

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة عينه مع التعليل

(1) نعتبر المجموع T_n حيث : $T_n = \ln 2 + \ln 2^3 + \ln 2^5 + \dots + \ln 2^{2n+1}$ قيمة T_n هي:

(أ) $T_n = 2^{n(n+1)}$ (ب) $T_n = 2^{(n+1)^2}$ (ج) $T_n = 2 \ln(n+1)$

(2) نعتبر في المجال المعادلة $\log x^2 - 2 \log x - 3 = 0$ حلول المعادلة هي:

(أ) $S = \{e^{-1}; e^{-3}\}$ (ب) $S = \{10^{-1}; 10^3\}$ (ج) $S = \{10^3\}$

(3) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$

نضع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{36}$ قيمة S هي:

(أ) $S = 1444$ (ب) $S = 2022$ (ج) $S = 1443$

(4) المتتاليتان العدديتان u_n و (v_n) المعرفتان بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ،
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \end{cases}$$

و $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ ، قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي:

(أ) $\alpha = -1$ (ب) $\alpha = 3$ (ج) $\alpha = 1$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = u_n \times 5^n$

(1) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

(2) أ) برهن ان المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5 ثم اكتب w_n بدلالة n
ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

بين أن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]$

(4) احسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n بحيث : $T_n = u_0 + 5^1 u_1 + 5^2 u_2 + \dots + 5^n u_n$

و $T'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور ، 6 اناث أن يشكلوا لجنة تتألف من 3 أفراد لتمثيلهم في مسابقة دراسية

(نفرض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار)

. نعتبر الحدثين: E : " أعضاء اللجنة من نفس الجنس " ، F : " أعضاء اللجنة من الجنسين معا "

(1) أ) احسب عدد اللجان التي يمكن تشكيلها.

أ) احسب $P(E)$ و $P(F)$ احتمالي E و F .

(2) نفترض أنه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ x ، و أخته التلميذة y والتي لا تريد الانضمام الى اللجنة التي

تضم التلميذ x

- احسب احتمال أن يكون أعضاء اللجنة من الجنسين معا

(3) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلميذات المتواجدات بها.
عين قانون الاحتمال X و احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,35 < \alpha < 0,36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

ب) عين حصارا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

5. أنشئ كل من (Δ) ، (T) و (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

6. أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة F المعرفة ب: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية

للدالة: $x \rightarrow (x^2 + 2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = -\alpha$ و $x = 0$.

ج) بين أن: $A(\alpha) = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$

(1) بين أن الدالة g متزايدة على المجال $]0; +\infty[$.

(2) احسب $g(1)$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) اثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(3) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) أ - بين أن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - x$ متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

ب - بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $[0,54; 0,56]$ حلا وحيدا α ثم فسر النتيجة بيانيا.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(6) أ - بين أن الدالة $x \mapsto -x + x \ln x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب - احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n العدد الحقيقي: $a = \ln(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{2022} + \ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{2022}$

(أ) $a = 2022$ (ب) $a = 0$ (ج) $a = n$

(2) إذا كانت الأعداد $(1 - e^{-2})$ ، $(e^{-2} - e^{-4})$ و α تشكل حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن:

(أ) $\alpha = (1 - e^{-4})$ (ب) $(e^{-2} - e^{-6})$ (ج) $(e^{-4} - e^{-6})$

(3) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي:

(أ) $m = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ (ب) $m = \ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$ (ج) $m = \ln\left(\frac{e-1}{2}\right)$

(4) معامل x^{10} في منشور $(2+x)^{12}$ هو: (أ) 262 (ب) 263 (ج) 264

التمرين الثاني: (5 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha-1$ و كرتين بيضاوين تحملان الرقم 1، حيث α عدد طبيعي غير معدوم. الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

نعتبر الحوادث التالية: A "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C "الحصول على كرتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$ ".

(1) أ) أحسب إ احتمال كل من الحوادث A، B و C.

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء.

(أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.

(ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

(ج) عين قيمة α التي من أجلها $|E(X) - 1| \leq 2$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 بحيث: $u_0 > \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right)$

(1) أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{3})^2$.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > \sqrt{3}$.

ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)$

أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{3})^2$.

ب. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم استنتج عبارة v_n بدلالة u_0 و n .

ج. أثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع: من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$S_n = \left(\frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{u_1 - \sqrt{3}}{u_1 + \sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{u_2 - \sqrt{3}}{u_2 + \sqrt{3}} \right) \times \dots \times \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)$$

$$S_n = e^{\left(2^{n+1} - 1 \right) \ln \left(\frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} \right)}$$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) الدالة h معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

وبجدول تغيراتها المقابل:

(3) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α يحقق: $0.7 < \alpha < 0.8$

(4) استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$

x	0	α	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	⋮	0	-
$h(x)$	$-\infty$	0	$1 + \frac{2}{e}$	1

(II) الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(7) أ. احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة g .

(8) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

ب. فسر النتيجةين بيانيا .

ج. شكل جدول تغيرات g .

(III) الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم السابق.

(1) أ - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = g'(x) \times h(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) أ. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

ب. فسر النتيجةين بيانيا

ج . برهن أن: $f(\alpha) = \frac{3}{4}$ ، شكل جدول تغيرات f .

(3) أ. بين أن : (C_g) و (C_f) لهما مماس مشترك (T) ، اكتب معادلة له .

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

ج. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة (C_g) .

(4) أنشئ بدقة المماس (T) ثم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم السابق.