



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسية e^x

4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 18

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$.

(2) أ/ بين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة: $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال

$$]-\infty; 2 + \ln 4[\text{ وتحتة على المجال }]2 + \ln 4; +\infty[$$

(3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

(6) مثل بيانياً (Δ) والمنحني (C_f) .

لمشاهدة الحل مع @الأستاذ_عبد_الرحمان اضغط على الرابط

<https://youtu.be/OrtSrBAtdIk>

1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x - 2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} \right] = -\infty$$

2) / تبين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{x-2} = 4$$

$$\Rightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

- تبين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4[$ وتحت على المجال $]2 + \ln 4; +\infty[$:

دراسة إشارة الفرق ($f(x) - y$) :

$$\begin{aligned} f(x) - y &= -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \\ &= -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \end{aligned}$$

لدينا $0 < -\frac{1}{2} e^{x-2}$ ولدينا:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4 + 2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$		$-$
$e^{x-2} - 4$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2 + \ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2 + \ln 4; +\infty[$

(3) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2}) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

$$f'(x) \leq 0 \text{ لدينا}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} = 1 \\ &\Rightarrow x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

(4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$:

$$-2e^{x-2} < 0 \text{ لدينا}$$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	-	0	-
$e^{x-2} - 1$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-

المشتقة الثانية انعدمت وغيّرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(2; 2)$

(5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

$$f(2 + \ln 3) = 0.93 \quad \text{و} \quad f(2 + \ln 4) = -0.83 \quad \text{ولدينا:}$$

$$f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

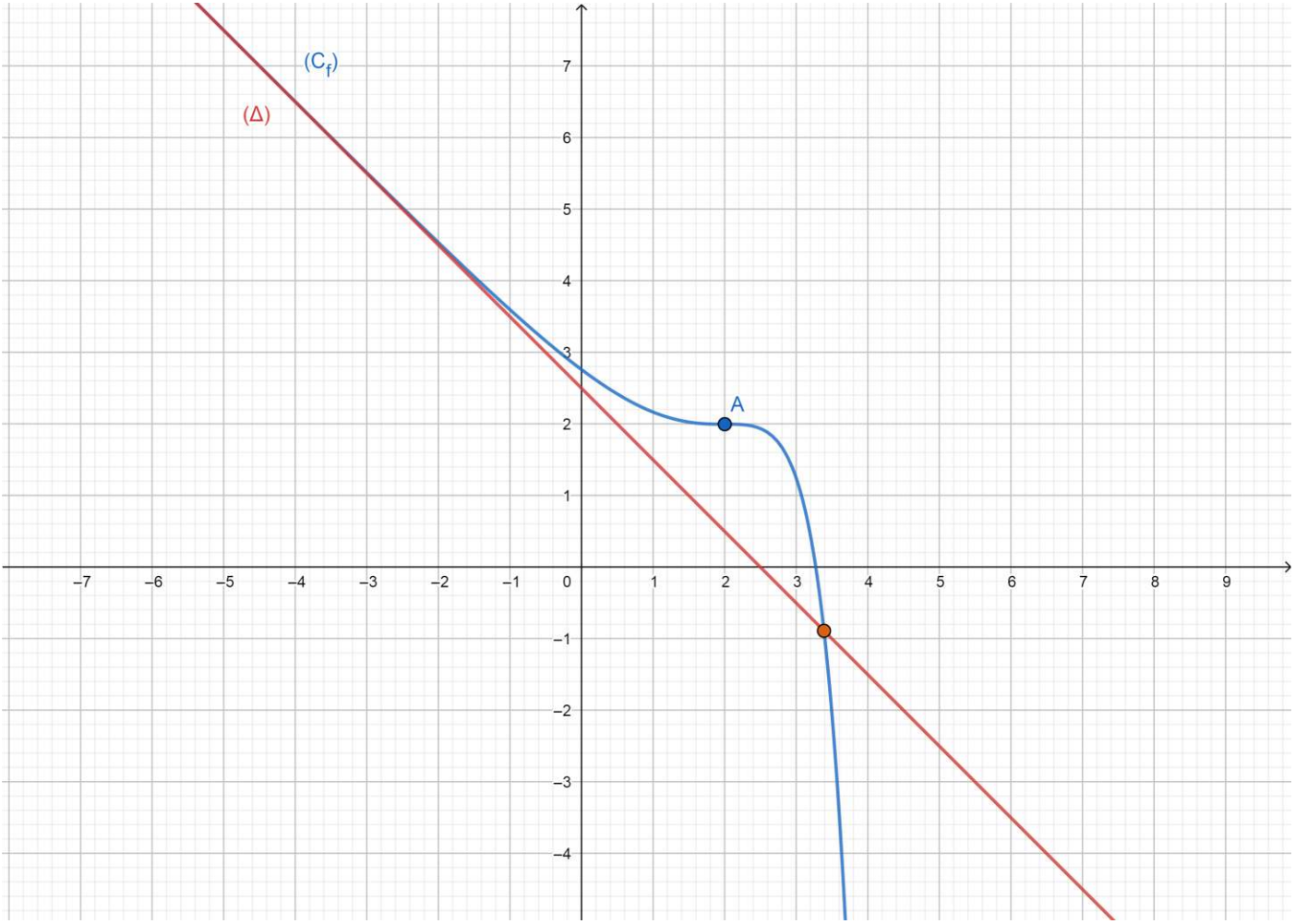
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$$]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4 [$$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و (C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) : $(y = -\frac{1}{2}x - 1)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶