

Prof Mustapha
KHA-LD

الاشتقاقية

I. تعاريف

(1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$

(2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$

* العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز له $f'(x_0)$ أي $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

* نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و $x_0 + h$ ونرمز له ب $g(h)$

* قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

(3) الدالة المشتقة لدالة f

f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f

< مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ ونرمز لها f' حيث $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

II. التفسير الهندسي للعدد المشتق

(1) معادلة المماس عند نقطة: مماس المنحني C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على

الشكل $a + h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $f(a + h) = f'(a)h + f(a)$

* ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

عمليات على الدوال المشتقة [VI]

III. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u + v)$	$u' + v'$
$(u \times v)$	$u' \cdot v + v' \cdot u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov] \times v'$
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$

$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHA-LD

1 تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

2 معرفة القيم الحدية للدالة

- < إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
 < إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
 < إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

3 نقطة الانعطاف

- < إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I ولا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
 < إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
 < بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

4 حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a, b] \iff f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a, b] \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

5 الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f(x) \leq k \iff f$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
 - $f(x) \geq k \iff f$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)
- *ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \iff f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant
 f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \iff f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

6 نظرية القيم المتوسطة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_0 \text{ على المجال } [a, b] \iff \left. \begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\}$$

7 المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

< بيانيا

- $f(x) > g(x) \iff C_f$ فوق C_g
- $f(x) < g(x) \iff C_f$ تحت C_g
- $f(x) = g(x) \iff C_f$ تقطع C_g

< حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a b	x_0 0
إشارة $f(x) - g(x)$	-	+
الوضع النسبي بين C_g و C_f	C_g تحت C_f	C_g فوق C_f
	C_f يقطع C_g	