013$$

حل التمرين الرابع:

لدينا: (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسهاموجب ($q > 0$)1- تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0 علماً

$$\text{أن: } u_3 = 144 \text{ و } u_5 = 576.$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_p \times q^{n-p}$$

$$\text{ومنه: } u_5 = u_3 \times q^{5-3}$$

$$\text{وعليه: } 576 = 144 \times q^2 \text{ ومنه: } q^2 = \frac{576}{144} = 4$$

$$\text{أي: } q = \sqrt{4} = 2 > 0 \text{ (مقبول)}$$

$$\text{أو } q = -\sqrt{4} = -2 \text{ (مرفوض) إذن: } q = 2.$$

تعيين الحد الأول u_0 :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_3 = u_0 \times q^3$$

$$\text{إذن: } u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{2^3} = \frac{144}{8} = 18$$

$$\text{أو: } u_5 = u_0 \times q^5$$

$$\text{نجد: } u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{576}{2^5} = \frac{576}{32} = 18$$

2- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = 18 \times 2^n$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = 18 \times 2^n.$$

3- حساب بدلالة n المجموع،

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

$$= 18 \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right)$$

$$= \frac{18}{-1} (1 - 2^{n+1})$$

$$= -18(1 - 2^{n+1}) = 18(2^{n+1} - 1)$$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث $S_n = 1134$

$$S_n = 1134 \text{ معناه: } 18(2^{n+1} - 1) = 1134$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$$

$$\text{أي: } 2^{n+1} - 1 = 63$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} = 64 = 2^6$$

$$\text{وعليه: } n+1 = 6$$

$$\text{إذن: } n = 5 \text{ (} S_5 = 1134 \text{)}$$

حل التمرين الخامس:

(I) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين:

$$u_{10} = 31 \text{ و } u_{15} = 46.$$

1- تعيين أساس المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } u_n = u_p + (n-p)r$$

$$\begin{aligned} S' &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ S' &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1-8^{n+1}}{1-8} \right) \\ &= \frac{2}{-7} (1 - 8^{n+1}) = \frac{2}{7} (8^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

ملحوظة التمييز السادس:

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدها الأول u_0 حيث:

$$u_1 = 6 \text{ و } u_4 = 48$$

1-أ- حساب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n):

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ نعلم أن}$$

$$u_4 = u_1 \times q^{4-1} \text{ ومنه:}$$

$$q^3 = \frac{48}{6} = 8 \text{ وعليه: } 48 = 6 \times q^3 \text{ ويكون:}$$

$$(8 = 2^3 \text{ فإن } q^3 = 2^3) \text{ إذن: } q = 2$$

حساب الحد الأول u_0 :

$$u_1 = u_0 \times q^1 \text{ ومنه: } u_n = u_0 \times q^n \text{ لدينا:}$$

$$u_0 = \frac{u_1}{q^1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ويكون:}$$

$$u_4 = u_0 \times q^4 \text{ ومنه: } u_n = u_0 \times q^n \text{ أو:}$$

$$u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{48}{16} = 3 \text{ ويكون:}$$

ب- استنتاج أن عبارة الحد العام لـ (u_n) هي:

$$u_n = 3 \times 2^n$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ إذن: } u_n = 3 \times 2^n$$

2-أ- علماً أن $2^8 = 256$ ؛ تبين أن العدد 768 هو حد

من حدود المتتالية (u_n):

$$u_n = 768 \text{ نجد: } 3 \times 2^n = 768$$

$$2^n = \frac{768}{3} = 256 \text{ ومنه:}$$

$$2^n = 256 \text{ (لأن } 2^8 = 256) \text{ وعليه:}$$

$$n = 8 \in \mathbb{N} \text{ وبالتالي: } (u_8 = 768)$$

إذن: 768 حد من حدود المتتالية (u_n).

ب- حساب المجموع S حيث:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$$

$$= u_0 \left(\frac{1-q^{7+1}}{1-q} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1-2^8}{1-2} \right)$$

$$= \frac{3}{-1} (1 - 256) = -3(-255) = 765$$

$$u_{15} = u_{10} + (15 - 10)r \text{ ومنه:}$$

$$46 = 31 + 5r \text{ وعليه:}$$

$$5r = 46 - 31 \text{ إذن: } r = \frac{15}{5} = 3$$

الطريقة 02:

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p} = \frac{u_{15} - u_{10}}{15 - 10} = \frac{46 - 31}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

تعيين الحد الأول u_0 :

$$u_n = u_0 + nr \text{ لدينا: } u_{10} = u_0 + 10r$$

$$u_0 = u_{10} - 10r$$

$$= 31 - 10(3) = 31 - 30 = 1$$

$$u_{15} = u_0 + 15r \text{ ومنه: } u_n = u_0 + nr \text{ أو:}$$

$$u_0 = u_{15} - 15r$$

$$= 46 - 15(3) = 46 - 45 = 1$$

2-كتابة u_n بدلالة n : (عبارة الحد العام)

$$u_n = u_0 + nr \text{ لدينا: } u_n = 1 + 3n \text{ إذن:}$$

3-تبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n):

$$u_n = 6028 \text{ نجد: } 6028 = 1 + 3n$$

$$6027 = 3n \text{ ومنه:}$$

$$n = \frac{6027}{3} = 2009 \in \mathbb{N} \text{ وبالتالي:}$$

$$(u_{2009} = 6028)$$

إذن: العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

4-حساب المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$$

$$= (2009 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2009}}{2} \right)$$

$$= (2010) \left(\frac{1 + 6028}{2} \right)$$

$$= (2010) \left(\frac{6029}{2} \right)$$

$$= (2010)(3014,5) = 6059145$$

(II) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$

1-تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها

وحدها الأول v_0 :

نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت:

$$v_n = 2 \times 8^n \text{ لدينا: } v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = \frac{8^{n+1}}{8^n} = \frac{8^n \times 8^1}{8^n} = 8 \text{ وبالتالي:}$$

$$\text{إذن: } (v_n) \text{ هندسية، أساسها } q = 8 \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$$

2-حساب بدلالة n المجموع S' :

كتابة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$, إذن: $u_n = 3^n$

2. حساب المجموع، $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

$$S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{9-0+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{1 - 3^{10}}{-2} \right)$$

$$= \frac{1}{-2} (1 - 3^{10})$$

$$= \frac{1}{2} (3^{10} - 1) = \frac{1}{2} (59048) = 29524$$

(ب) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام:

$$v_n = 1 - 5n$$

1. تبين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها:

نُبين أن الفرق $v_{n+1} - v_n$ عدد ثابت

$$v_n = 1 - 5n$$

لدينا:

$$v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$$

ومنه:

$$= 1 - 5n - 5 = -4 - 5n$$

$$v_{n+1} - v_n = (-4 - 5n) - (1 - 5n)$$

وعليه:

$$= -4 - 5n - 1 + 5n = -5$$

$$\boxed{v_{n+1} = v_n - 5} \text{ أي:}$$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$.

استنتاج اتجاه تغيرها:

بما أن (v_n) حسابية أساسها -5 سالب تماما

فإنّها متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

2. حساب المجموع، $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$

$$S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$$

$$= (9 - 0 + 1) \left(\frac{v_0 + v_9}{2} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{1 - 44}{2} \right)$$

$$= \frac{10}{2} (1 - 44) = 5(-43) = -215$$

(ملاحظة $v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$)

(ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

-التحقق أن، $k_n = u_n + v_n$

$$\begin{cases} u_n = 3^n \\ v_n = 1 - 5n \end{cases}$$

لدينا:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

ومنه:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

$$= 3^n + (1 - 5n)$$

$$= u_n + v_n$$

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases} \text{ 3. متتالية معرفة بـ:}$$

أ- حساب v_1, v_2, v_3 :

$$v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = 7$$

$$v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = 13$$

$$v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = 25$$

ب- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: (من أجل $n = 0$)

$$v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3(1) + 1 = 4$$

إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي:

$$\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1} \text{ (فرضية التراجع)}$$

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:

$$\boxed{v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1}$$

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 \text{ البرهان:}$$

$$= 2(3 \times 2^n + 1) - 1$$

$$= 2^1 \times 3 \times 2^n + 2 - 1$$

$$= 3 \times 2^{n+1} + 1$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل

عدد طبيعي n , $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$.

ج- حساب المجموع S' حيث،

$$\boxed{S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7}$$

$$\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1 = u_n + 1} \text{ نلاحظ أن}$$

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7 \text{ ومنه:}$$

$$= (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_7 + 1)$$

$$= (u_0 + u_1 + \dots + u_7) + 8$$

$$= S + 8 = 765 + 8 = 773$$

عمل التمرين السابع:

(أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0

$$u_0 + u_3 = 28 \text{ بحيث:}$$

1. حساب u_0 :

$$u_3 = u_0 \times q^3 \text{ لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه:}$$

$$= u_0 \times 3^3 = 27u_0$$

$$u_0 + 27u_0 = 28 \text{ تُصبح}$$

$$28u_0 = 28 \text{ ومنه:}$$

$$\boxed{u_0 = 1} \text{ إذن:}$$

حل التمرين التاسع:

لدينا: a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1. حساب b :

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $a + c = 2b$
 $a + b + c = 9$ تصبح $2b + b = 9$

ومنه: $3b = 9$ إذن: $b = 3$

كتابة a و c بدلالة r :

توضيح: $a = b - r$ و $c = b + r$

لدينا: $\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$

ب) علماً أن: $a \times c = -16$ - تعيين الأساس r :

لدينا مما سبق: $a = 3 - r$ و $c = 3 + r$

$a \times c = -16$ تكافئ: $(3 - r) \times (3 + r) = -16$

ومنه: $3^2 - r^2 = -16$

وعليه: $-r^2 = -25$

ويكون: $r^2 = 25$

وبالتالي: $r = \sqrt{25} = 5$

أو $r = -\sqrt{25} = -5$ (مرفوض)

إذن: $r = 5$ (لأن المتتالية حسابية متزايدة)

استنتاج a و c :

لدينا: $\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$ و $r = 5$ إذن: $\begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}$

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

نلاحظ أن $\begin{cases} u_0 = -2 = a \\ u_1 = b = 3 \\ u_2 = c = 8 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 8 \end{cases}$

أ) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ إذن: $u_n = -2 + 5n$

ب) حساب u_{15} :

$u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75 = 73$

استنتاج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$:

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$
 $= (15 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{15}}{2} \right)$

$= 16 \left(\frac{-2 + 73}{2} \right)$

$= 16(35,5) = 568$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$8v_n - u_n = 0$$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$

لدينا: $k_n = u_n + v_n$

$S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$

$= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_9 + v_9)$

$= (u_0 + u_1 + \dots + u_9) + (v_0 + v_1 + \dots + v_9)$

$= S_1 + S_2$

$= 29524 - 215 = 29309$

حل التمرين العاشر:

لدينا: (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على

$\mathbb{N}$ بحديهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$

(نلاحظ أن $v_n = 3^{u_n}$)

تعيين في كل حالة من الحالات الخمس الاقتراح الصحيح

من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل:

1) لدينا:

$$u_n = -2n$$

ومنه:

$$u_{n+1} = -2(n+1) = -2n - 2$$

وعليه:

$$u_{n+1} - u_n = (-2n - 2) - (-2n) = -2n - 2 + 2n = -2$$

إذن: (u_n) هي متتالية حسابية.

2) بمأن (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ، فحدها الأول هو u_0

وبالتالي: حدها الخامس والأربعون

$$u_{44} = -2(44) = -88$$

3) حسب السؤال 1) لدينا: (u_n) متتالية حسابية،

إذن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

$$= (n + 1) \left(\frac{0 + (-2n)}{2} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{-2n}{2} \right)$$

$$= (n + 1)(-n)$$

$$= -n^2 - n$$

4) (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

لدينا: $v_n = 3^{-2n}$ ومنه:

$$v_{n+1} = 3^{-2(n+1)}$$

$$= 3^{-2n-2}$$

$$= 3^{-2n+(-2)} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$$

بالتعويض نجد:

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

5) المتتالية (v_n) متزايدة تماماً

لأن: $v_{n+1} - v_n = (3^{-2n} \times 3^{-2}) - (3^{-2n})$

$$= 3^{-2n}(3^{-2} - 1) = 3^{-2n} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{-8}{9} \times 3^{-2n} < 0$$

(ب) $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ عدد طبيعي غير معدوم

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{تبيّن أن،}$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= (n-1+1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) \\ &= n \left(\frac{1 + (3n-2)}{2} \right) \\ &= n \left(\frac{3n-1}{2} \right) = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

(ج) ايجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$

$$\frac{3n^2 - n}{2} = 145 \quad \text{معناه: } S_n = 145$$

$$3n^2 - n - 290 = 0 \quad \text{ومنه: } (*)$$

نحل المعادلة (*): نحسب المميز Δ :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0$$

للمعادلة (*) حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N} \quad \text{و}$$

إذن: $n = 10$ ($S_{10} = 145$).

(أ.3) كتابة الحد u_{n+5} بدلالة n :

$$u_n = 3n - 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$u_{n+5} = 3(n+5) - 2 \quad \text{ومنه:}$$

$$= 3n + 15 - 2 = 3n + 13$$

$$\text{إذن: } u_{n+5} = 3n + 13$$

(ب) التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

(ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها

العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً:

$$3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N} \quad \text{معناه: } \frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{13}{n} \in \mathbb{N} \quad \text{ومنه:}$$

$$n \in D_{13} \quad \text{أي: } n \in \{1; 13\}$$

(قيم n هي قواسم العدد 13)

$$\text{إذن: } n = 1 \quad \text{أو} \quad n = 13$$

حل التمرين الحادي عشر:

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

(أ.1) التعبير عن v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n, \text{ إذن: } v_n = 2 \times 3^n$$

حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$

$$\text{لدينا: } 8v_n - u_n = 0 \quad \text{ومنه: } v_n = \frac{1}{8}u_n$$

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$= \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \dots + \frac{1}{8}u_{15}$$

$$= \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \dots + u_{15})$$

$$= \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}(568) = 71$$

حل التمرين العاشر:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدّها الأول

$$u_1 \text{ و } u_3 = 7$$

(أ.1) حساب بدلالة r الجداين $u_1 \times u_5$

$$T_2 = u_2 \times u_4$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_p + (n-p)r$$

$$\text{ومنه: } u_n = u_3 + (n-3)r$$

$$\begin{cases} u_1 = u_3 + (1-3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2-3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4-3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5-3)r = 7 + 2r \end{cases} \quad \text{وعليه:}$$

$$T_1 = u_1 \times u_5 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\begin{aligned} &= (7 - 2r)(7 + 2r) \\ &= 7^2 - (2r)^2 = 49 - 4r^2 \end{aligned}$$

$$T_2 = u_2 \times u_4 \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} &= (7 - r)(7 + r) \\ &= 7^2 - (r)^2 = 49 - r^2 \end{aligned}$$

(ب) تعيين الأساس r بحيث، $T_2 - T_1 = 27$

$$\text{لدينا: } T_2 - T_1 = 27$$

$$(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27 \quad \text{تكافئ:}$$

$$49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27 \quad \text{ومنه:}$$

$$r^2 = 9 \quad \text{أي: } r^2 = \frac{27}{3}$$

$$\text{وبالتالي: } r = -\sqrt{9} = -3 \quad \text{أو} \quad r = \sqrt{9} = 3$$

وبما أنّ (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)

$$\text{فإن: } r = 3$$

2. بوضع $r = 3$.

(أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 3$ ، حدّها الأول

$$u_1 = 7 - 2(3) = 1$$

$$\text{فإن: } u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$\text{بالتعويض نجد: } u_n = 1 + (n-1)(3)$$

$$\text{إذن: } u_n = 3n - 2$$

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

حل التمرين الثاني عشر:

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

1- حساب u_0 :

نكتب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة الحد الأول u_0

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases} \quad \text{ومنّه:}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34 \quad \text{العلاقة:}$$

$$u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34 \quad \text{نُصَبِّح:}$$

$$4u_0 = 34 - 30 = 4 \quad \text{ومنّه: } 4u_0 = 4 \quad \text{ويكون:}$$

$$u_0 = 1 \quad \text{إذن:}$$

2- تبين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 5n + 1$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \quad \text{إذن: } u_n = 1 + 5n$$

3- تعيين العدد الطبيعي n بحيث:

$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$$

$$u_n = 5n + 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6 \quad \text{ومنّه:}$$

$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033 \quad \text{لدينا:}$$

$$(5n + 6) + (5n + 1) - 8n = 4033 \quad \text{معناه:}$$

$$7 + 2n = 4033 \quad \text{ومنّه:}$$

$$2n = 4026 \quad \text{إذن: } n = 2013 \quad \text{وعليه:}$$

4- حساب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$$

$$u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066 \quad \text{لدينا:}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}$$

$$= (2013 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2} \right)$$

$$= \frac{2014}{2} (1 + 10066)$$

$$= 1007(10067) = 10137469$$

5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$v_n = 2u_n + 1$$

أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) :

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - (2u_n + 1) = 2(u_{n+1} - u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{لدينا: } u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{لأنّ } (u_n) \text{ حسابية أساسها 5.}$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 \quad \text{نجد:}$$

ب) حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$:

$$v_n = 2 \times 3^n \quad \text{لدينا:}$$

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1 \quad \text{ومنّه:}$$

$$v_{n+1} - v_n = (2 \times 3^{n+1}) - (2 \times 3^n) = 2 \times 3^n (3 - 1) = 4 \times 3^n \quad \text{وعليه:}$$

$$v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n \quad \text{إذن:}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0 \quad \text{بمأن:}$$

فإنّ (v_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

2- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ عدد طبيعي غير معدوم.

أ) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$= v_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1 - 3^n}{1 - 3} \right)$$

$$= \frac{2}{-2} (1 - 3^n)$$

$$= -(1 - 3^n) = 3^n - 1$$

ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 80$:

$$S_n = 80 \quad \text{معناه: } 3^n - 1 = 80$$

$$3^n = 81 \quad \text{ومنّه: } 3^n = 81 \quad \text{(لدينا: } 81 = 3^4)$$

$$3^n = 3^4 \quad \text{أي:}$$

$$n = 4 \quad \text{إذن: } (S_4 = 80)$$

ج) اثبات بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n :

العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 0$:

$$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{لدينا:}$$

و 0 يقبل القسمة على 2، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $3^n - 1$ يقبل

القسمة على 2 ($3^n - 1 = 2k$) (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:

$$3^{n+1} - 1 \text{ يقبل القسمة على 2 } (3^{n+1} - 1 = 2k')$$

$$3^{n+1} - 1 = 3^n \times 3^1 - 1 \quad \text{البرهان:}$$

$$= (2k + 1) \times 3 - 1$$

$$= 6k + 3 - 1$$

$$= 6k + 2$$

$$= 2(3k + 1)$$

$$= 2k' \quad (k' = 3k + 1)$$

بالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

(3) عدد حقيقي.

الأعداد $x-2$, x , $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية معناه: $(x-2) \times (x+1) = x^2$

ومنه: $x^2 + x - 2x - 2 = x^2$

وعليه: $-x - 2 = 0$

وبالتالي: $x = -2$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $x = -2$.

(4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

الطريقة 01:

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{(n+1)+1}}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{2 \times 3^{n+1} \times 3^1}{2 \times 3^{n+1}} = 3$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب) 3.

الطريقة 02: لدينا: $v_n = 2 \times 3^{n+1}$

ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1} = 2 \times 3^{(n+1)} \times 3^1 = v_n \times 3$

أي: $v_{n+1} = 3v_n$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب) 3.

حل التمرين الرابع عشر:

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n + 4 \end{cases}$$

(1) حساب v_1 , v_2 , v_3 :

$v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = 5 + 4 = 9$

$v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = 45 + 4 = 49$

$v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = 245 + 4 = 249$

(2) لدينا: $u_n = v_n + 1$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها 5 $q = 5$

وحدها الأول $u_0 = 2$

ط (01) نبين أن الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $u_n = v_n + 1$

ومنه: $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$

$= (5v_n + 4) + 1$

$= 5v_n + 5 = 5(v_n + 1)$

وعليه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(v_n+1)}{v_n+1} = 5$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 $q = 5$ وحدها الأول

$u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$

ب- كتابة u_n بدلالة n :

(u_n) هندسية أساسها 5 وحدها الأول 2 $u_0 = 2$

$v_{n+1} = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > 0$

إذن: (v_n) متزايدة تماما.

(ب) حساب المجموع:

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013}$

$= (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$

$= 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1)$

$= 2S + 2014 = 20276951$

حل التمرين الثالث عشر:

تعيين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات

الثلاثة، في كل حالة، مع التعليل:

(1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها 1 $u_2 = 1$

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

الطريقة 01: $u_n = u_2 + (n-2)r$

$= 1 + (n-2)(3)$

$= 1 + 3n - 6 = -5 + 3n$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج)

$u_n = -5 + 3n$

الطريقة 02:

• في حالة: $u_n = 1 + 3n$

نجد: $u_2 = 1 + 3(2) = 7 \neq 1$

• في حالة: $u_n = 7 + 3n$

نجد: $u_2 = 7 + 3(2) = 13 \neq 1$

• في حالة: $u_n = -5 + 3n$

نجد: $u_2 = -5 + 3(2) = 1$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج)

$u_n = -5 + 3n$

(2) عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$

هو عبارة عن مجموع n حد من متتالية حسابية حدّها

الأول يساوي 1 وأساسها 1 لتكون هذه المتتالية (u_n)

نضع $u_1 = 1$ نجد: $u_n = n$

ومنه:

$1 + 2 + 3 + \dots + n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$= (n-1+1) \left(\frac{u_1+u_n}{2} \right)$

$= n \left(\frac{1+n}{2} \right)$

$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح أ) $\frac{n^2+n}{2}$

$$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$$

(2) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_n = 2 \times 3^n$

$$u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$$

(3) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_n = 2 \times 3^n$$

$$u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$$

$$u_{n+1} - u_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n)$$

$$= 4 \times 3^n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

(4) أ) حسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1 - 3^n}{1 - 3} \right)$$

$$= \frac{2}{-2} (1 - 3^n) = -(1 - 3^n) = 3^n - 1$$

ب) استنتج قيمة المجموع:

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_5$$

$$= 3^6 - 1 = 728$$

ملحوظة التمييز السادس عشر:

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث:

$$u_1 - u_3 = 5 \text{ و } u_2 = \frac{1}{2}$$

(1) أ) تبين أن: $u_1 + u_3 = 1$

حسب خاصية الوسط الحسابي،

$$u_1 + u_3 = 2u_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

ب) تعيين الحد الأول u_1 ؛ ثم استنتاج أن: $r = -\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$$

$$(u_1 - u_3) + (u_1 + u_3) = 5 + 1$$

$$u_1 = \frac{6}{2} = 3$$

استنتاج أن: $r = -\frac{5}{2}$

$$r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$$

(2) كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

عبارة الحد العام هي: $u_n = u_0 \times q^n$

بالتعويض نجد: $u_n = 2 \times 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n :

$$u_n = 2 \times 5^n \text{ و } u_n = v_n + 1$$

$$v_n = u_n - 1 = 2 \times 5^n - 1$$

جـ تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1250 = 2 \times 5^4$$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$2 \times 5^n = 2 \times 5^4$$

$$n = 4 \in \mathbb{N}$$

$$(u_4 = 1250)$$

إذن: 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) .

(3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1 - 5^n}{1 - 5} \right) = \frac{2}{-4} (1 - 5^n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} (5^n - 1)$$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n :

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$v_n = u_n - 1 \text{ ومنه: } u_n = v_n + 1$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$= (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \dots + (u_{n-1} - 1)$$

$$= (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) - 1[(n-1) - 0 + 1]$$

$$= S_n - n$$

$$= \frac{1}{2} (5^n - 1) - n$$

$$S'_n = \frac{1}{2} (5^n - 1) - n$$

ملحوظة التمييز الخامس عشر:

(u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q

حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$

(1) حساب u_1 و u_2 :

بمأن (u_n) متتالية هندسية فإن: $u_{n+1} = u_n \times q$

$$u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$$

وبالتالي:

الطرف الثاني: $\frac{1}{6}(1)((1) + 1)(14 - 5(1)) = \frac{2(9)}{6} = 3$

إذن: $P(1)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

(فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

البرهان:

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \underbrace{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n}_{T_n} + (n+1)u_{n+1}$$

$$= T_n + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + (-15n+18)]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

حسب السؤال أ) نجد:

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لكل n من

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n), \mathbb{N}^*$$

ملحوظة التمرين السابع عشر:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n

$$u_n = 3n - 2$$

(1) حساب u_0, u_1, u_2, u_3 :

$$u_0 = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$u_1 = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$u_2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

(2) تبين أن المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها:

نبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت:

$$u_n = 3n - 2$$

لدينا:

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 2$$

ومنه:

$$= 3n + 3 - 2 = 3n + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 1) - (3n - 2)$$

وعليه:

$$= 3n + 1 - 3n + 2 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية، أساسها $r = 3$.

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

ومنه:

$$u_n = 3 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

بالتعويض نجد:

$$u_n = -\frac{5}{2}n + 3 + \frac{5}{2}$$

وبالتالي:

$$u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$$

إذن:

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$$

$$= (n)\left(\frac{3 + \left(-\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(-\frac{5}{2}n + \frac{17}{2}\right) = \frac{-5n^2 + 17n}{4}$$

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها

$$S_n = -\frac{657}{2}$$

$$S_n = -\frac{657}{2} \text{ معناه: } \frac{-5n^2 + 17n}{4} = -\frac{657}{2}$$

$$2(-5n^2 + 17n) = 4(-657)$$

$$-10n^2 + 34n + 2628 = 0 (*)$$

نحل المعادلة (*):

$$\Delta = (34)^2 - 4(-10)(2628)$$

$$= 1156 + 105120 = 106276 > 0$$

للمعادلة (*) حلين متميزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34+\sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34+326}{-20} = \frac{29}{-2} = -\frac{146}{10} \notin \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34-\sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34-326}{-20} = \frac{-360}{-20} = 18 \in \mathbb{N}$$

$$\text{إذن: } [n = 18] \text{ (} S_{18} = -\frac{657}{2} \text{)}$$

$n(4)$ عدد طبيعي غير معدوم،

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

(أ) التحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

$$\text{لدينا: } (n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$$

$$= -5n^2 - n + 18$$

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنه لكل n من

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n), \mathbb{N}^*$$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 1$,

$$T_1 = 1u_1 = u_1 = 3$$

الطرف الأول:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10 \text{ العلاقة}$$

$$u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 6) + (u_0 + 9) = 10 \text{ تُصبح:}$$

$$4u_0 + 18 = 10 \text{ ومنه:}$$

$$4u_0 = -8 \text{ إذن: } u_0 = \frac{-8}{4} = -2$$

(2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n :

$$u_n = u_0 + nr \text{ لدينا: } u_n = -2 + 3n \text{ ومنه:}$$

(3) تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_n = 145$:

$$-2 + 3n = 145 \text{ تُكافئ}$$

$$3n = 147 \text{ ومنه:}$$

$$n = \frac{147}{3} = 49 \text{ وعليه: } (u_{49} = 145)$$

(4) حساب المجموع S بحيث،

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$$

$$= (49 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right)$$

$$= (50) \left(\frac{-2 + 145}{2} \right)$$

$$= (50) \left(\frac{143}{2} \right) = (50)(71,5) = 3575$$

(5) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$v_n = 2u_n + 3$$

حساب المجموع S' بحيث،

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$$

$$v_n = 2u_n + 3 \text{ لدينا:}$$

$$S' = (2u_0 + 3) + (2u_1 + 3) + \dots + (2u_{49} + 3)$$

$$= 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{49}) + 3(94 - 0 + 1)$$

$$= 2S + 3(50)$$

$$= 2(3575) + 150 = 7300$$

ملح التمرين التاسع عشر:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على

$\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

(1) تبين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول

هو 5:

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ لدينا:}$$

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1} \text{ ومنه:}$$

$$320 = 20 \times q^2 \text{ وعليه:}$$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16 \text{ ويكون:}$$

$$q = \sqrt{16} = 4 \text{ وبالتالي:}$$

$$q = -\sqrt{16} = -4 \text{ أو (مرفوض)}$$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) حسابية أساسها موجب تماما

$(r = 3 > 0)$ فإنّها متزايدة تماما.

(4) تبين أن العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n)

وتعيين رتبته:

$$u_n = 1954 \text{ نجد: } 3n - 2 = 1954$$

$$3n = 1956 \text{ ومنه:}$$

$$u_{652} = 1954 \text{ } n = \frac{1956}{3} = 652 \in \mathbb{N} \text{ وعليه:}$$

إذن: 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) ،

رتبته: 653 (لأنّ الحد الأول هو u_0)

(5) حساب بدلالة n المجموع،

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{3n - 4}{2} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$$

(ب) تعيين العدد n بحيث يكون، $S_n = 328$:

$$S_n = 328 \text{ معناه: } \frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

$$3n^2 - n - 4 = 2(328) \text{ ومنه:}$$

$$3n^2 - n - 660 = 0 \text{ وعليه: (*)}$$

نحل المعادلة (*):

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660) \text{ نحسب المميز } \Delta:$$

$$= 1 + 7920 = 7921 > 0$$

للمعادلة (*) حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1 + 89}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1 - 89}{6} = \frac{-88}{6} = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $n = 15$ ($S_{15} = 328$).

ملح التمرين الثامن عشر:

(u_n) متتالية حسابية، أساسها 3 وحدّها الأول u_0

ونُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

(1) حساب الحد الأول u_0 :

نكتب u_1 ؛ u_2 و u_3 بدلالة u_0

$$u_n = u_0 + nr \text{ لدينا:}$$

$$u_1 = u_0 + (1)r = u_0 + 3$$

$$u_2 = u_0 + (2)r = u_0 + 6 \text{ ومنه:}$$

$$u_3 = u_0 + (3)r = u_0 + 9$$

إذن: $q = 4$ لأنها حدود (u_n) موجبة تماما.

(2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n :
بمأن (u_n) هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ فإنّ حدّها الأول هو: $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{20}{4} = 5$.

وبالتالي: $u_n = u_0 \times q^n$ إذن: $u_n = 5 \times 4^n$.

استنتاج قيمة حدّها السابع:

الحد السابع هو: $u_6 = 5 \times 4^6 = 5(4096) = 20480$.

(3) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث،

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right)$$

$$= \frac{5}{-3} (1 - 4^{n+1}) = \frac{5}{3} (4^{n+1} - 1)$$

(ب) استنتاج قيمة المجموع S' حيث،

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$$

حسب السؤال السابق (أ) نجد

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$$

$$= \frac{5}{3} (4^{6+1} - 1)$$

$$= \frac{5}{3} (4^7 - 1)$$

$$= \frac{5}{3} (16384 - 1)$$

$$= \frac{5}{3} (16383) = 27305$$

حل التمرين العشرون:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها

الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

(1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) :

نكتب u_3 و u_7 بدلالة u_0

$$u_n = u_0 + nr$$

$$\{ u_3 = u_0 + (3)r = -5 + 3r$$

$$u_7 = u_0 + (7)r = -5 + 7r$$

بالتعويض في العلاقة $u_3 + u_7 = 50$

$$(-5 + 3r) + (-5 + 7r) = 50$$

$$10r - 10 = 50$$

$$\text{وعليه: } 10r = 60 \text{ إذن: } r = \frac{60}{10} = 6$$

(2) تبين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = 6n - 5$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_n = -5 + 6n$$

(3) اثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) :

مع تعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 2017 \text{ نجد: } -5 + 6n = 2017$$

$$\text{ومنه: } 6n = 2022$$

$$\text{وبالتالي: } n = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{337} = 2017 \text{)}$$

إذن: العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ,

رتبته: 338 لأنّ الحد الأول هو u_0 .

(4) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{-5 + (-5 + 6n)}{2} \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right)$$

$$= (n + 1)(-5 + 3n)$$

حل التمرين الحادي عشر وعشرون:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) حساب الحد u_4 علما أنّ، $u_3 + u_5 = 20$:

حسب خاصية الوسط الحسابي

$$\text{لدينا: } u_3 + u_5 = 2u_4$$

$$\text{العلاقة } u_3 + u_5 = 20 \text{ تُصبح: } 2u_4 = 20$$

$$\text{إذن: } u_4 = \frac{20}{2} = 10$$

(2) حساب الحد u_5 علما أنّ، $2u_4 - u_5 = 7$:

$$2(10) - u_5 = 7 \text{ تُكافئ } 2u_4 - u_5 = 7$$

$$\text{ومنه: } -u_5 = 7 - 20$$

$$\text{وعليه: } -u_5 = -13$$

$$\text{إذن: } u_5 = 13$$

(3) استنتاج قيمة r وحساب u_0 :

بمأنّ (u_n) متتالية حسابية،

$$\text{ولدينا: } u_4 = 10; u_5 = 13$$

$$\text{إذن: } r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = 3$$

حساب u_0 :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_4 = u_0 + 4r$$

$$\text{وعليه: } 10 = u_0 + 4(3)$$

$$\text{إذن: } u_0 = 10 - 12 = -2$$

(4) التحقق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = 3n - 2$$

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -2 + 3n$

(5) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -2 + 3n$

(5) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$= (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

$= (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$

$= (n + 1) \left(\frac{3n - 4}{2} \right)$

$= \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

(6) إيجاد العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 33$

$S_n = 33$ معناه: $\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 33$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(33)$

وعليه: $3n^2 - n - 70 = 0$ (*)

نحل المعادلة (*):

نحسب المميز Δ :

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-70)$

$= 1 + 840 = 841 > 0$

للمعادلة (*) حلين متميزين هما:

$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 + 29}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{N}$

و $n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 - 29}{6} = \frac{-28}{6} = \frac{-14}{3} \notin \mathbb{N}$

إذن: $n = 5$ ($S_5 = 33$).

حل التمرين الثاني وعشرون:

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

(1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول

1 هو: (ب) -14.

التبرير:

○ الطريقة 01: إذا كان $u_0 = 1$ هو الحد الأول

للمتتالية الحسابية التي أساسها $r = -3$

فإنّ حدّها السادس هو u_5 وبالتالي:

$u_5 = u_0 + 5r = 1 + 5(-3) = -14$

○ الطريقة 02: إذا كان $u_1 = 1$ هو الحد الأول

للمتتالية الحسابية التي أساسها $r = -3$

فإنّ حدّها السادس هو u_6 وبالتالي:

$u_6 = u_1 + (6 - 1)r = 1 + 5(-3) = -14$

(2) مجموع 100 حدّ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول

هو 1 وأساسها 3 هو: (ج) $\frac{3^{100} - 1}{2}$

(3) لدينا: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$.
الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون: (أ) $x = \frac{4}{3}$

التبرير:

بمأنّ الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية

فإنّ حسب خاصية الوسط الحسابي $a + c = 2b$

ومنه: $(2x + 2) + (4x) = 2(6x - 3)$

وعليه: $6x + 2 = 12x - 6$

وبالتالي: $-6x = -8$ إذن: $x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

(4) المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:

(ج) لا حسابية ولا هندسية.

لأنّ: العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

ليست من الشكل $u_{n+1} = u_n + r$

وليست من الشكل $u_{n+1} = qu_n$.

حل التمرين الثالث وعشرون:

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n) : (أ) متزايدة تماما، لمعرفة اتجاه تغيّر

متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_n = n^2 - 1$

ومنه: $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 1$

$= n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1$

$= n^2 + 2n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1)$

$= 2n + 1 > 0$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها

$q = 2$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

(ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأنّ: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يُساوي:

إذن: $[n = 4] (u_4 = 1536)$

رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

(5) حساب بدلالة n المجموع،

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_1 \left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} \right)$$

$$= 24 \left(\frac{1-4^n}{1-4} \right)$$

$$= \frac{24}{-3} (1 - 4^n)$$

$$= -8(1 - 4^n) = 8(4^n - 1)$$

حل المسألة الخامسة وعشرون:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

(1) تبين أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب

حساب حدّها الأول u_1 :

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت $\frac{2}{5}$

$$u_n = \frac{2}{5}n - 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}(n+1) - 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} - 1$$

$$= \frac{2}{5}n + \frac{2-5}{5} = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5}n - \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{2}{5}n - 1 \right) \quad \text{وعليه:}$$

$$= \frac{2}{5}n - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}n + 1$$

$$= -\frac{3}{5} + 1 = \frac{-3+5}{5} = \frac{2}{5}$$

إذن: المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ ، وحدّها الأول

$$u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5}$$

(2) تعيين رتبة الحد الذي قيمته 575:

$$\text{نضع: } u_n = 575 \text{ نجد: } \frac{2}{5}n - 1 = 575$$

$$\frac{2}{5}n = 576 \quad \text{ومنه:}$$

$$2n = 5(576) \quad \text{وعليه:}$$

$$2n = 2880 \quad \text{أي:}$$

$$\text{وبالتالي: } n = \frac{2880}{2} = 1440 \in \mathbb{N} \quad (u_{1440} = 575)$$

إذن: رتبة الحد الذي قيمته 575 هي 1440 لأنّ الحد

الأول هو u_1 .

(3) حساب قيمة المجموع S حيث،

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$$

$$(أ) 3(2^n - 1)$$

لأن:

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= v_1 \left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = 3 \left(\frac{1-2^n}{-1} \right) = 3(2^n - 1)$$

حل المسألة الرابعة وعشرون:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول

u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

(1) تبين أن $u_1 = 24$:

حسب خاصية الوسط الهندسي

$$\text{لدينا، } u_0 \times u_2 = u_1^2 \text{ ومنه: } u_0 \times u_2 = 576$$

$$u_1^2 = 576 \quad \text{نُصبح:}$$

$$u_1 = \sqrt{576} = 24 \quad \text{وعليه:}$$

$$\text{أو } u_1 = -\sqrt{576} = -24 \quad \text{(مرفوض)}$$

إذن: $u_1 = 24$ لأنّ حدود (u_n) موجبة تماما.

استنتاج قيمة u_0 :

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 = 30$$

$$\text{ومنه: } u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 = 6$$

$$\text{(2) تبين أن } q = 4 \text{ :لدينا: } q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = 6 \times 4^n$$

(3) اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$$

$$u_n = 6 \times 4^n \quad \text{لدينا:}$$

$$u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1} = 6 \times 4^n \times 4^1 \quad \text{ومنه:}$$

$$u_{n+1} - u_n = (24 \times 4^n) - (6 \times 4^n) \quad \text{وعليه:}$$

$$= 18 \times 4^n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

$$\text{بما أنّ } u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$$

فإنّ (u_n) متزايدة تماما.

$$\text{(4) حساب } 4^4: 4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

التحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n)

وتعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 1536 \text{ نجد: } 6 \times 4^n = 1536$$

$$4^n = \frac{1536}{6} \quad \text{ومنه:}$$

$$4^n = 256 \quad \text{أي:}$$

$$\text{وعليه: } 4^n = 4^4 \quad (\text{لأن } 4^4 = 256)$$

(1) علماً أن: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، تعيين u_1 :
 حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_0 + u_2 = 2u_1$
 العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 = 6$
 تُصبح: $u_1 + 2u_1 = 6$ ومنه: $3u_1 = 6$
 إذن: $u_1 = \frac{6}{3} = 2$

(2) علماً أن: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، تعيين الحد الأول u_0 :
 ثم استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :
 $2u_0 - 3(2) = -10$ تكافئ $2u_0 - 3u_1 = -10$
 ومنه: $2u_0 = -10 + 6$
 أي: $2u_0 = -4$
 إذن: $u_0 = \frac{-4}{2} = -2$

استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :
 بمأن (u_n) حسابية؛ ولدينا: $u_1 = 2, u_0 = -2$
 فإن: $r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$
(3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -2 + 4n$
(4) تعيين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$:
 نضع: $u_n = 2018$ نجد: $-2 + 4n = 2018$
 ومنه: $4n = 2020$

وبالتالي: $n = \frac{2020}{4} = 505 \in \mathbb{N}$ ($u_{505} = 2018$)

(ب) حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) :
 بمأن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الخامس عشر هو:
 $u_{14} = -2 + 4(14) = 54$

(5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $= (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$
 $= (n + 1) \left(\frac{-2 + (-2 + 4n)}{2} \right)$
 $= (n + 1) \left(\frac{-4 + 4n}{2} \right) = (n + 1)(2n - 2)$

(6) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 96$:
 $S_n = 96$ معناه: $(n + 1)(2n - 2) = 96$
 ومنه: $2n^2 - 2n + 2n - 2 = 96$
 وعليه: $2n^2 = 98$ أي: $n^2 = 49$
 وبالتالي: $n = \sqrt{49} = 7$

أو $n = -\sqrt{49} = -7$ (مرفوض)
 إذن: $n = 7$ ($S_7 = 96$)

$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$
 $= (1440 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2} \right)$
 $= (1440) \left(\frac{\frac{-3}{5} + 575}{2} \right)$
 $= \frac{1440}{2} \left(\frac{-3}{5} + 575 \right)$
 $= 720 \left(\frac{-3 + 5(575)}{5} \right)$
 $= 720 \left(\frac{-3 + 2875}{5} \right)$
 $= 720 \left(\frac{2872}{5} \right)$
 $= 720(574,4) = 413568$
(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$v_n = 4^{5u_n+6}$
(أ) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 :

نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت
 لدينا: $v_n = 4^{5u_n+6}$ ومنه: $v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$
 وبمأن (u_n) حسابية فإن $u_{n+1} = u_n + r$
 أي: $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}$
 وعليه:

$v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$
 $= 4^{5(u_n + \frac{2}{5})+6}$
 $= 4^{5u_n+2+6}$
 $= 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2$
 وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6} \times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 16$ وحدّها الأول $v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5(\frac{-3}{5})+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64$
 لأنها معرفة على $\mathbb{N}^*$.

(ب) حساب بدلالة n المجموع:

$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 $= v_1 \left(\frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q} \right)$
 $= 64 \left(\frac{1 - 16^n}{1 - 16} \right)$
 $= \frac{64}{-15} (1 - 16^n) = \frac{64}{15} (16^n - 1)$

ملح التمرين السادس وعشرون:
 المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .



انتهى بالتوفيق في البكالوريا

أستاذ المادة: ب- م

يتبع السلسلة الثانية.

السلسلة الثانية (التمرين) - المحور: المتتاليات العددية

سلاسل العبقري في الرياضيات
الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية

التحضير الجيد لبكالوريا: 2020

(2) احسب الحد u_{20} ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .(3) احسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.**التمرين 05: — بكالوريا 1999.**(1) (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 1$ وأساسها u_n بدلالة n .
2. أ- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .ب- احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.(2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5 = 32$ و $v_8 = 256$.
أ- عيّن أساس المتتالية وحدّها الأول v_0 ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .ب- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
(3) نعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = 2^n + 2n + 1$$

احسب المجموع: $S'' = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.**التمرين 06: — بكالوريا 2000.** (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ومجموع حدودهاالثلاثة الأولى v_0, v_1, v_2 يساوي 19.(1) احسب الحدود v_0, v_1, v_2 .(2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .(3) احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ثم استنتج المجموع S_6 (يُعطى الكسر مُختزل).**التمرين 07: — بكالوريا 2001.** (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3}{2} \\ u_1 + 4u_2 - u_3 = 7 \end{cases} \text{ و}$$

بكالوريات من النضام القديم**التمرين 01: — بكالوريا 1995.** (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$u_2 = 7 \text{ و } u_4 = 12$$

(1) عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول.

(2) عيّن العدد الطبيعي n علماً أنّ: $u_n = 22$.

(3) احسب المجموع

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$$

التمرين 02: — بكالوريا 1996.نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي حدّها الأول

$$u_1 = 4 \text{ وأساسها } 2.$$

(1) احسب u_2 و u_3 .(2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .(3) عيّن قيمة الحد u_{1996} .

(4) هل 1416 حد من حدود هذه المتتالية؟

التمرين 03: — بكالوريا 1997. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 حيث:

$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 579$$

علماً أنّ حدود هذه المتتالية موجبة.

(1) احسب u_5 ثم u_1, u_3, u_7 .(2) اكتب u_n بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي k بحيث:

$$u_k = 1996$$

التمرين 04: — بكالوريا 1998. (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$u_1 = 4 \text{ و } u_3 = 24$$

(1) عيّن أساس هذه المتتالية.

التمرين 11(): — بكالوريا 2005.(u_n) متتالية حسابية حيث:

$$u_2 + u_5 = 34 \text{ و } u_0 + u_3 = 18$$

(1) احسب الحد الأول u₀ والأساس r لهذه المتتالية.(2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n.(3) احسب المجموع: S_n = u₀ + u₁ + ... + u_n.(4) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث: S_n = 78.**التمرين 12(): — بكالوريا 2006.**(v_n) المتتالية الهندسية ذات الحدود الموجبة التي حدّها

$$\text{الأول } v_0 = \frac{1}{2} \text{ وحدّها الخامس } v_4 = 8.$$

(1) عيّن أساس هذه المتتالية ثم اكتب v_n بدلالة n.(2) اثبت أنّ العدد 2048 حد في المتتالية (v_n).

(3) احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

(4) احسب المجموع:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048$$

(1) عيّن الحدود u₁, u₂, u₃ وأساسها.(2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.(3) احسب المجموع: S_n = u₁ + u₂ + ... + u_n.(4) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: S_n = -10.**التمرين 08(): — بكالوريا 2002.**(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u₁.(1) احسب حدّها الثاني u₂ علماً أنّ: u₁ + u₃ = 12.(2) احسب حدّها الرابع u₄ علماً أنّ:

$$u_3 + u_4 + u_5 = 30$$

(3) عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u₁.(4) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم عيّن قيمةالعدد الطبيعي n بحيث: u_n = 32.(5) احسب المجموع: S = u₁ + u₂ + ... + u₁₅.**التمرين 09(): — بكالوريا 2003.**(u_n) متتالية حسابية معرّفة على مجموعة الأعدادالطبيعية غير المعدومة N* بـ: $u_n = \frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.(1) بيّن أنّ (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين حدّهاالأول u₁ وأساسها r، استنتج اتجاه تغيّرها.(2) احسب المجموع: S_n = u₁ + u₂ + ... + u_n.(3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: S_n = 10.**التمرين 10(): — بكالوريا 2004.**(u_n) متتالية حسابية معرّفة على بحدّها الأولu₀ = 2 وبالعلاقة: u₂ + u₅ = 25.(1) عيّن أساس المتتالية (u_n).(2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

(3) احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

(4) احسب المجموع: S = u₀ + u₁ + ... + u₁₀.

أستاذ المادة: بـ- م/يتبع الملخص الأول حول المتتاليات العددية.

انتهى بالتوفيق في البكالوريا

المحور: المتتاليات العددية

الملخص الأول-

ملخصات العبقري في الرياضيات

التحضير الجيد لبكالوريا: 2020

الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية

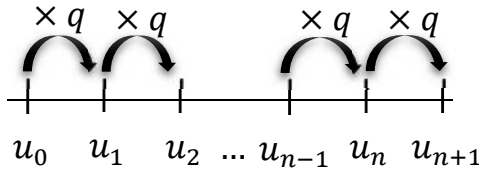
المحور: المتاليات العددية

-الملخص الأول-

ملخصات العبقري في الرياضيات

المتتالية (u_n)

هندسية



حيث q عدد حقيقي $u_{n+1} = qu_n$
 q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أنّ الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = qu_n$

إذا أُعطي u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

إذا أُعطي u_1 :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

من أجل عدد n طيعين p و n :

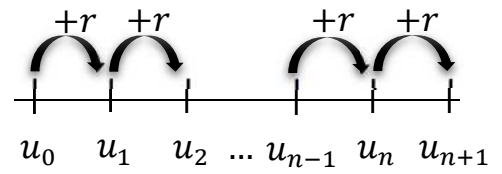
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية هندسية.

بصفة عامة:

$$\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right) \text{ الحد الأول} = \text{المجموع}$$

حسابية



حيث r عدد حقيقي $u_{n+1} = u_n + r$
 r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

الطريقة 01:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = u_n + r$

إذا أُعطي u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

إذا أُعطي u_1 :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

من أجل عدد n طيعين p و n :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية حسابية.

بصفة عامة:

$$\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}$$

كيف نبين
أنه

عبارة الحد العام
للمتتالية
 (u_n)

كتابة u_n بدلالة n

هذه العلاقات يُمكن
استعمالها وذلك
بتعويض u_n بأي حد
مُعطى

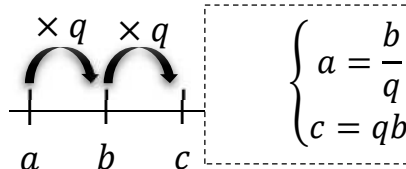
جميع حدود متتالية
من متتالية

$$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$$

الربط الهندسي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$a \times c = b^2$$

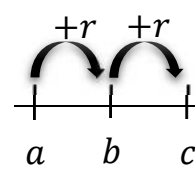


$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = qb \end{cases}$$

الربط الحسابي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$$a + c = 2b$$



$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

