

الفرض الثاني للفصل الثاني في مادة الرياضيات

الأستاذ: قويسم الخليل

المستوى: ثانوية ثانوي شعبة علوم تجريبية

يوم: 28 فيفري 2023

المدة: ساعة و15 د

06 نقاط

التمرين 01

$AB = AC = BC = \alpha$ حيث ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي، لتكن (Γ) مجموعة النقاط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

- ① تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ)
- ② بين أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل عن النقطة M
- ③ لتكن G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; -4); (C; 1)\}$

أ/ بين أن $GM = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب/ استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ج/ بأخذ $\alpha = 2$ ، أنشئ المجموعة (Γ)

12 نقاط

التمرين 02

① f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{2x - 2}$

حيث α و β عددين حقيقيين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

• عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الإحداثيات $(0; -1)$

② نضع فيما يلي: $\alpha = -2$ و $\beta = 2$

① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسّر النتائج هندسيا إن وجدت.

② أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 2}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلت له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

③ أ/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

④ أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$

ب/ بين أن النقطة ω هي مركز تناظر لـ (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل النقطة ω

⑤ ارسم كل من (Δ) و (C_f)

⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

⑦ وضح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة $h: x \mapsto f(|x|)$ انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه

02 نقطة

سؤال إضافي:

• أثبت ما يلي:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

بالتوفيق

تصحيح مقترح للموضوع التحضير: رقم 2

الأستاذ: قويسم الخليل

المستوى: ثانوية ثانوي

06 نقاط

التمرين 01

1 التحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ)؛

لدينا: $\|\vec{BA} - 4\vec{BB} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} - 2\vec{BB} + \vec{BC}\|$ ومنه: $\|\vec{BA} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$ إذن: $B \in (\Gamma)$ 2 تبين أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل عن M؛

لدينا:

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$$

إذن الشعاع $(\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC})$ مستقل عن M

3

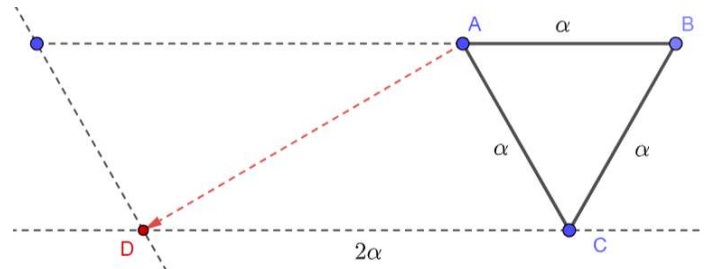
أ/ تبين أن $GM = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$ لدينا: G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; -4); (C; 1)\}$ ومنه: $\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$ معناه: $\|(1 - 4 + 1)\vec{MG}\| = \|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|$ معناه: $\|-2\vec{MG}\| = \|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|$ معناه: $2MG = \|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|$

معناه:

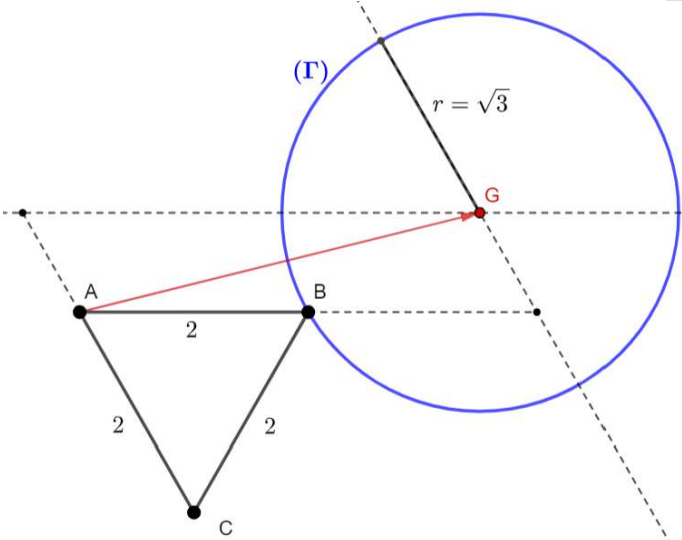
$$MG = \frac{\|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|}{2}$$

• نحسب $\|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|$ نضع: $\vec{AD} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$

ومنه:

لدينا حسب فيثاغورس: $AD^2 + AC^2 = CD^2$ ومنه: $AD = \sqrt{CD^2 - AC^2}$ ومنه: $AD = \sqrt{(2\alpha)^2 - \alpha^2}$ ومنه: $AD = \sqrt{4\alpha^2 - \alpha^2}$ ومنه: $AD = \sqrt{3}\alpha^2$ ومنه: $AD = \sqrt{3}\alpha$

$$\vec{AG} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$



12 نقاط

التمرين 02

I) تعيين α و β ؛لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناه:

$$f'(0) = 0$$

نعين أولا $f'(x)$:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = -2 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right] \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2x-2} \right] \\ = 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته

$$y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x - 2 = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	+	
الوضع النسبي	(Δ) تحت (C_f)	(Δ) فوق (C_f)	

3

أ/ تبين أن: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2 - 2x + 2)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$(2x-2)^2 > 0 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:

لدينا:

$$2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+\alpha)(2x-2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x-2)^2} \end{aligned}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0 \Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha = 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$

(II)

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار

$+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار

$-\infty$ معادلته $x = 1$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} \right) = -\infty$$

2

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

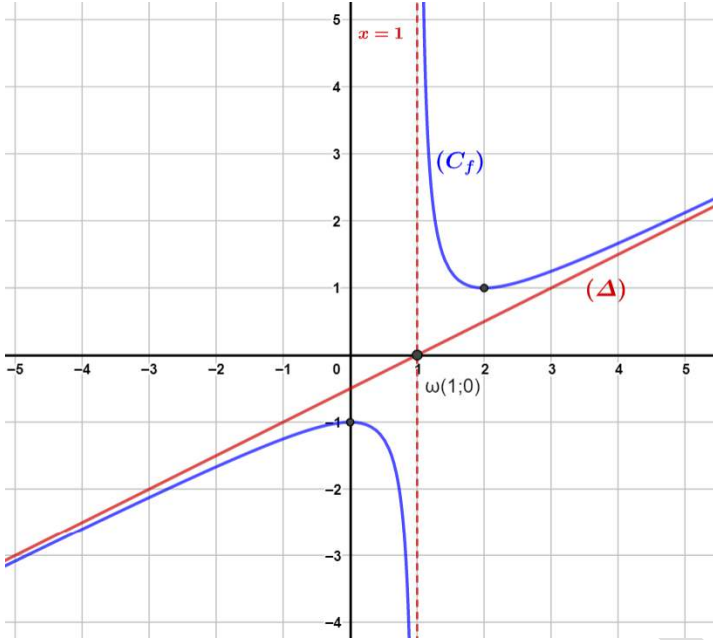
$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x-2} \\ &= \frac{(ax+b)(2x-2) + c}{2x-2} \\ &= \frac{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b + c}{2x-2} \\ &= \frac{2ax^2 + (2b-2a)x - 2b + c}{2x-2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(a)(1-a) + f(a) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a + \frac{a^2-2a+2}{2a-2} &= 0 \\ \Rightarrow 4a-4 &= 0 \\ \Rightarrow a-1 &= 0 \\ \Rightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل ω

٥ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



٦ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حل موجب تماماً

لما $m = -1$ للمعادلة حل مضاعف معدوم

لما $m \in]-1; -\frac{1}{2}[$ للمعادلة حل سالب تماماً

لما $m = -\frac{1}{2}$ للمعادلة لا تقبل حلول

لما $m \in]-\frac{1}{2}; 0[$ للمعادلة حل موجب تماماً

لما $m = 0$ للمعادلة حل مضاعف موجب تماماً

لما $m \in]0; +\infty[$ للمعادلة حل موجب تماماً

٧ توضيح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

ولدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور

الترتيب.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$	

٤

أ/ إيجاد إحداثيي النقطة ω :

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ) :

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1; 0)$

ب/ تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر لـ (C_f) :

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$

معناه: $(2(1) - x) > 1$ أو $(2(1) - x) < 1$

معناه: $(2(1) - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $(2(1) - x) \in D_f$

• ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2(1) - x) + f(x) &= \\ &= \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 \frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 = 2(0) \end{aligned}$$

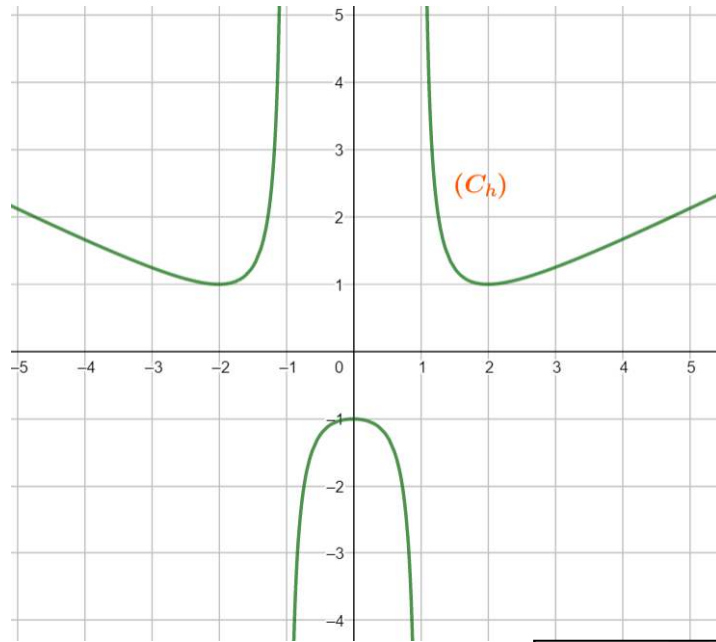
إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1; 0)$ معناه يوجد

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:



02 نقطة

سؤال إضافي:

$$\begin{aligned}
 & \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2 \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3 \sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \dots \\
 &= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 3 \sin(-(\pi - x)) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
 &= \cos(x) - 2 \sin(x) + 3 \sin(x) - \cos(x) \\
 &= \sin(x)
 \end{aligned}$$

#الخليل-للمرياضيات



الخليل للمرياضيات